

Friedberger Hochschulschriften

Manfred Börgens

Computer Aided Quality

Statistische Verfahren und optimierte Prüfmethodik

Friedberger Hochschulschriften Nr. 13

© Manfred Börgens

Friedberger Hochschulschriften

Herausgeber:

Die Dekane der Fachbereiche des Bereichs Friedberg der FH Gießen-Friedberg

Wilhelm-Leuschner-Straße 13, 61169 Friedberg

<http://www.fh-friedberg.de>

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Friedberg 2002

ISSN 1439-1112

Computer Aided Quality

Statistische Verfahren und optimierte Prüfmethodik

Vortrag auf dem 2. Friedberger Blechtag 6.9.2001

Professor Dr. Manfred Börgens
University of Applied Sciences FH Gießen-Friedberg

Zusammenfassung

Es werden zwei methodische Ansätze vorgestellt, die dem QS-Ingenieur eine optimierte Anpassung gängiger CAQ-Verfahren an die betrieblichen Bedingungen erlauben. Zum einen ist dies die Berechnung von Kennwerten für die **Prozessfähigkeit für nicht-normalverteilte Messwerte**. Zum anderen wird ein Verfahren vorgestellt, das eine **kostenminimale Stichprobennahme** ermöglicht.

Abstract

This paper presents two Quality Engineering methods designed for an optimized adaptation of current CAQ procedures to internal company conditions. First, **process capability indices for non-normal measurement distributions** are calculated. Then a procedure for **cost minimizing sampling** is proposed.

1. Prozessfähigkeit

Als Standardtools der Qualitätssicherung (QS) werden statistische Verfahren zur Führung von Qualitätsregelkarten, Erstellung von Messsystemanalysen, Berechnung von Fähigkeitskennwerten usw. eingesetzt [7]. Für diese Verfahren sind zahlreiche Softwareprodukte erhältlich, die einen wichtigen Bereich von *Computer Aided Quality* (CAQ) darstellen. Bild 1 zeigt ein Beispiel für eine automatisch erstellte Mittelwert-Regelkarte mit guter Annäherung der Messwerte durch eine Normalverteilung (Software © qs-STAT, Fa. Q-DAS®).

