UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

THM
TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN

Carolin Jung

Separierung von Abwicklungsdreiecken nach Basis- und Großschäden

Friedberger Hochschulschriften Band 32

Carolin Jung

Separierung von Abwicklungsdreiecken nach Basis- und Großschäden

Friedberger Hochschulschriften Band 32

Friedberger Hochschulschriften Band 32

Herausgeber der Friedberger Hochschulschriften:
Die Dekaninnen und Dekane des Campus Friedberg
der Technischen Hochschule Mittelhessen

Einzelne Hochschulschriften auch online abrufbar:
www.thm.de/bibliothek/hochschulschriften

ISSN 1439-1112

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Die Berufspraktische Phase meines Studiums absolvierte ich im „Zentralen Aktuariat Komposit“ bei der R+V Allgemeine Versicherung AG in Wiesbaden. Eine meiner Aufgaben war die Unterstützung bei der Rückstellungs- bzw. Reservebewertung. Da mich dieses Thema interessiert hat, wollte ich es in meiner Bachelorarbeit vertiefen und habe nach passendem Material gesucht. Dabei stieß ich auf den Artikel „Separierung von Abwicklungsdreiecken nach Basisschäden und Großschäden“ von Heinz-Jürgen Klemmt, der 2005 in der Zeitschrift Blätter der DGVFM (Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik) erschien und den ich näher betrachten möchte.

Abwicklungsdreiecke bilden die Grundlage, um versicherungstechnische Rückstellungen zu bestimmen. Mit Hilfe der Abwicklungsdreiecke werden erwartete zukünftige Schadenstände geschätzt.[1]

Rückstellungen sind Verbindlichkeiten (Schulden), welche sich in der Bilanz wiederfinden. Das Besondere ist, dass Höhe oder Fälligkeit dieser Verbindlichkeiten am Abschlussstichtag noch nicht bekannt sind. Rückstellungen rühren von Schadenfällen aus vergangenen Bilanzperioden her und führen möglicherweise in der Zukunft zu Zahlungen.

In der Nicht-Lebensversicherung spielen sogenannte Spätschadenrückstellungen eine große Rolle. In der Haftpflichtversicherung können zum Beispiel endgültige Schadenabwicklungen viele Jahre andauern.[2] Damit ein Versicherungsunternehmen seine Leistungsversprechen einhalten kann, muss ein angemessener Betrag zurückgestellt werden.[3] Um diese Rückstellungen zu beurteilen, bedient man sich vorwiegend mathematischer Schätzverfahren.

Hierbei ergibt sich folgende Problematik: Wenn das Versicherungsunternehmen den größtmöglichen Betrag, der für einen entsprechenden Schadenfall entstehen kann, zurückstellt, dann steht das Unternehmen auf der sicheren Seite. Da jedoch jede Rückstellung den Jahresgewinn und die damit verbundenen Steuern schmälert, hat das Finanzamt ein hohes Interesse an nicht überhöhten Rückstellungen. Sind die Rückstellungen dagegen zu niedrig bemessen,

[1] Vgl. Wagner, S. 9
[2] Vgl. Wolfsdorf, S. 272 f.
[3] Vgl. Schmidt, S. 296

wird das Unternehmen zwar einen höheren Gewinn ausweisen, aber Forderungen, die möglicherweise in der Zukunft auf das Unternehmen zukommen, können nicht erfüllt werden. Versicherungsunternehmen müssen also vor allem darauf achten, dass diese Rückstellungen nicht zu niedrig geschätzt werden.[4]

In dem Artikel von Klemmt geht es um die Vorstellung zweier Modelle, welche zu unterschiedlichen Schätzungen der zukünftigen Schadenstände für noch nicht vollständig abgewickelte Schäden führen.

Es wird gezeigt, dass eine Trennung der Schadenzahlungen nach Basisschäden und Großschäden und somit eine getrennte Fortschreibung der beiden Abwicklungsdreiecke immer dann zu einer höheren Schätzung führt, wenn die Großschäden einer sogenannten „Hyperinflation“ unterliegen.

Der Artikel von Klemmt ist wie folgt aufgebaut: Zunächst wird das Modell mit kleinen Abwicklungsdreiecken betrachtet. Das heißt es werden nur zwei Anfall- bzw. Abwicklungsjahre dargestellt. Die erworbenen Erkenntnisse werden später auf große Abwicklungsdreiecke übertragen. Weiter analysiert Klemmt das Vorhandensein einer Hyperinflation für Großschäden am Beispiel der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung in einem Zeitraum von 1977 bis 2002.

Ziel dieser Arbeit ist die Ausarbeitung des Artikels von Klemmt und zwar die Aussagen deutlicher darzustellen und mit Beispielen zu erläutern. Darauf folgen noch eigene weiterführende Untersuchungen bezüglich der globalen Schätzer der Schadenstände und der Rückstellungsschätzungen. Außerdem ist der Aufsatz „Additivity of Chain-Ladder Projections“ von Björn Ajne zu berücksichtigen, da Klemmt ihn verwendet und er ähnlichen Fragestellungen nachgeht.

[4] Vgl. Wolfsdorf, S.274

Kapitel 2

Reservierung für Spätschäden

Die vollständige Schadenabwicklung kann lange Zeit, oft auch viele Jahre, andauern. Somit weiß ein Versicherungsunternehmen, dass in der Zukunft noch Zahlungen für solche Schäden zu erwarten sind. Um spätere Schadenaufwendungen bezahlen zu können, muss Geld beiseite gelegt werden. Dies geschieht in Form von Rückstellungen bzw. Reserven. Mit Hilfe mathematischer Verfahren können diese Reserven geschätzt werden.

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut:
Im ersten Abschnitt des Kapitels werden Ursachen und Folgen einer lang andauernden Schadenabwicklung beschrieben. Im Abschnitt „Abwicklungsdreiecke" folgt eine Erläuterung der Abwicklungsdreiecke, welche die Basis für die Bestimmung der Reserven bilden. Im letzten Abschnitt wird das Chain-Ladder Verfahren, ein mathematisches Verfahren zur Schätzung der Reserven, erklärt.

2.1 Lang andauernde Schadenabwicklung

In der Schaden- und Unfallversicherung stellen Schadenrückstellungen in der Regel den größten versicherungstechnischen Passivposten in der Bilanz des Versicherers dar. Schadenrückstellungen sind Rückstellungen für Zahlungsverpflichtungen des Versicherers aus Schäden. Diese müssen gebildet werden für Schäden, die eingetreten aber am Geschäftsjahresende noch nicht vollständig abgewickelt sind. Aus diesem Grund ist für jeden Versicherer die Bestimmung und Bewertung der Schadenrückstellungen bzw. Schadenreserven von großer wirtschaftlicher Bedeutung.[1]

In den meisten Branchen bzw. bei den meisten Schäden ist die Zeit zwischen Schadeneintritt und Regulierungsende mit 1-2 Monaten relativ kurz.[2] Schadenregulierung beschreibt den gesamten Ablauf der Bearbeitung von Schäden, vom Schadeneintritt bis hin zur Erbringung der letzten Zahlung.[3] Bei größeren Schäden kann die Regulierung einige Zeit in Anspruch

[1] Vgl. Radtke/Schmidt, VI
[2] Vgl. Mack, S. 221
[3] Vgl. Wagner, S. 587

nehmen. Vor allem aber in der Haftpflichtversicherung kann diese Zeit sogar mehrere Jahre oder Jahrzehnte betragen. Hauptsächliche Ursachen hierfür sind:

1. Späte Manifestation
   Erst lange Zeit nach der Verursachung wird der Schaden bemerkt. Erklärung hierfür ist, dass diese Schäden nur unter bestimmten Bedingungen oder beim Zusammentreffen mehrerer Umstände sichtbar werden.

2. Lange Regulierungsdauer
   Nachdem ein Schaden entdeckt wurde und an den Versicherer gemeldet wurde, kann es noch lange Zeit dauern bis die endgültige Schadenhöhe feststeht.

Zwei Beispiele hierfür:

1. Der Fehler eines Architekten wird erst lange Zeit nach der Verursachung durch zum Beispiel besondere Belastung des Bauwerks bemerkt (späte Manifestation). Hier könnte noch hinzukommen, dass die Festsetzung der Höhe des Schadens durch andauernde Gerichtsprozesse lange Zeit in Anspruch nimmt (lange Regulierungsdauer).[4]

2. Ein weiteres Beispiel ist ein Verkehrsunfall mit einem Personenschaden. Hier ist der Heilungsverlauf des Opfers ungewiss. Außerdem könnten in der Zukunft weitere Folgeschäden auftreten.

Am Ende eines Geschäftsjahres sind also meistens noch nicht alle während des Geschäftsjahres eingetretenen Schäden vollständig reguliert. Diese Schäden bezeichnet man als Spätschäden. Am Ende einer Abrechnungsperiode gibt es zwei unterschiedliche Arten von Spätschäden, deren endgültige Schadenhöhe noch nicht bekannt ist:[5]

Zum einen sind das gemeldete aber noch nicht endgültig regulierte Schäden. Diese Schäden bezeichnet man als RBNS-Schäden (RBNS = reported but not settled). Der zuständige Schadensachbearbeiter muss in jedem dieser Fälle eine voraussichtlich ausreichende Einzelfallreserve festlegen. Diese bildet er auf Grundlage seiner Erfahrung und der Informationen über die Umstände des Falls. Im Vergleich zu den später tatsächlich angefallenen Kosten können dann so genannte Abwicklungsgewinne oder -verluste (Vgl. Abschnitt 2.2) auftreten. Wenn während einer Abwicklungsdauer die Schadenhöhe stärker steigt als angenommen, treten Abwicklungsverluste ein. Die Reserve für so ein negatives Abwicklungsergebnis wird IBNER-Schadenreserve genannt (IBNER = incurred but not enough reported).

Zum anderen gibt es eingetretene oder verursachte Schäden, die dem Versicherer aber noch nicht gemeldet wurden. Diese Schäden bezeichnet man als IBNR-Schäden (IBNR = incurred but not reported). Hierfür ist der Versicherer auf Grund von Erfahrungen früherer Jahre verpflichtet eine IBNR-Schadenreserve zu stellen.[6]

In allen Versicherungszweigen, insbesondere aber in der Haftpflichtversicherung, existiert die

[4] Vgl. Mack, S.221
[5] Vgl. Schmidt, S. 269
[6] Vgl. Mack, S. 221 f.

Problematik der Spätschäden. Zur Einhaltung des Leistungsversprechens muss der Versicherer eine Reserve für die im vergangenen Geschäftsjahr entstandenen Spätschäden bilden. Außerdem muss die Spätschadenreserve aus zurückliegenden Jahren aktualisiert werden. Die Spätschadenreserve wird auch als Prämie für die Selbstversicherung gegen Spätschäden bezeichnet.[7]

2.2 Abwicklungsdreiecke

Abwicklungsdreiecke stellen die Basis für die Bestimmung der Spätschadenreserve dar. Ihr Aufbau ergibt sich aus dem Verlauf eines Schadens, der sich wie folgt darstellen lässt:[8]

- Ein Schaden entsteht im Anfalljahr.
- Dieser Schaden wird dem Versicherer gemeldet.
- Der Versicherer erbringt erste Zahlungen und bildet eine Einzelschadenreserve. Diese Einzelschadenreserve wird von dem zuständigen Sachbearbeiter für eventuell weitere Zahlungen festgesetzt.
- Der Schaden ist abschließend reguliert.

Die vollständige Regulierung eines bzw. aller Schäden aus einem Anfalljahr kann sich über viele Abwicklungsjahre erstrecken. In einem Abwicklungsdreieck kann für jedes Anfall- und Abwicklungsjahr eines der folgenden Merkmale dargestellt werden:[9]

- Anzahl der gemeldeten Schäden.
- Anzahl der abschließend regulierten Schäden.
- Alle geleisteten Zahlungen (Schadenzahlung).
- Schadenaufwand. Dieser setzt sich aus den geleisteten Zahlungen und den Einzelschadenreserven zusammen.

2.2.1 Abwicklungsdreiecke für Zuwächse

Beispiel:
Die folgende Tabelle enthält die geleisteten Zahlungen (in Tausend €) in den einzelnen Abwicklungsjahren für Schäden aus den Anfalljahren 2000 bis 2005. Es soll nun der Übergang von absoluten Abwicklungs- und Anfalljahren zu einem Abwicklungsdreieck mit relativen Abwicklungs- und Anfalljahren gezeigt werden.

[7] Vgl. Schmidt, S. 269
[8] Vgl. Schmidt, S. 270
[9] Vgl. Schmidt, S. 270

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	2000	2001	2002	2003	2004	2005
2000	956	752	685	598	356	150
2001		1116	852	700	684	452
2002			1289	1105	853	785
2003				1452	1358	1000
2004					1546	1205
2005						1885

Man sieht, dass für entstandene Schäden aus dem Jahr 2003 noch in demselben Jahr 1.452 €, im Jahr 2004 1.358 € und im Jahr 2005 1.000 € gezahlt wurden.

Im nächsten Schritt werden die absoluten Abwicklungsjahre als relative Abwicklungsjahre dargestellt. Hier sieht man die Verzögerung der Zahlungen in Bezug auf die Anfalljahre. Zum Beispiel wurden alle Zahlungen aus dem Abwicklungsjahr 0 noch im Anfalljahr und Zahlungen aus dem Abwicklungsjahr 1 ein Jahr nach dem Anfalljahr getätigt.

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
2000	956	752	685	598	356	150
2001	1116	852	700	684	452	
2002	1289	1105	853	785		
2003	1452	1358	1000			
2004	1546	1205				
2005	1885					

In den jeweiligen Spalten stehen nun die Zahlungen, welche entweder im Anfalljahr selbst (Abwicklungsjahr 0) oder in einem der darauffolgenden Jahre geleistet wurden. So stehen nun alle geleisteten Zahlungen aus dem Jahr 2005 nicht mehr in der letzten Spalte sondern auf der Hauptdiagonale.

Im letzten Schritt werden nun auch noch die Anfalljahre als relative Anfalljahre dargestellt.

Man erhält nun folgende Darstellung der geleisteten Zahlungen:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	956	752	685	598	356	150
1	1116	852	700	684	452	
2	1289	1105	853	785		
3	1452	1358	1000			
4	1546	1205				
5	1885					

Diese Art von Tabelle heißt Abwicklungsdreieck für Zuwächse. Das Beispiel mit allen nicht kumulierten Zahlungen bildet die Basis für alle weiteren Betrachtungen in dieser Arbeit.[10]

Allgemein hat das Abwicklungsdreieck für Zuwächse folgende Gestalt:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr							
	0	1	...	k	...	n-i	...	n-1	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$\dots$	$Z_{0,k}$	$\dots$	$Z_{0,n-i}$	$\dots$	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$\dots$	$Z_{1,k}$	$\dots$	$Z_{1,n-i}$	$\dots$	$Z_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	$\dots$	$Z_{i,k}$	$\dots$	$Z_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	$\dots$	$Z_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$							
n	$Z_{n,0}$								

Im Abwicklungsdreieck werden $n+1$ Anfalljahre betrachtet. Annahme ist, dass jeder Schaden im Anfalljahr selbst oder in einem der n folgenden Jahre vollständig reguliert wird.
$Z_{i,k}$ mit $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ sind Zahlungen aus dem Abwicklungsjahr k für Schäden aus dem Anfalljahr i. $Z_{i,k}$ wird auch als Zuwachs bezeichnet.
Es wird angenommen, dass die Zuwächse für $i + k \leq n$ beobachtbar und für $i + k > n$ noch nicht beobachtbar sind. In obigem Abwicklungsdreieck werden die beobachtbaren Zuwächse dargestellt. [11]

2.2.2 Abwicklungsdreieck für Schadenstände

Zur Ermittlung der Spätschadenreserve werden neben den Schadenzuwächsen $Z_{i,k}$ auch die Schadenstände

$$S_{i,k} := \sum_{l=0}^{k} Z_{i,l}$$

betrachtet. $S_{i,k}$ ist also die Summe aller Zahlungen in den Abwicklungsjahren für Schäden aus einem Anfalljahr i. Nun kann man die Zuwächse auch wie folgt darstellen:

$$Z_{i,k} = \begin{cases} S_{i,0} & \text{falls k=0} \\ S_{i,k} - S_{i,k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Schadenstände $S_{i,k}$ sind für $i + k \leq n$ beobachtbar und für $i + k > n$ noch nicht beobachtbar. $S_{i,n-i}$ ist also der letzte beobachtbare Schadenstand.

[10] Vgl. Schmidt, S. 270 ff.
[11] Vgl. Radtke/Schmidt, S. 9

Man erhält nun folgendes Abwicklungsdreieck der beobachtbaren Schadenstände: [12]

Anfalljahr	Abwicklungsjahr							
	0	1	...	k	...	n-i	...	n-1	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n-i}$	...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n-i}$	...	$S_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	...	$S_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

Beispiel:
Ausgehend von dem Beispiel aus Kapitel 2.2.1 erhält man nun folgendes Abwicklungsdreieck der Schadenstände:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	956	1708	2393	2991	3347	3497
1	1116	1968	2668	3352	3804	
2	1289	2394	3247	4032		
3	1452	2810	3810			
4	1546	2751				
5	1885					

Man sieht hier die kumulierten Zahlungen je Anfalljahr. Auf der Hauptdiagonale stehen die aktuell letzten Schadenstände. Mit Ausnahme des Anfalljahres 0 sind die Endschadenstände nicht beobachtbar. Ziel ist nun die Schätzung des rechten unteren Dreiecks, also die Schätzung der nicht beobachtbaren Schadenstände.[13]

[12]Vgl. Schmidt, S. 273
[13]Vgl. Schmidt, S. 273 f.

2.3 Das Chain-Ladder Verfahren

Das Chain-Ladder Verfahren ist ein weit verbreitetes heuristisches Verfahren, um die Erwartungswerte der nicht beobachtbaren zukünftigen Schadenstände zu schätzen.[14]

Ziel ist es, die beobachtbaren Schadenstände des Abwicklungsdreiecks um die nicht beobachtbaren zukünftigen zu ergänzen, um so folgendes Abwicklungsquadrat zu erhalten.[15] Hierbei ist $\hat{S}_{i,n}$ der Endschadenstand aus einem Anfalljahr i. Mit Hilfe des Chain-Ladder Verfahrens sollen diese Endschadenstände, mit Ausnahme des Endschadenstandes aus dem Anfalljahr 0, bestimmt werden.[16]

Anfalljahr	Abwicklungsjahr							
	0	1	...	k	...	n-i	...	n-1	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n-i}$	...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n-i}$	...	$S_{1,n-1}$	$\hat{S}_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-i}$	...	$\hat{S}_{i,n-1}$	$\hat{S}_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	...	$S_{n-k,k}$	...	$\hat{S}_{n-k,n-i}$	...	$\hat{S}_{n-k,n-1}$	$\hat{S}_{n-k,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$	...	$\hat{S}_{n-1,k}$	...	$\hat{S}_{n-1,n-i}$	...	$\hat{S}_{n-1,n-1}$	$\hat{S}_{n-1,n}$
n	$S_{n,0}$	$\hat{S}_{n,1}$	...	$\hat{S}_{n,k}$	...	$\hat{S}_{n,n-i}$	...	$\hat{S}_{n,n-1}$	$\hat{S}_{n,n}$

Im Chain-Ladder Verfahren wird versucht Erfahrungen von früheren Anfalljahren auf spätere zu übertragen. Sind im Verlauf Trend- oder Strukturbrüche enthalten, versagt das Verfahren.[17]

2.3.1 Chain-Ladder Faktoren und Chain-Ladder Schätzer

Beispiel:
Im ersten Schritt möchte ich die Vorgehensweise des Chain-Ladder Verfahrens an einem kleinen Beispiel zeigen. Hierzu nehmen wir folgendes Abwicklungsdreieck:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr		
	0	1	2
0	956	1708	2393
1	1116	1968	
2	1289		

[14] Vgl. Schmidt, S. 272
[15] Vgl. Schmidt, S. 274
[16] Vgl. Radtke/Schmidt, S. 55
[17] Vgl. Mack, S. 223

Um nun das Abwicklungsdreieck zu einem Abwicklungsquadrat zu ergänzen, benötigt man sogenannte Chain-Ladder Faktoren. Diese beschreiben den Übergang von einem Abwicklungsjahr zum nächsten. Für unser Beispiel werden diese Faktoren wie folgt berechnet:

$$F_1^{CL} = \frac{1708 + 1968}{956 + 1116} \approx 1,774$$

$$F_2^{CL} = \frac{2393}{1708} \approx 1,401$$

Nun kann man mit Hilfe dieser Faktoren das Abwicklungsdreieck fortschreiben und die zukünftigen Schadenstände berechnen:

$$\hat{S}_{1,2}^{CL} = 1968 \cdot 1,401 \approx 2757$$

$$\hat{S}_{2,1}^{CL} = 1289 \cdot 1,774 \approx 2287$$

$$\hat{S}_{2,2}^{CL} = 1289 \cdot 1,774 \cdot 1,401 \approx 3204$$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr		
	0	1	2
0	956	1708	2393
1	1116	1968	**2757**
2	1289	**2287**	**3204**
Chain-Ladder Faktoren		1,774	1,401

Um also die nicht beobachtbaren zukünftigen Schadenstände zu schätzen und somit das Abwicklungsquadrat zu erhalten, sind zwei Schritte notwendig. Im ersten Schritt wird für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \ldots, n\}$ der Chain-Ladder Faktor

$$F_k^{CL} := \frac{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k}}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}}$$

gebildet.