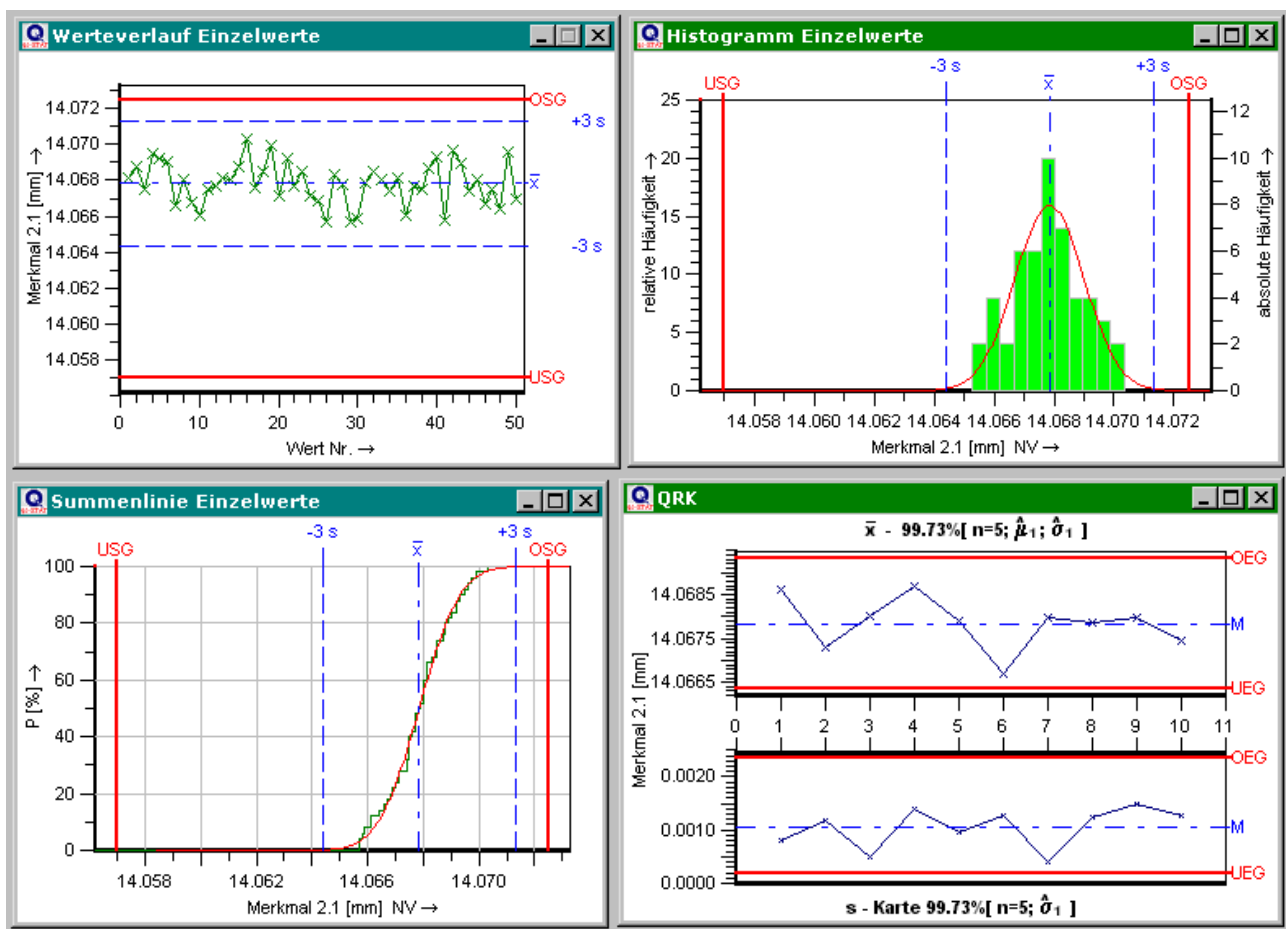


Bild 1

Oben, links unten: Die gestrichelten Linien begrenzen den 6σ -Bereich symmetrisch zum Prozess-Mittelwert, die durchgezogenen Linien den Toleranzbereich (USG - OSG).

Oben rechts, unten links: Die Kurven zeigen die Normalverteilung (Dichtekurve und Summenkurve) als Näherung der Messwerte.

Unten rechts: Mittelwertkarte und Streuungskarte für Stichprobengröße 5; die eingezeichneten Grenzen UEG und OEG stellen den 6σ -Bereich symmetrisch zum Prozess-Mittelwert dar.

(© qs-STAT)

Die für die Darstellung in Bild 1 ganz wesentliche Normalverteilung der Messwerte wird innerhalb der QS-Normung und bei den Zertifizierungs-Anforderungen meist unterstellt oder vorausgesetzt. Dies ist jedoch eine stark idealisierte Vorstellung von der tatsächlichen Datenlage im produzierenden Gewerbe. Erfahrungen in vielen Branchen - auch in der blechverarbeitenden Industrie - zeigen, dass sehr häufig unregelmäßige oder unsymmetrische Messwertverteilungen beobachtet werden. Dies muss keineswegs bedeuten, dass die Produktionsprozesse nicht beherrscht oder nicht fähig sind. So werden beispielsweise linksschiefe Messwertverteilungen oft durch natürliche untere Grenzen des gemessenen Parameters erzeugt (Bild 2).

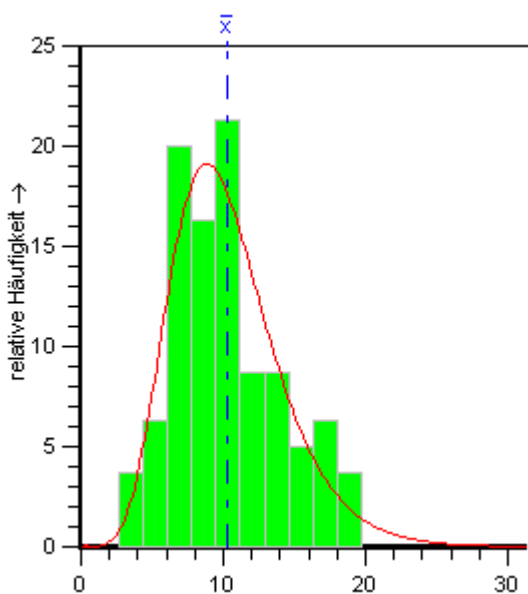


Bild 2

Linksschiefe Messwertverteilung; der gemessene Parameter ist nach links durch die natürliche Grenze 0 beschränkt; die Näherungskurve ist *keine* Normalverteilung.
(© qs-STAT)

Auch der „6 σ -Philosophie“ liegt die Vorstellung von normalverteilten Messwerten zu Grunde. Dies zeigt sich besonders bei der Berechnung der Prozessfähigkeit c_{pk} . In Bild 3 wird die Berechnung dieses zentralen QS-Kennwertes zunächst für den Idealfall einer Normalverteilung gezeigt, die exakt mittig zwischen den Toleranzgrenzen liegt, hier mit UGW und OGW bezeichnet.