Im nächsten Schritt wird der Chain-Ladder Schätzer

$$\hat{S}_{i,k}^{CL} := S_{i,n-i} \cdot \prod_{l=n-i+1}^{k} F_l^{CL}$$

für den erwarteten zukünftigen Schadenstand berechnet. Hierzu wird für jedes Anfalljahr $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes Abwicklungsjahr $k \in \{n-i+1, \ldots, n\}$ dieser Chain-Ladder Schätzer gebildet. Dabei werden die aktuell letzten Schadenstände mit den Chain-Ladder Faktoren der zukünftigen Abwicklungsjahre multipliziert.[18]

[18] Vgl. Schmidt, S. 275

Beispiel:
Für unser Beispiel ergeben sich folgende Chain-Ladder Faktoren:

$$F_1^{CL} = \frac{1708 + 1968 + 2394 + 2810 + 2751}{956 + 1116 + 1289 + 1452 + 1546} \approx 1,829$$
$$F_2^{CL} = \frac{2393 + 2668 + 3247 + 3810}{1708 + 1968 + 2394 + 2810} \approx 1,365$$
$$F_3^{CL} = \frac{2991 + 3352 + 4032}{2393 + 2668 + 3247} \approx 1,249$$
$$F_4^{CL} = \frac{3347 + 3804}{2991 + 3352} \approx 1,127$$
$$F_5^{CL} = \frac{3497}{3347} \approx 1,045$$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	956	1708	2393	2991	3347	3497
1	1116	1968	2668	3352	3804	
2	1289	2394	3247	4032		
3	1452	2810	3810			
4	1546	2751				
5	1885					
Chain-Ladder Faktoren		1,829	1,365	1,249	1,127	1,045

Mit Hilfe dieser Faktoren kann auf die zukünftigen Schadenstände, die Chain-Ladder Schätzer, geschlossen werden. Für das Anfalljahr $i = 3$ ergeben sich folgende Schadenstände:

$$\hat{S}_{3,3}^{CL} = 3810 \cdot 1,249 \approx 4759$$
$$\hat{S}_{3,4}^{CL} = 3810 \cdot 1,249 \cdot 1,127 \approx 5363$$
$$\hat{S}_{3,5}^{CL} = 3810 \cdot 1,249 \cdot 1,127 \cdot 1,045 \approx 5604$$

Insgesamt erhält man folgendes Abwicklungsquadrat:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	956	1708	2393	2991	3347	3497
1	1116	1968	2668	3352	3804	**3975**
2	1289	2394	3247	4032	**4544**	**4749**
3	1452	2810	3810	**4759**	**5363**	**5604**
4	1546	2751	**3755**	**4690**	**5286**	**5524**
5	1885	**3448**	**4706**	**5878**	**6624**	**6922**
Chain-Ladder Faktoren		1,829	1,365	1,249	1,127	1,045

Im rechten unteren Dreieck erhält man die erwarteten zukünftigen Schadenstände, die Chain-Ladder Schätzer. Im letzten Abwicklungsjahr stehen die Endschadenstände.

2.3.2 Chain-Ladder Reserve

Nun folgt die Berechnung der Spätschadenreserven. Hier wird ermittelt, welcher Betrag zurückgestellt werden muss, um die erwarteten zukünftigen Schadenaufwendungen begleichen zu können.

Hierzu subtrahiert man die aktuell letzten Schadenstände (Hauptdiagonale) von den Endschadenständen des letzten Abwicklungsjahres.

Beispiel:
Für das Beispiel ergeben sich folgende Chain-Ladder Reserven

Anfalljahr	Abwicklungsjahr						Reserven
	0	1	2	3	4	5	
0						3497	-
1					3804	3975	3975-3804=171
2				4032		4749	4749-4032=717
3			3810			5604	5604-3810=1794
4		2751				5524	5524-2751=2773
5	1885					6922	6922-1885=5037
Summe							10492

Die geschätzte globale Chain-Ladder Reserve beträgt 10.492 €. Das heißt dieser Betrag müsste zurückgestellt werden, um den zukünftigen Zahlungsverpflichtungen nachkommen zu können.

Zur Berechnung der Spätschadenreserve wird also für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Differenz

$$\hat{R}_i^{CL} := \hat{S}_{i,n}^{CL} - S_{i,n-i}$$

gebildet. Diese wird Chain-Ladder Reserve des Anfalljahres i bezeichnet. Die Summe

$$\hat{R}^{CL} := \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^{CL}$$

der Chain-Ladder Reserven wid als globale Chain-Ladder Reserve bezeichnet.[19]

[19] Vgl. Radtke/Schmidt, S. 58

Kapitel 3

Separierte Spätschadenschätzung

In diesem Kapitel stelle ich die wesentlichen mathematischen Ergebnisse des Aufsatzes „Separierung von Abwicklungsdreiecken nach Basisschäden und Großschäden“ von Heinz-Jürgen Klemmt dar. Wie einleitend bereits erwähnt, geht Klemmt der Frage nach, welche Auswirkungen eine getrennte Betrachtung von Basis- und Großschäden bezüglich der Schätzung der Schadenstände hat. Unter der Voraussetzung, dass die Großschaden- und die „Hyperinflationsbedingung“ gilt, beweist Klemmt, dass die Schätzwerte bei getrennter Schätzung von Basis- und Großschäden immer höher ausfallen, als wenn alle Schäden zusammen betrachtet werden.

3.1 Trennung von Basis- und Großschäden

Im Folgenden soll die Problematik von Schadendreiecken, die sich auf gesamte Sparten beziehen, dargestellt werden.

Um in Long-Tail Sparten, Haftpflichtsparten mit einer langen Abwicklungsdauer, Schadenreserven zu bestimmen, werden normalerweise die Abwicklungsdreiecke mit Hilfe des Chain-Ladder Verfahrens fortgeschrieben. Hierbei liegen die Schadenstände $S_{i,k}$ des Abwicklungsdreiecks meistens spartenweise aggregiert vor, d.h. die Schadenzahlungen einer Versicherungssparte werden aufsummiert und in einem Abwicklungsdreieck gemeinsam betrachtet. Dies bedeutet natürlich einen gewissen Verlust an Informationen.

Die Frage ist nun, ob die Abwicklung jedes einzelnen Schadens ein genaueres Ergebnis der Spätschadenreserve ergeben würde. Einerseits werden nach dem Prinzip des Ausgleichs im Kollektiv Informationen, die auf mehreren Schäden beruhen, immer zuverlässiger. Andererseits werden Informationen verschleiert, wenn Teilbestände, die im Abwicklungsverhalten unterschiedlich sind, zusammengefasst werden.

Ein wichtiger Schritt der Schadenreservierung ist die Zusammenstellung möglichst großer und möglichst homogener Teilbestände. Diese werden dann jeweils im eigenen Abwicklungsdreieck fortgeschrieben. Außerdem sind die geschätzten Reserven für zwei Teilbestände nur in

Ausnahmefällen gleich den Reserven der zusammengefassten Teilbestände.[1]

In vielen Fällen wird dazu übergegangen Schadenzahlungen nach Basis- und Großschäden zu separieren und dann getrennt fortzuschreiben. Die geschätzten Schadenstände fallen, beim Vorliegen einer Hyperinflation bei Großschäden, höher aus als bei der aggregierten Methode.

Ein Großschaden ist ein außerordentlich hoher Sach-, Personen- oder Vermögensschaden. Eine allgemein gültige Grenze, ab der ein Schaden als Großschaden gilt, gibt es nicht. Jeder Versicherer definiert die Schadenhöhe als Kriterium für einen Großschaden selbst. In der Haftpflichtversicherung gelten Personenschäden oft als Großschäden, da sie oft über viele Jahre abgewickelt werden. Hier liegt die Grenze meist bei 50.000 Euro oder 100.000 Euro Schadenaufwand je verletzte Person.[2]

Inflation bedeutet Geldentwertung bzw. Steigerung des Preisniveaus. Ab einer Preissteigerung von jährlich 50 % spricht man von einer Hyperinflation.[3] Wenn Klemmt von Hyperinflation spricht, meint er den Schadenzuwachs über die Anfalljahre.

3.2 Abwicklungsdreiecke für separierte Schäden

Die Ausführungen dieses Abschnittes basieren auf dem Aufsatz von Klemmt. Im ersten Teil wird das Modell von Klemmt für kurze Abwicklungszeiten, d.h. für nur zwei Anfall- bzw. Abwicklungsjahren, vorgestellt und mit Beispielen verdeutlicht. Im drauffolgendem Teil werden die gewonnenen Zusammenhänge auf n-reihige Abwicklungsdreiecke übertragen. Klemmt untersucht in seinem Artikel noch das Vorhandensein einer Hyperinflation bei Großschäden am Beispiel der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung. Auf diesen Teil werde ich nicht weiter eingehen.
Im letzten Teil dieses Abschnittes folgen weitere Untersuchungen bezüglich der globalen Chain-Ladder Schätzer und der Chain-Ladder Reserven. Diese Ausführungen bauen auf den beiden vorherigen Abschnitten bzw. auf dem Artikel von Klemmt auf.

3.2.1 Kleine Abwicklungsdreiecke

Ausgangspunkt seien zwei Abwicklungsdreiecke mit Schadenständen $S_{i,k}$ für die Anfalljahre $i = 0, 1$ und die Abwicklungsjahre $k = 0, 1$.
Hierbei sind $S^B_{i,k}$ die Schadenstände der Basisschäden und $S^G_{i,k}$ die Schadenstände der Großschäden:

[1]Vgl. Mack, S. 227
[2]Vgl. Wagner, S. 283 f.
[3]Vgl. Wagner, S. 316

Anfalljahr	Abwicklungsjahr	
	0	1
0	$S^B_{0,0}$	$S^B_{0,1}$
1	$S^B_{1,0}$	

Anfalljahr	Abwicklungsjahr	
	0	1
0	$S^G_{0,0}$	$S^G_{0,1}$
1	$S^G_{1,0}$	

Definition 3.2.1. [4] *Die Summe der mit Hilfe des Chain-Ladder Verfahrens ermittelten Endschadenstände der Basisschäden und der Großschäden*

$$D_{1,1} := S^B_{1,0} \cdot F^B_1 + S^G_{1,0} \cdot F^G_1$$

mit

$$F^B_1 := \frac{S^B_{0,1}}{S^B_{0,0}}$$

und

$$F^G_1 := \frac{S^G_{0,1}}{S^G_{0,0}}$$

nennt man ***Chain-Ladder Schätzer der differenzierten Vorgehensweise****.*

Beispiel:
Die folgenden Abwicklungsdreiecke enthalten die geleisteten Schadenzahlungen für Basisschäden und Großschäden

Basisschäden $S^B_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr	
	0	1
0	553	843
1	642	

Großschäden $S^G_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr	
	0	1
0	908	1753
1	1103	

[4] Vgl. Klemmt, S. 49, Gleichung (2)

Nun erfolgt die Berechnung des Chain-Ladder Schätzer der differenzierten Vorgehensweise:

$D_{1,1} = S^B_{1,0} \cdot \frac{S^B_{0,1}}{S^B_{0,0}} + S^G_{1,0} \cdot \frac{S^G_{0,1}}{S^G_{0,0}}$

$D_{1,1} = 642 \cdot \frac{843}{553} + 1103 \cdot \frac{1753}{908}$

$D_{1,1} \approx 3108$

Definition 3.2.2. [5] *Die Ermittlung des gesamten Endschadenstandes aus der Summe von Basisschäden und Großschäden mit Hilfe des Chain-Ladder Verfahrens*

$$A_{1,1} := (S^B_{1,0} + S^G_{1,0}) \cdot F^A_1$$

mit

$$F^A_1 := \frac{S^B_{0,1} + S^G_{0,1}}{S^B_{0,0} + S^G_{0,0}}$$

nennt man ***Chain-Ladder Schätzer der aggregierten Vorgehensweise****.*

Beispiel:
Im ersten Schritt erfolgt die Berechnung der Gesamtschäden, also die Addition der Basis- und Großschäden:

Gesamtschäden:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr	
	0	1
0	$S^B_{0,0}+S^G_{0,0}$	$S^B_{0,1}+S^G_{0,1}$
1	$S^B_{1,0}+S^G_{1,0}$	

Für unser Beispiel ergeben sich folgende Werte:

Gesamtschäden:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr	
	0	1
0	1461	2596
1	1745	

Im nächsten Schritt erfolgt die Berechnung des Chain-Ladder Schätzer der aggregierten Vorgehensweise:

[5] Vgl. Klemmt, S. 50, Gleichung (4)

$A_{1,1} = (S^B_{1,0} + S^G_{1,0}) \cdot \frac{S^B_{0,1}+S^G_{0,1}}{S^B_{0,0}+S^G_{0,0}}$

$A_{1,1} = 1745 \cdot \frac{2596}{1461}$

$A_{1,1} \approx 3101$

Bemerkung 3.2.1. *Der Sinn von $A_{1,1}$ und $D_{1,1}$ liegt in der Beurteilung der Qualität der Schätzung durch die differenzierende und aggregierende Methode.*

Definition 3.2.3. [6] *Wenn*

$$F^B_1 < F^G_1$$

$$\text{mit } F^B_1 := \frac{S^B_{0,1}}{S^B_{0,0}} \text{ und } F^G_1 := \frac{S^G_{0,1}}{S^G_{0,0}}$$

gilt, dann sei die ***Großschadenbedingung*** *erfüllt.*

Beispiel:
Für das Beispiel werden nun die Chain-Ladder Faktoren F^B_1 und F^G_1 berechnet.

$F^B_1 = \frac{S^B_{0,1}}{S^B_{0,0}} = \frac{843}{553} \approx 1,524$

$F^G_1 = \frac{S^G_{0,1}}{S^G_{0,0}} = \frac{1753}{908} \approx 1,931$

Es gilt 1,524 < 1,931 und somit ist die Großschadenbedingung erfüllt. Großschäden nehmen im Zeitablauf pro Abwicklungsjahr mehr zu als Basisschäden. Großschäden wachsen um 93 % und Basisschäden um 52 %.

Bemerkung 3.2.2. *Die Koeffizienten zeigen die Entwicklung der Basis- bzw. Großschäden über die Abwicklungsjahre.*
Nach Klemmt steigen in der Realität die Zahlungen für Großschäden über die Abwicklungsjahre an.

[6] Vgl. Klemmt, S. 50, Gleichung (3)

Definition 3.2.4. [7] *Wenn*

$$u_1 < v_1$$

$$\textit{mit } u_1 := \frac{S^B_{1,0}}{S^B_{0,0}} \textit{ und } v_1 := \frac{S^G_{1,0}}{S^G_{0,0}}$$

gilt, dann sei die ***Hyperinflationsbedingung*** *erfüllt.*

Beispiel:
Es werden nun die Faktoren u_1 und v_1 berechnet.

$u_1 = \frac{S^B_{1,0}}{S^B_{0,0}} = \frac{642}{553} \approx 1,161$

$v_1 = \frac{S^G_{1,0}}{S^G_{0,0}} = \frac{1103}{908} \approx 1,215$

Es gilt 1,161 < 1,215 und somit ist die Hyperinflationsbedingung erfüllt. Großschäden nehmen im Zeitablauf pro Anfalljahr mehr zu als Basisschäden. Großschäden wachsen um 21 % und Basisschäden um 16 %.

Bemerkung 3.2.3. *Die Koeffizienten zeigen die Entwicklung der Basis- bzw. Großschäden über die Anfalljahre.*
Klemmt untersucht das Vorhandensein der Hyperinflation in der Kraftfahrzeug - Haftpflichtversicherung zwischen den Jahren 1977 und 2002. Die Hyperinflationsbedingung wird in vier Jahren nicht erfüllt.

Proposition 3.2.1. [8] *Sei für Abwicklungsdreiecke mit zwei Anfall- und Abwicklungsjahren die Großschadenbedingung sowie die Hyperinflationsbedingung erfüllt, so gilt:*

$$D_{1,1} > A_{1,1}$$

[7] Vgl. Klemmt, S. 50, Gleichung (6)
[8] Vgl. Klemmt, S. 50 f.

Bemerkung 3.2.4. *Die Proposition besagt, dass beim Vorliegen einer Hyperinflation bei Großschäden und bei einer Aufteilung der Abwicklungsdreiecke nach Basis- und Großschäden, der Chain-Ladder Schätzer der differenzierten Methode größer ist als der Chain-Ladder Schätzer der aggregierten Methode.*

Beweis. Die Hyperinflationsbedingung $u_1 < v_1$ entspricht

$$\frac{S^B_{1,0}}{S^B_{0,0}} < \frac{S^G_{1,0}}{S^G_{0,0}}$$

$$S^B_{1,0} \cdot S^G_{0,0} - S^B_{0,0} \cdot S^G_{1,0} < 0$$

Die Großschadenbedingung $F^B_1 < F^G_1$ entspricht

$$\frac{S^B_{0,1}}{S^B_{0,0}} < \frac{S^G_{0,1}}{S^G_{0,0}}$$

$$S^B_{0,1} \cdot S^G_{0,0} - S^B_{0,0} \cdot S^G_{0,1} < 0$$

Daraus folgt

$$S^B_{0,1} \cdot S^G_{0,0} < S^B_{0,0} \cdot S^G_{0,1}$$

Multiplikation mit $(S^B_{1,0} \cdot S^G_{0,0} - S^B_{0,0} \cdot S^G_{1,0})$ ergibt

$$S^B_{0,1} \cdot S^G_{0,0} \cdot (S^B_{1,0} \cdot S^G_{0,0} - S^B_{0,0} \cdot S^G_{1,0}) > S^B_{0,0} \cdot S^G_{0,1} \cdot (S^B_{1,0} \cdot S^G_{0,0} - S^B_{0,0} \cdot S^G_{1,0})$$

$$S^B_{0,1} \cdot S^B_{1,0} \cdot (S^G_{0,0})^2 - S^B_{0,1} \cdot S^G_{0,0} \cdot S^B_{0,0} \cdot S^G_{1,0} > -S^G_{0,1} \cdot S^G_{1,0} \cdot (S^B_{0,0})^2 + S^G_{0,1} \cdot S^B_{0,0} \cdot S^G_{0,0} \cdot S^B_{1,0}$$

$$S^B_{0,1} \cdot S^B_{1,0} \cdot (S^G_{0,0})^2 + S^G_{0,1} \cdot S^G_{1,0} \cdot (S^B_{0,0})^2 > S^B_{0,1} \cdot S^G_{0,0} \cdot S^B_{0,0} \cdot S^G_{1,0} + S^G_{0,1} \cdot S^B_{0,0} \cdot S^G_{0,0} \cdot S^B_{1,0}$$

Division durch $S^B_{0,0} \cdot S^G_{0,0}$ ergibt

$$\frac{S^B_{0,1}}{S^B_{0,0}} \cdot S^B_{1,0} \cdot S^G_{0,0} + \frac{S^G_{0,1}}{S^G_{0,0}} \cdot S^B_{0,0} \cdot S^G_{1,0} > S^B_{0,1} \cdot S^G_{1,0} + S^G_{0,1} \cdot S^B_{1,0}$$

Addition von $S^B_{0,1} \cdot S^B_{1,0} + S^G_{1,0} \cdot S^G_{0,1}$ ergibt

$$\frac{S^B_{0,1}}{S^B_{0,0}} \cdot S^B_{1,0} \cdot S^G_{0,0} + \frac{S^G_{0,1}}{S^G_{0,0}} \cdot S^B_{0,0} \cdot S^G_{1,0} + S^B_{0,1} \cdot S^B_{1,0} + S^G_{1,0} \cdot S^G_{0,1} > S^B_{0,1} \cdot S^G_{1,0} + S^G_{0,1} \cdot S^B_{1,0} + S^B_{0,1} \cdot S^B_{1,0} + S^G_{1,0} \cdot S^G_{0,1}$$

$$S_{0,1}^{B} \cdot S_{1,0}^{B} + \frac{S_{0,1}^{B}}{S_{0,0}^{B}} \cdot S_{1,0}^{B} \cdot S_{0,0}^{G} + \frac{S_{0,1}^{G}}{S_{0,0}^{G}} \cdot S_{0,0}^{B} \cdot S_{1,0}^{G} + S_{1,0}^{G} \cdot S_{0,1}^{G} > (S_{0,1}^{B} + S_{0,1}^{G}) \cdot (S_{1,0}^{B} + S_{1,0}^{G})$$

$$(\frac{S_{0,1}^{B}}{S_{0,0}^{B}} \cdot S_{1,0}^{B} + \frac{S_{0,1}^{G}}{S_{0,0}^{G}} \cdot S_{1,0}^{G}) \cdot (S_{0,0}^{B} + S_{0,0}^{G}) > (S_{0,1}^{B} + S_{0,1}^{G}) \cdot (S_{1,0}^{B} + S_{1,0}^{G})$$

Division durch $(S_{0,0}^{B} + S_{0,0}^{G})$ ergibt

$$\frac{S_{0,1}^{B}}{S_{0,0}^{B}} \cdot S_{1,0}^{B} + \frac{S_{0,1}^{G}}{S_{0,0}^{G}} \cdot S_{1,0}^{G} > \frac{(S_{0,1}^{B} + S_{0,1}^{G}) \cdot (S_{1,0}^{B} + S_{1,0}^{G})}{(S_{0,0}^{B} + S_{0,0}^{G})}$$

$$S_{1,0}^{B} \cdot \frac{S_{0,1}^{B}}{S_{0,0}^{B}} + S_{1,0}^{G} \cdot \frac{S_{0,1}^{G}}{S_{0,0}^{G}} > (S_{1,0}^{B} + S_{1,0}^{G}) \cdot \frac{S_{0,1}^{B} + S_{0,1}^{G}}{S_{0,0}^{B} + S_{0,0}^{G}}$$

dies ist gleichbedeutend mit

$$D_{1,1} > A_{1,1}$$

$\square$

Beispiel:
In obigem Beispiel sind die Großschadenbedingung und die Hyperinflationsbedingung erfüllt und man erhält folgende Werte für die Chain-Ladder Schätzer:

$D_{1,1} = 3108$

$A_{1,1} = 3101$

Die differenzierte Methode, also die Aufgliederung der Dreiecke nach Basis- und Großschäden, führt zu einer höheren Schätzung.

3.2.2 Große Abwicklungsdreiecke

Die Zusammenhänge aus Kapitel 3.2.1 werden nun auf n-reihige Dreiecke übertragen. Hierzu wird der allgemeine Fall auf zweireihige Abwicklungsdreiecke zurückgeführt.

Ausgangspunkt sind zwei Abwicklungsdreiecke mit beobachtbaren Schadenständen $S_{i,k}$ für $i+k \leq n$ und $n > 1$.
Hierbei sind $S_{i,k}^B$ die Schadenstände der Basisschäden und $S_{i,k}^G$ die Schadenstände der Großschäden:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	n-i	...	n-1	n
0	$S_{0,0}^B$	$S_{0,1}^B$	...	$S_{0,k}^B$	...	$S_{0,n-i}^B$	...	$S_{0,n-1}^B$	$S_{0,n}^B$
1	$S_{1,0}^B$	$S_{1,1}^B$	...	$S_{1,k}^B$	...	$S_{1,n-i}^B$	...	$S_{1,n-1}^B$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}^B$	$S_{i,1}^B$	...	$S_{i,k}^B$	...	$S_{i,n-i}^B$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}^B$	$S_{n-k,1}^B$	...	$S_{n-k,k}^B$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}^B$	$S_{n-1,1}^B$							
n	$S_{n,0}^B$								

Anfalljahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	n-i	...	n-1	n
0	$S_{0,0}^G$	$S_{0,1}^G$	...	$S_{0,k}^G$	...	$S_{0,n-i}^G$	...	$S_{0,n-1}^G$	$S_{0,n}^G$
1	$S_{1,0}^G$	$S_{1,1}^G$	...	$S_{1,k}^G$	...	$S_{1,n-i}^G$	...	$S_{1,n-1}^G$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}^G$	$S_{i,1}^G$	...	$S_{i,k}^G$	...	$S_{i,n-i}^G$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}^G$	$S_{n-k,1}^G$	...	$S_{n-k,k}^G$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}^G$	$S_{n-1,1}^G$							
n	$S_{n,0}^G$								

Außerdem gelte für $i+k \leq n$

$$S_{i,k}^{GS} := S_{i,k}^B + S_{i,k}^G$$

$S_{i,k}^{GS}$ sind die Schadenstände der Gesamtschäden, also die Summe aus Basis- und Großschäden:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	n-i	...	n-1	n
0	$S_{0,0}^{GS} = S_{0,0}^{B} + S_{0,0}^{G}$	$S_{0,1}^{GS}$	...	$S_{0,k}^{GS}$	...	$S_{0,n-i}^{GS}$	...	$S_{0,n-1}^{GS}$	$S_{0,n}^{GS}$
1	$S_{1,0}^{GS} = S_{1,0}^{B} + S_{1,0}^{G}$	$S_{1,1}^{GS}$	...	$S_{1,k}^{GS}$	...	$S_{1,n-i}^{GS}$	...	$S_{1,n-1}^{GS}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}^{GS}$	$S_{i,1}^{GS}$	...	$S_{i,k}^{GS}$	...	$S_{i,n-i}^{GS}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}^{GS}$	$S_{n-k,1}^{GS}$	...	$S_{n-k,k}^{GS}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}^{GS}$	$S_{n-1,1}^{GS}$							
n	$S_{n,0}^{GS}$								

Beispiel:
Die folgenden Abwicklungsdreiecke mit $n = 3$ enthalten die geleisteten Schadenzahlungen für Basisschäden und Großschäden.

Basisschäden $S_{i,k}^{B}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	552	823	1029	1123
1	640	895	998	
2	729	910		
3	852			

Großschäden $S_{i,k}^{G}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	906	1852	2963	3985
1	1321	1998	2982	
2	1572	2322		
3	1982			

Hieraus ergeben sich dann die Schadenzahlungen der Gesamtschäden.

Gesamtschäden $S_{i,k}^{GS}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	1458=552+906	2675	3992	5108
1	1961=640+1321	2893	3980	
2	2301=729+1572	3232		
3	2834=852+1982			

Mit Hilfe der Chain-Ladder Faktoren für $k \in \{1, \dots, n\}$

$$F_k^B = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}^B}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}^B}$$

$$F_k^G = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}^G}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}^G}$$

$$F_k^{GS} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}^{GS}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}^{GS}}$$

wird auf die nicht beobachtbaren zukünftigen Schadenstände geschlossen (siehe Chain-Ladder Verfahren Kapitel 2.3). Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \{n-i+1, \dots, n\}$ werden die folgenden Schätzer berechnet:

$$\hat{S}_{i,k}^B = S_{i,n-i}^B \cdot \prod_{l=n-i+1}^{k} F_l^B = S_{i,n-i}^B \cdot F_{n-i+1}^B \cdot \ldots \cdot F_k^B$$

$$\hat{S}_{i,k}^G = S_{i,n-i}^G \cdot \prod_{l=n-i+1}^{k} F_l^G = S_{i,n-i}^G \cdot F_{n-i+1}^G \cdot \ldots \cdot F_k^G$$

$$\hat{S}_{i,k}^{GS} = S_{i,n-i}^{GS} \cdot \prod_{l=n-i+1}^{k} F_l^{GS} = S_{i,n-i}^{GS} \cdot F_{n-i+1}^{GS} \cdot \ldots \cdot F_k^{GS}$$

Definition 3.2.5. [9] *Wenn für alle $k \in \{1, \dots, n\}$*

$$F_k^B < F_k^G$$

$$\text{mit } F_k^B := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}^B}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}^B} \text{ und } F_k^G := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}^G}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}^G}$$

*gilt, dann sei die **Großschadenbedingung** erfüllt.*

[9] Vgl. Klemmt, S. 52, Gleichung (11)

Beispiel:
Für das Beispiel werden nun die Chain-Ladder Faktoren F_k^B und F_k^G für $k \in \{1,2,3\}$ berechnet.
Für die Basisschäden ergeben sich folgende Faktoren:

$$F_1^B = \frac{823 + 895 + 910}{552 + 640 + 729} \approx 1,368$$

$$F_2^B = \frac{1029 + 998}{823 + 895} \approx 1,180$$

$$F_3^B = \frac{1123}{1029} \approx 1,091$$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	552	823	1029	1123
1	640	895	998	
2	729	910		
3	852			
Chain-Ladder Faktoren		1,368	1,180	1,091

Für die Großschäden ergeben sich folgende Faktoren:

$$F_1^G = \frac{1852 + 1998 + 2322}{906 + 1321 + 1572} \approx 1,625$$

$$F_2^G = \frac{2963 + 2982}{1852 + 1998} \approx 1,544$$

$$F_3^G = \frac{3985}{2963} \approx 1,345$$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	906	1852	2963	3985
1	1321	1998	2982	
2	1572	2322		
3	1982			
Chain-Ladder Faktoren		1,625	1,544	1,345

Es gilt $1,368 < 1,625$; $1,180 < 1,544$ und $1,091 < 1,345$. Somit ist die Großschadenbedingung erfüllt.

Definition 3.2.6. [10] *Wenn für alle $k \in \{1, \dots, n\}$*

$$u_k < v_k$$

$$\textit{mit } u_k := \frac{S^B_{n-k+1,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^B_{l,k-1}} \textit{ und } v_k := \frac{S^G_{n-k+1,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^G_{l,k-1}}$$

*gilt, dann sei die **Hyperinflationsbedingung** erfüllt.*

Beispiel:
Für das Beispiel werden nun die Faktoren u_k und v_k für $k \in \{1, 2, 3\}$ berechnet.
Für die Basisschäden ergeben sich folgende Faktoren:

$$u_1 = \frac{852}{552 + 640 + 729} \approx 0,444$$

$$u_2 = \frac{910}{823 + 895} \approx 0,530$$

$$u_3 = \frac{998}{1029} \approx 0,970$$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	552	823	1029	1123
1	640	895	998	
2	729	910		
3	852			
Inflationskoeffizienten		0,444	0,530	0,970

Für die Großschäden ergeben sich folgende Faktoren:

$$v_1 = \frac{1982}{906 + 1321 + 1572} \approx 0,522$$

$$v_2 = \frac{2322}{1852 + 1998} \approx 0,603$$

$$v_3 = \frac{2982}{2963} \approx 1,006$$

[10] Vgl. Klemmt, S. 52, Gleichung (12)

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	906	1852	2963	3985
1	1321	1998	2982	
2	1572	2322		
3	1982			
Inflationskoeffizienten		0,522	0,603	1,006

Es gilt $0,444 < 0,522$; $0,530 < 0,603$ und $0,970 < 1,006$. Somit ist die Hyperinflationsbedingung erfüllt.

Definition 3.2.7. *Für alle zukünftigen Schadenstände, also für $i+k>n$ definiert man:*

$$D_{i,k} := \hat{S}^B_{i,k} + \hat{S}^G_{i,k}$$

Beispiel:
Für das Abwicklungsdreieck der Basisschäden und das der Großschäden werden nun mit Hilfe der Chain-Ladder Faktoren zunächst alle Chain-Ladder Schätzer $\hat{S}^B_{i,k}$ und $\hat{S}^G_{i,k}$ berechnet.

Basisschäden $S^B_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	552	823	1029	1123
1	640	895	998	**1089**
2	729	910	**1074**	**1172**
3	852	**1166**	**1375**	**1500**
Chain-Ladder Faktoren		1,368	1,180	1,091

Für das zweite Anfalljahr ergeben sich die Schätzer folgendermaßen:

$$\hat{S}^B_{2,2} = 910 \cdot 1,180 \approx 1074$$

$$\hat{S}^B_{2,3} = 910 \cdot 1,180 \cdot 1,091 \approx 1172$$

Großschäden $S_{i,k}^G$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr 0	1	2	3
0	906	1852	2963	3985
1	1321	1998	2982	**4011**
2	1572	2322	**3585**	**4822**
3	1982	**3221**	**4973**	**6688**
Chain-Ladder Faktoren		1,625	1,544	1,345

Hier ergeben sich die Chain-Ladder Schätzer für das zweite Anfalljahr wie folgt:

$$\hat{S}_{2,2}^G = 2322 \cdot 1,544 \approx 3585$$
$$\hat{S}_{2,3}^G = 2322 \cdot 1,544 \cdot 1,345 \approx 4822$$

Im nächsten Schritt werden zur Berechnung aller $D_{i,k}$ die Schätzer der Großschäden und die der Basisschäden addiert:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr 0	1	2	3
0				
1				1089+4011=5100
2			1074+3585=4659	1172+4822=5994
3		1166+3221=4387	1375+4973=6348	1500+6688=8188

Definition 3.2.8. *Für alle zukünftigen Schadenstände, also für $i + k > n$ definiert man:*

$$A_{i,k} := \hat{S}_{i,k}^{GS}$$

Beispiel:
Zur Berechnung der $A_{i,k}$ werden zunächst alle Chain-Ladder Faktoren benötigt.

$$F_1^{GS} = \frac{2675 + 2893 + 3232}{1458 + 1961 + 2301} \approx 1,538$$
$$F_2^{GS} = \frac{3992 + 3980}{2675 + 2893} \approx 1,432$$
$$F_3^{GS} = \frac{5108}{3992} \approx 1,280$$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	1458	2675	3992	5108
1	1961	2893	3980	
2	2301	3232		
3	2834			
Chain-Ladder Faktoren		1,538	1,432	1,280

Nun werden die Chain-Ladder Schätzer, also alle $A_{i,k}$, berechnet.

Gesamtschäden $S_{i,k}^{GS}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0	1458	2675	3992	5108
1	1961	2893	3980	**5094**
2	2301	3232	**4628**	**5924**
3	2834	**4359**	**6242**	**7989**
Chain-Ladder Faktoren		1,538	1,432	1,280

Für das zweite Anfalljahr ergeben sich die Chain-Ladder Schätzer wie folgt:

$$\hat{S}_{2,2}^{3} = 3232 \cdot 1,432 \approx 4628$$

$$\hat{S}_{2,3}^{3} = 3232 \cdot 1,432 \cdot 1,280 \approx 5924$$

Satz 3.2.1. [11] *Sei für Abwicklungsdreiecke mit $n > 1$, also mit mindestens drei Anfall- und Awicklungsjahren, die Großschadenbedingung und die Hyperinflationsbedingung erfüllt, so gilt für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{n - i + 1, \ldots, n\}$:*

$$D_{i,k} > A_{i,k}$$

Bemerkung 3.2.5. *Der Satz besagt, dass für die geschätzten Positionen im rechten unteren Abwicklungsdreieck die differenzierte Chain-Ladder Methode, also eine Trennung der Schadenzahlungen nach Basis- und Großschäden, einen höheren Wert liefert als die herkömmliche aggregierte Methode, bei der Basis- und Großschäden zusammengefasst sind. Voraussetzung ist das Vorhandensein einer Hyperinflation bei den Großschäden.*

[11] Vgl. Klemmt, S. 53, Gleichung (15); Notationsfehler: k=n+2-i, . . . , n

Beweis. Zur Entlastung der Notation werden die Schätzer auch mit $S_{i,k}$ bezeichnet. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt. Zunächst wird gezeigt, dass für
$i \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{n-i+1, \ldots, n\}$ gilt:

$$D_{i,k} > D_{i,k-1} \cdot F_k^{GS} \tag{1}$$

Im zweiten Schritt wird dann gezeigt, dass gilt:

$$D_{i,k} > A_{i,k} \tag{2}$$

Beginnen wir mit dem Ersten Teil:

Hierfür sei ein i mit $1 \leq i \leq n$ und ein k mit $n-i+1 \leq k \leq n$ gegeben. Um die Ergebnisse aus dem Abschnitt 3.2.1 anwenden zu können, werden folgende zweireihige Matrizen betrachtet:

$$\begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B & \sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k}^B \\ S_{i,k-1}^B & S_{i,k}^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^G & \sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k}^G \\ S_{i,k-1}^2 & S_{i,k}^G \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen erfüllen die Großschadenbedingung, denn es gilt:

$$\frac{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B} = F_k^B \underset{\text{n.Vor.}}{<} F_k^G = \frac{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k}^G}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^G}$$

Nun wird gezeigt, dass diese Matrizen auch die Hyperinflationsbedingung erfüllen. Folgende Umformungen werden zunächst für die erste Matrix gezeigt:

$$\frac{S_{i,k-1}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B} = \frac{S_{i,n-i}^B \cdot F_{n-i+1}^B \cdot F_{n-i+2}^B \cdot \ldots \cdot F_{k-1}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B}$$

Im nächsten Schritt werden die Chain-Ladder Faktoren F_k^B ersetzt durch $\frac{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B}$

$$\begin{aligned}
\frac{S_{i,k-1}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B} &= \frac{S_{i,n-i}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B} \cdot \frac{\sum_{l=0}^{i-1} S_{l,n-i+1}^B}{\sum_{l=0}^{i-1} S_{l,n-i}^B} \cdot \frac{\sum_{l=0}^{i-2} S_{l,n-i+2}^B}{\sum_{l=0}^{i-2} S_{l,n-i+1}^B} \cdot \ldots \cdot \frac{\sum_{l=0}^{n-k+1} S_{l,k-1}^B}{\sum_{l=0}^{n-k+1} S_{l,k-2}^B} \\
&= \frac{S_{i,n-i}^B}{\sum_{l=0}^{i-1} S_{l,n-i}^B} \cdot \frac{\sum_{l=0}^{i-1} S_{l,n-i+1}^B}{\sum_{l=0}^{i-2} S_{l,n-i+1}^B} \cdot \ldots \cdot \frac{\sum_{l=0}^{n-k+1} S_{l,k-1}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B} \\
&= u_{n-i+1} \cdot \frac{S_{i-1,n-i+1}^B + \sum_{l=0}^{i-2} S_{l,n-i+1}^B}{\sum_{l=0}^{i-2} S_{l,n-i+1}^B} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{n-k+1,k-1}^B + \sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B} \\
&= u_{n-i+1} \cdot \left(\frac{S_{i-1,n-i+1}^B}{\sum_{l=0}^{i-2} S_{l,n-i+1}^B} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{S_{n-k+1,k-1}^B}{\sum_{l=0}^{n-k} S_{l,k-1}^B} + 1\right) \\
&= u_{n-i+1} \cdot (u_{n-i+2} + 1) \cdot \ldots \cdot (u_k + 1)
\end{aligned}$$

Analoge Umformungen führen bei der zweiten Matrix zum entsprechenden Ergebnis:

$$\frac{S^G_{i,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^G_{l,k-1}} = v_{n-i+1} \cdot (v_{n-i+2}+1) \cdot \ldots \cdot (v_k+1)$$

Mit Hilfe dieser Umformungen kann man zeigen, dass gilt:

$$\frac{S^B_{i,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^B_{l,k-1}} < \frac{S^G_{i,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^G_{l,k-1}}$$

Da $u_j < v_j \ \forall\ j \in \{1,\ldots,n\}$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} u_{n-i+1} &< v_{n-i+1} \\ \Rightarrow u_{n-i+1} \cdot (u_{n-i+2}+1) &< v_{n-i+1} \cdot (v_{n-i+2}+1) \\ \Rightarrow u_{n-i+1} \cdot (u_{n-i+2}+1) \cdot \ldots \cdot (u_k+1) &< v_{n-i+1} \cdot (v_{n-i+2}+1) \cdot \ldots \cdot (v_k+1) \\ \Rightarrow \frac{S^B_{i,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^B_{l,k-1}} &< \frac{S^G_{i,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^G_{l,k-1}} \end{aligned}$$

Hiermit wurde nun gezeigt, dass sowohl Großschadenbedingung als auch Hyperinflationsbedingung für die zweireihigen Matrizen erfüllt sind. Somit können nun die Überlegungen aus dem Kapitel 3.2.1 angewendet werden, d.h. es gilt für $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $k \in \{n-i+1,\ldots,n\}$:

$$\begin{aligned} S^B_{i,k} + S^G_{i,k} &> (S^B_{i,k-1} + S^G_{i,k-1}) \cdot F^{GS}_k \\ D_{i,k} &> D_{i,k-1} \cdot F^{GS}_k \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum zweiten Schritt und zeigen, dass für $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $k \in \{n-i+1,\ldots,n\}$ gilt:

$$D_{i,k} > A_{i,k}$$

Der Beweis wird mit Hilfe vollständiger Induktion über den Spaltenindex k gezeigt.

Induktionsanfang: $k = n-i+1$
Nach (1) gilt:

$$S^B_{i,n-i+1} + S^G_{i,n-i+1} > (S^B_{i,n-i} + S^G_{i,n-i}) \cdot F^{GS}_{n-i+1}$$

Da $S^B_{i,n-i}$ und $S^G_{i,n-i}$ auf der Hauptdiagonale des Abwicklungsdreiecks liegen und somit keine Schätzer sind gilt:

$$S^B_{i,n-i} + S^G_{i,n-i} = S^{GS}_{i,n-i}$$

Daraus folgt

$$S^B_{i,n-i+1} + S^G_{i,n-i+1} > (S^B_{i,n-i} + S^G_{i,n-i}) \cdot F^{GS}_{n-i+1} = S^{GS}_{i,n-i} \cdot F^{GS}_{n-i+1} = S^{GS}_{i,n-i+1}$$

Somit ist (2) erfüllt für $k = n - i + 1$.

Induktionsannahme: (2) sei erfüllt für $k = l \in \{n - i + 2, \ldots, n - 1\}$

Induktionsschritt: Zu zeigen ist, dass (2) für $k = l + 1$ gilt.
Nach (1) gilt:

$$\begin{aligned} S^B_{i,l+1} + S^G_{i,l+1} &> (S^B_{i,l+1-1} + S^G_{i,l+1-1}) \cdot F^{GS}_{l+1} \\ S^B_{i,l+1} + S^G_{i,l+1} &> (S^B_{i,l} + S^G_{i,l}) \cdot F^{GS}_{l+1} \end{aligned}$$

Die Induktionsannahme besagt, dass (2) erfüllt ist für l. Dies bedeutet:

$$S^B_{i,l} + S^G_{i,l} > S^{GS}_{i,l}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} S^B_{i,l+1} + S^G_{i,l+1} &> (S^B_{i,l} + S^G_{i,l}) \cdot F^{GS}_{l+1} > S^{GS}_{i,l} \cdot F^{GS}_{l+1} \\ \Rightarrow S^B_{i,l+1} + S^G_{i,l+1} &> S^{GS}_{i,l} \cdot F^{GS}_{l+1} \\ \Rightarrow S^B_{i,l+1} + S^G_{i,l+1} &> S^{GS}_{i,l+1} \\ \Rightarrow D_{i,l+1} &> A_{i,l+1} \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel:
Für unser Beispiel wurde gezeigt, dass die Großschadenbedingung und die Hyperinflationsbedingung erfüllt ist.
Satz 3.2.1 besagt, dass für die zukünftigen Schadenstände (rechtes unteres Dreieck) die Summe aus Schätzer der Basisschäden und Schätzer der Großschäden größer ist als die berechneten Chain-Ladder Schätzer der Gesamtschäden.
Es ergaben sich folgende Werte für das Beispiel:

$A_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0				
1				5094
2			4628	5924
3		4359	6242	7989

$D_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0				
1				5100
2			4659	5994
3		4387	6348	8188

Es ist also zu erkennen, dass die differenzierte Methode höhere Chain-Ladder Schätzer liefert, als die aggregierte Methode.

3.2.3 Eigene Untersuchungen zu globalen Schätzern und Reserven

Im folgenden Abschnitt erfolgen weiterführende Untersuchungen bezüglich des Verhaltens der globalen Chain-Ladder Schätzer und der Chain-Ladder Reserven bei der differenzierten und der aggregierten Vorgehensweise.

Definition 3.2.9. *Die Summe über alle $D_{i,k}$ wird wie folgt definiert:*

$$D := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n-i+1}^{n} D_{i,k}$$

Definition 3.2.10. *Die Summe über alle $A_{i,k}$ wird wie folgt definiert:*

$$A := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n-i+1}^{n} A_{i,k}$$

Bemerkung 3.2.6. *D und A werden auch als* ***globale Chain-Ladder Schätzer der differenzierten bzw. der aggregierten Methode*** *bezeichnet.*

Korollar 3.2.1. *Für D und A gilt:*

$$D > A$$

Beweis. $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$ und $k \in \{n-i+1,\ldots,n\}$ gilt:

$$D_{i,k} > A_{i,k}$$

Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n-i+1}^{n} D_{i,k} > \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n-i+1}^{n} A_{i,k}$$
$$D > A$$

□

Beispiel:
Für unser Beispiel wird nun jeweils die Summe über alle $D_{i,k}$ und $A_{i,k}$ gebildet:

$D_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0				
1				5100
2			4659	5994
3		4387	6348	8188

$D = 5100 + 4659 + 5994 + 4387 + 6348 + 8188 = 34676$

$A_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr			
	0	1	2	3
0				
1				5094
2			4628	5924
3		4359	6242	7989

$A = 5094 + 4628 + 5924 + 4359 + 6242 + 7989 = 34236$

Auch die globalen Chain-Ladder Schätzer sind bei der differenzierten Vorgehensweise höher als bei der aggregierten.

Definition 3.2.11. *Die Differenz für alle* $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$\hat{R}_i^D := (\hat{S}_{i,n}^B + \hat{S}_{i,n}^G) - (S_{i,n-i}^B + S_{i,n-i}^G)$$

nennt man ***lokale Chain-Ladder Reserve der differenzierten Vorgehensweise****.*

Definition 3.2.12. *Die Differenz für alle* $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\hat{R}_i^A := \hat{S}_{i,n}^{GS} - (S_{i,n-i}^B + S_{i,n-i}^G)$$

nennt man ***lokale Chain-Ladder Reserve der aggregierten Vorgehensweise****.*

Korollar 3.2.2. *Für alle* R_i^D *und* R_i^A *mit* $i \in \{1, \dots, n\}$ *gilt:*

$$R_i^D > R_i^A$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass gilt:

$$(\hat{S}_{i,n}^B + \hat{S}_{i,n}^G) - (S_{i,n-i}^B + S_{i,n-i}^G) > \hat{S}_{i,n}^{GS} - (S_{i,n-i}^B + S_{i,n-i}^G)$$

Addition von $(S_{i,n-i}^B + S_{i,n-i}^G)$ ergibt

$$\hat{S}_{i,n}^B + \hat{S}_{i,n}^G > \hat{S}_{i,n}^{GS}$$
$$D_{i,n} > A_{i,n}$$

und dies gilt nach Satz 3.2.1. □

Beispiel:
Nun werden für unser Beispiel die Reserven berechnet.

$D_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr 0	1	2	3	R_i^D
0				5108	-
1			3980	5100	5100-3980=1120
2		3232		5994	5994-3232=2762
3	2834			8188	8188-2834=5354

$A_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr 0	1	2	3	R_i^A
0				5108	-
1			3980	5094	5094-3980=1114
2		3232		5924	5924-3232=2692
3	2834			7989	7989-2834=5155

Hier sieht man, dass die lokalen Chain-Ladder Reserven bei der differenzierten Vorgehnsweise höher sind als bei der aggregierten Vorgehensweise.

Definition 3.2.13. *Die Summe über alle* R_i^D

$$R^D := \sum_{i=1}^{n} R_i^D$$

nennt man ***globale Chain-Ladder Reserve der differenzierten Vorgehensweise****.*

Definition 3.2.14. *Die Summe über alle* R_i^A

$$R^A := \sum_{i=1}^{n} R_i^A$$

nennt man ***globale Chain-Ladder Reserve der aggregierten Vorgehensweise****.*

Korollar 3.2.3. *Für alle* R^D *und* R^A *gilt:*

$$R^D > R^A$$

Beweis. $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$R_i^D > R_i^A$$

und somit gilt auch

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^D > \sum_{i=1}^{n} R_i^A$$
$$R^D > R^A$$

$\square$

Beispiel:
Es folgt die Berechnung der globalen Chain-Ladder Reserven.

$D_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr				R_i^D
	0	1	2	3	
0				5108	-
1			3980	5100	1120
2		3232		5994	2762
3	2834			8188	5354
R^D					9237

$R^D = 1120 + 2762 + 5354 = 9236$

$A_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr				R_i^A
	0	1	2	3	
0				5108	-
1			3980	5094	1114
2		3232		5924	2692
3	2834			7989	5155
R^A					8967

$R^A = 1114 + 2692 + 5155 = 8961$

Die globale Chain-Ladder Reserve ist bei der differenzierten Vorgehensweise höher als bei der aggregierten Methode. Ein Versicherungsunternehmen müsste bei dieser Methode also eine um 275 höhere Rückstellung bilden.

Kapitel 4

Additivität von Chain-Ladder Schätzern

Klemmt verweist in seinem Artikel auf den Aufsatz „Additivity of Chain-Ladder Projections" von Björn Ajne, der ähnlichen Fragestellungen nachgeht.

Ajne führt in seinem Artikel Bedingungen an, welche gelten müssen, damit die aggregierende und die differenzierende Methode gleiche bzw. unterschiedliche Ergebnisse für die Endschadenstände liefert. Die Aussage von Klemmt, unter welchen Bedingungen die differenzierte Methode einen höheren Schätzwert liefert als die aggregierte, kann mit den Bedingungen von Ajne allerdings nicht gezeigt werden.[1]

Im Folgenden werde ich auf die Voraussetzungen für Ungleichheit der Endschadenstände eingehen, da nur diese im Zusammenhang mit dem Aufsatz von Klemmt eine Rolle spielen.

Die Ausführungen dieses Kapitels basieren auf dem Aufsatz von Ajne. Der Beweis des Satzes 4.2.1 wird nicht ausgeführt. Ajne führt den Beweis auf Grundlage des Beweises der Gleichheit der beiden Methoden. Aus diesem Grund müssten beide Beweise ausgearbeitet werden, womit der Umfang dieser Arbeit deutlich überschritten würde.

4.1 Verbindung zum Aufsatz von Ajne

Im folgenden Abschnitt wird die Notation von Ajne mit der Notation meiner Arbeit verbunden.

Ajne untersucht die Additivität der Chain-Ladder Schätzer der Endschadenstände, also die Schätzer der letzten Spalte des Abwicklungsdreiecks. Ausgangspunkt hierfür sind, wie auch bei Klemmt, zwei Abwicklungsdreiecke C und D, die sich auf zwei unterschiedliche Bestände einer Sparte beziehen, sowie das Abwicklungsdreieck E, welches die Summe der Abwicklungsdreiecke C und D darstellt. Nach Ajne sind $C(i,j)$ und $D(i,j)$ die Schadenstände der beiden Abwicklungsdreiecke und $E(i,j) = C(i,j) + D(i,j)$ die Schadenstände des zusammenge-

[1] Vgl. Klemmt, S. 54

fassten Dreiecks. [2] Hierbei bezeichnet i das Anfalljahr und j das Abwicklungsjahr, beide laufen von 0 bis n. Das Dreieck D mache ich vergleichbar mit dem Abwicklungsdreieck der Basisschäden und C mit dem Abwicklungsdreieck der Großschäden. Das Dreieck E ist somit übereinstimmend zum Abwicklungsdreieck der Gesamtschäden.

Zum Beispiel hat das zusammengefasste Abwicklungsdreieck nach Ajne folgende Gestalt:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	$E(0,0)$	...	...	$E(0,j)$	...	...	...	$E(0,n-1)$	$E(0,n)$
1	$E(1,0)$	...	...	$E(1,j)$	...	...	...	$E(1,n-1)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$E(i,0)$	...	...	$E(i,j)$	...	...			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-j$	$E(n-j,0)$	...	...	$E(n-j,j)$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$E(n-1,0)$	...							
n	$E(n,0)$								

Dieses ist vergleichbar zum Abwicklungsdreieck der Gesamtschäden:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	n-i	...	n-1	n
0	$S_{0,0}^{GS}$	$S_{0,1}^{GS}$	...	$S_{0,k}^{GS}$	...	$S_{0,n-i}^{GS}$	...	$S_{0,n-1}^{GS}$	$S_{0,n}^{GS}$
1	$S_{1,0}^{GS}$	$S_{1,1}^{GS}$	...	$S_{1,k}^{GS}$	...	$S_{1,n-i}^{GS}$	...	$S_{1,n-1}^{GS}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}^{GS}$	$S_{i,1}^{GS}$	...	$S_{i,k}^{GS}$	...	$S_{i,n-i}^{GS}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}^{GS}$	$S_{n-k,1}^{GS}$	...	$S_{n-k,k}^{GS}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}^{GS}$	$S_{n-1,1}^{GS}$							
n	$S_{n,0}^{GS}$								

[2] Vgl. Ajne, S. 311 f.

Ajne schreibt die Abwicklungsdreiecke mit Hilfe des Chain-Ladder Verfahrens fort. Hierfür definiert er für das Abwicklungsdreieck C die Chain-Ladder Faktoren für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ wie folgt:[3]

$$f(j) := \frac{\sum_{k=0}^{n-j} C(k,j)}{\sum_{k=0}^{n-j} C(k,j-1)}$$

Analog erfolgt die Berechnung auch für die Dreiecke D und E. In meiner Arbeit sind die Chain-Ladder Faktoren als F_k^B für Basisschäden, F_k^G für Großschäden und F_k^{GS} für Gesamtschäden definiert:

$$F_k^B = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}^B}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}^B}$$

$$F_k^G = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}^G}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}^G}$$

$$F_k^{GS} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}^{GS}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}^{GS}}$$

Für die weiteren Überlegungen benötigt Ajne folgende Größe:[4]

$$U(n-i) := \frac{1}{f(n-i+1) \cdot f(n-i+2) \cdot \ldots \cdot f(n)} \quad \text{für } n-i = 0, \ldots, n-1$$

Analog definiert Ajne für das Abwicklungsdreieck D die Größe V.[5] Sei dafür

$$g(j) := \frac{\sum_{k=0}^{n-j} D(k,j)}{\sum_{k=0}^{n-j} D(k,j-1)} \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}$$

Und somit

$$V(n-i) := \frac{1}{g(n-i+1) \cdot g(n-i+2) \cdot \ldots \cdot g(n)} \quad \text{für } n-i = 0, \ldots, n-1$$

Um zu zeigen, dass die differenzierende Methode höhere bzw. gleiche Endschadenstände liefert als die aggregierende Methode, verwendet Ajne zwei Bedingungen. Ziel der folgenden Ausführungen ist es nun, die zwei Bedingungen der Notation und Argumentation von Klemmt anzupassen, d.h. eine entsprechende Großschadenbedingung und Hyperinflationsbedingung zu formulieren.

Die erste Bedingung von Ajne, die er mit „...that subportfolio C is at least as long-tailed as subportfolio D ...“[6] charakterisiert, lautet für alle positiven i:[7]

$$U(n-i) \leq V(n-i) \tag{3}$$

[3] Vgl. Ajne, S. 312, Gleichung (1)
[4] Vgl. Ajne, S. 312, Gleichung (3)
[5] Vgl. Ajne, S. 313
[6] Vgl. Ajne, S. 315
[7] Vgl. Ajne, S. 315, Gleichung (20)

Ziel ist es nun $U(n-i)$ und $V(n-i)$ zu ersetzen. (3) bedeutet

$$\frac{1}{f(n-i+1)\cdot f(n-i+2)\cdot\ldots\cdot f(n)} \leq \frac{1}{g(n-i+1)\cdot g(n-i+2)\cdot\ldots\cdot g(n)}$$

Da alle $f(j)$ und $g(j)$ positive Zahlen sind, folgt

$$g(n-i+1)\cdot g(n-i+2)\cdot\ldots\cdot g(n) \leq f(n-i+1)\cdot f(n-i+2)\cdot\ldots\cdot f(n)$$

Ich setze nun:

$$m := n-i$$

Somit gilt für alle $m \in \{0,\ldots,n-1\}$

$$g(m+1)\cdot g(m+2)\cdot\ldots\cdot g(n) \leq f(m+1)\cdot f(m+2)\cdot\ldots\cdot f(n)$$

Zum Vergleich nun nochmal die Großschadenbedingung nach Klemmt. Hier gilt für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$:

$$F_k^B < F_k^G$$

Nun folgt die erste Bedingung nach Ajne entsprechend der Notation meiner Arbeit:

Definition 4.1.1. *Wenn für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$*

$$F_k^B \cdot F_{k+1}^B \cdot \ldots \cdot F_n^B \leq F_k^G \cdot F_{k+1}^G \cdot \ldots \cdot F_n^G$$

*gilt, dann sei die **Großschadenbedingung nach Ajne** erfüllt.*

Die zweite Bedingung von Ajne lautet für alle positiven i:[8]

$$\frac{C(i,n)}{C(i-1)} \leq \frac{D(i,n)}{D(i-1)} \tag{4}$$

mit $C(i-1) := \sum_{k=0}^{i-1} C(k,n)$ und $D(i-1) := \sum_{k=0}^{i-1} D(k,n)$

[8] Vgl. Ajne, S. 313/ S. 315, Gleichung (6) und Gleichung (21)

Mit Hilfe der Bedingung (4) zeigt Ajne, dass die differenzierende Methode kleinere bzw. gleiche Schätzwerte wie die aggregierende Methode liefert. Da Klemmt dies in seinem Artikel nicht untersucht, gehe ich hierauf nicht weiter ein. Ajne kehrt das Ungleichheitszeichen in Bedingung (4) um, damit er zeigen kann, dass die differenzierte Vorgehensweise mindestens so große Schätzwerte liefert wie die aggregierte Vorgehensweise:

$$\frac{C(i,n)}{C(i-1)} \geq \frac{D(i,n)}{D(i-1)}$$

$$\frac{D(i,n)}{D(i-1)} \leq \frac{C(i,n)}{C(i-1)} \tag{5}$$

Aus (5) folgt somit:

$$\frac{D(i,n)}{\sum_{k=0}^{i-1} D(k,n)} \leq \frac{C(i,n)}{\sum_{k=0}^{i-1} C(k,n)}$$

Man erhält nun im Vergleich zu Klemmt eine leicht veränderte Hyperinflationsbedingung. Ajne spricht nicht von Hyperinflation, sondern von „increases at least as fast".[9] Im Folgenden die Definition entsprechend der Notation meiner Arbeit:

Definition 4.1.2. *Wenn für alle* $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\hat{S}^B_{i,n}}{\sum_{l=0}^{i-1} \hat{S}^B_{l,n}} \leq \frac{\hat{S}^G_{i,n}}{\sum_{l=0}^{i-1} \hat{S}^G_{l,n}}$$

gilt, dann sei die ***Hyperinflationsbedingung nach Ajne*** *erfüllt.*

Nach der Hyperinflationsbedingung von Klemmt gilt für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$u_k < v_k$$

$$\text{mit } u_k = \frac{S^B_{n-k+1,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^B_{l,k-1}} \text{ und } v_k = \frac{S^G_{n-k+1,k-1}}{\sum_{l=0}^{n-k} S^G_{l,k-1}}$$

4.2 Aussage von Ajne

Im vierten Abschnitt seines Aufsatzes, untersucht Ajne die Ungleichheit der Ergebnisse für die Endschadenstände der differenzierenden und der aggregierenden Vorgehensweise. Hier analysiert er, unter welchen Bedingungen die aggregierende Methode größere oder kleinere bzw. gleiche Schätzwerte für die Endschadenstände liefert. Klemmt hingegen untersucht nur, wann die differenzierte Methode größere Schätzwerte liefert als die aggregierte Methode. Aus

[9] Vgl. Ajne, S. 315

diesem Grund gehe ich im Folgenden nur hierauf ein.

Satz 4.2.1. *Sei die Großschadenbedingung und Hyperinflationsbedingung nach Ajne erfüllt, so gilt für* $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$D_{i,n} \geq A_{i,n}$$

Bemerkung 4.2.1. *Unter der Voraussetzung, dass die Großschadenbedingung und die Hyperinflationsbedingung nach Ajne erfüllt ist, sind die geschätzten Endschadenstände nach der differenzierenden Vorgehnsweise mindestens genauso groß wie nach der aggregierenden Vorgehensweise. Klemmt zeigt darüber hinaus im Satz 3.2.1:*

$$D_{i,k} > A_{i,k} \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } k \in \{n-i+1, \ldots, n\}$$

Klemmt hat also die Aussage von Ajne verschärft und nicht nur für die Endschadenstände gezeigt, sondern für alle Schätzwerte.

4.3 Unterschiede Klemmt und Ajne

Ausgangspunkt bei Klemmt sind zwei Abwicklungsdreiecke, welche nach Basis- und Großschäden aufgeteilt sind. Ajne hingegen spricht nicht von solch einer Aufteilung. Er untersucht die Additivität der Chain-Ladder Schätzer der Endschadenstände, während Klemmt die Additivität aller Chain-Ladder Schätzer analysiert.

Ajne zeigt die Gleichheit und Ungleichheit der Schätzer der beiden Methoden, während Klemmt es um eine scharfe Aussage geht: Unter welchen Bedingungen liefert die differenzierende Methode einen höheren Schätzwert als die aggregierende.

Die Voraussetzungen für die Aussagen sind bei Klemmt und Ajne ähnlich. Die Hyperinflationsbedingung bezieht sich bei Ajne nur auf die letzte Spalte des Abwicklungsdreiecks, während Klemmt die Inflationskoeffizienten für jedes Abwicklungsjahr betrachtet. Anstelle einer „separierten“ Großschadenbedingung, beinhaltet die Großschadenbedingung nach Ajne eine Multiplikation aller Chain-Ladder Faktoren.

Wenn anstatt der Hyperinflationsbedingung nach Ajne die Hyperinflationsbedingung von Klemmt erfüllt ist, wird die Aussage von Ajne (Satz 4.2.1) verschärft. Dann würde für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gelten:

$$D_{i,n} > A_{i,n}$$

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es die Aussagen des Artikels „Separierung von Abwicklungsdreiecken nach Basis- und Großschäden“ von Heinz-Jürgen Klemmt deutlicher darzustellen und mit Beispielen zu erläutern. Hierbei war der Aufsatz „Additivity of Chain-Ladder Projections“ von Björn Ajne zu berücksichtigen, da Klemmt ihn in seinem Artikel verwendet.

Nach der Erläuterung einer lang andauernden Schadenabwicklung und der Vorstellung des Chain-Ladder Verfahrens folgten die Ausführungen des Artikels von Klemmt. In seinem Aufsatz untersucht Klemmt das Verhalten der Chain-Ladder Schätzer, wenn ein Abwicklungsdreieck nach Basis- und Großschäden getrennt wird. Diese Dreiecke wurden dann mit Hilfe des Chain-Ladder Verfahrens fortgeschrieben, um daraufhin die Schätzer der differenzierten Methode, also der getrennten Dreiecke, mit den Schätzern der aggregierten Methode, also des zusammengefassten Dreiecks, zu vergleichen. Klemmt beweist, dass die differenzierende Methode immer größere Schätzer liefert als die aggregierende Methode, wenn die Großschäden einer Hyperinflation unterliegen. Dies wurde zuerst für kleine und dann mit Hilfe dieser gewonnen Zusammenhänge auch für große Abwicklungsdreiecke gezeigt.

Daraufhin wurden von mir weitere Untersuchungen bezüglich der globalen Chain-Ladder Schätzer, also der Summe aller zukünftigen Schadenstände, und der Chain-Ladder Reserven vorgenommen. Auch hier zeigte sich, dass die Reserven und die globalen Schätzer bei der differenzierten Methode immer größer sind als bei der aggregierten Methode. Voraussetzung ist hier auch das Vorliegen einer Hyperinflation bei Großschäden.

Im letzten Schritt wurde auf den Artikel „Additivity of Chain-Ladder Projections“ von Björn Ajne eingegangen. Klemmt nimmt in seinem Artikel Bezug auf den Aufsatz von Ajne, da hier ähnlichen Fragestellungen nachgegangen wird. Zuerst wurde hier die Notation von Ajne mit der Notation von meiner Arbeit verbunden, um daraufhin Vergleiche zwischen den beiden Artikeln zu ziehen. Ajne untersucht das Verhalten der geschätzten Endschadenstände bei der differenzierten und aggregierten Methode. Auch hier wurde festgestellt, dass die Endschadenstände der differenzierten Methode größer sind als die Endschadenstände der aggregierten Methode. Im Vergleich zu Klemmt ist hier eine leicht veränderte Großschaden- und Hyperinflationsbedingung Voraussetzung. Neben der Ungleichheit der Endschadenstände analysiert

Ajne auch die Gleichheit, auf welche hier nicht weiter eingegangen wurde.

Ausgehend von meiner Arbeit würde sich nun die Frage stellen, unter welchen Voraussetzungen die differenzierende Vorgehensweise kleinere Chain-Ladder Schätzer als die aggregierende Vorgehensweise liefern würde. Ist es überhaupt möglich, dass die differenzierte Methode zu echt kleineren Schätzern führt?

Literaturverzeichnis

Verzeichnis der selbstständigen Literaturquellen

[1] Mack, Thomas. *Schadenversicherungsmathematik*. 2. Aufl. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 2002.

[2] Radtke, Michael und Klaus D. Schmidt. *Handbuch zur Schadenreservierung*. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 2004.

[3] Schmidt, Klaus D. *Versicherungsmathematik*. 2. Aufl. Berlin: Springer, 2006.

[4] Wagner, Fred, Hg. *Gabler Versicherungslexikon*. Wiesbaden: Gabler, 2011.

[5] Wolfsdorf, Kurt. *Versicherungsmathematik. Teil 2: Theoretische Grundlagen, Risikotheorie, Sachversicherung*. Stuttgart: Teubner, 1988.

Verzeichnis der unselbstständigen Literaturquellen

[6] Ajne, Björn. „Additivity of Chain-Ladder Projections“. *Astin Bulletin*. 2 **24** (1994): S. 311-318.

[7] Klemmt, Heinz-Jürgen. „Separierung von Abwicklungsdreiecken nach Basis- und Großschäden“. *Blätter der DGVFM*. 1 **27** (2005): S. 49-58

Technische Hochschule Mittelhessen

Campus Friedberg
Wilhelm-Leuschner-Str. 13
61169 Friedberg

www.thm.de