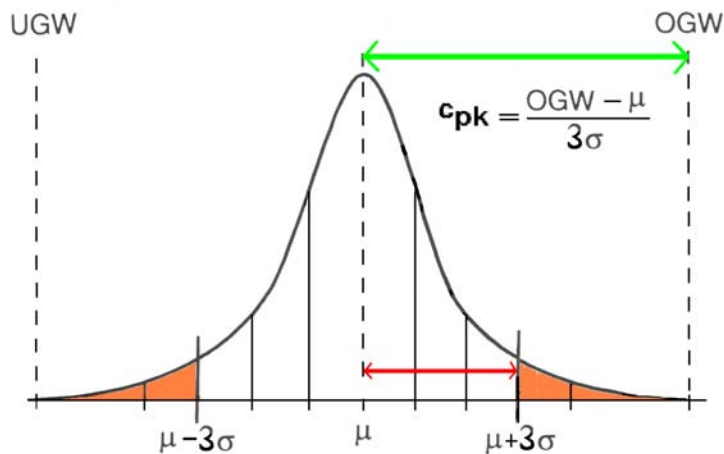


Bild 3

Die Toleranzgrenzen liegen hier symmetrisch zum Prozessmittelwert μ . In diesem Fall ist der c_{pk} -Wert das Verhältnis des Abstands Mittelwert-Obergrenze zur 3-fachen Standardabweichung der Messwertverteilung (hier Normalverteilung). Dies ist gleichbedeutend mit dem Verhältnis der gesamten Toleranzbreite zu dem Bereich, in dem 99,73 % der Messwerte liegen (helle Fläche in der Mitte).

Ist die Symmetrie der Toleranzgrenzen zum Prozessmittelwert nicht gegeben, wird der kleinere Abstand der beiden Toleranzgrenzen zu diesem Mittelwert eingesetzt. Für den symmetrischen und den unsymmetrischen Fall lässt sich dann berechnen, welcher Anteil der Messwerte außerhalb der Toleranzgrenzen liegt (Tafel 1).

$c_{pk} = \frac{\text{Min}(\text{OGW} - \mu, \mu - \text{UGW})}{3 \cdot \sigma}$	Toleranz symmetrisch		Toleranz asymmetrisch	
	c_{pk}	Ausschuss ppm	c_{pk}	Ausschuss ppm
	1	2700	1	1350 - 2700
	1,33	63	1,33	31,5 - 63
	1,67	0,57	1,67	0,285 - 0,57

Tafel 1

Berechnung des c_{pk} -Wertes für normalverteilte Messwerte. Zusammenhang von c_{pk} und Ausschussanteil.

Nun ist aber die Normalverteilungsannahme in der betrieblichen Praxis in sehr vielen Fällen nicht gerechtfertigt. Werden die oben beschriebenen QS-Methoden unhinterfragt angewendet, ergeben sich mathematisch *sinnlose QS-Kennwerte, meistens zu Ungunsten des Betriebes*. Dennoch ist ein solches Vorgehen häufig bei der internen Prozesskontrolle und bei der Vorbereitung einer Zertifizierung nach einer der gängigen QS-Normen zu beobachten: Es werden Mittelwert und Standardabweichung für einen

Prozessparameter gemessen und für die Führung von Qualitätsregelkarten wie in Bild 1 oder zur Berechnung der Prozessfähigkeit wie in Tafel 1 verwendet, *auch wenn die Messwertverteilung von der Normalverteilung abweicht*. Besonders absurd wird diese Methode, wenn der 6σ -Bereich den vorgegebenen Parameterbereich verlässt, so wie in Bild 4, wo nur positive Messwerte möglich sind (vgl. Bild 2).

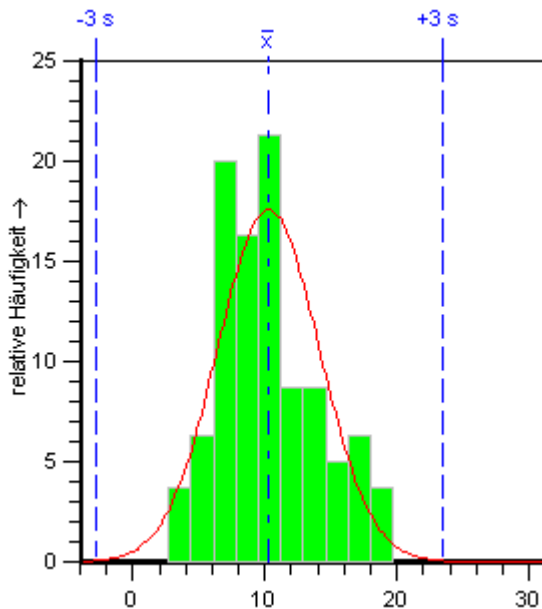


Bild 4

Gleiche Messwertverteilung wie in Bild 2, aber hier zum Vergleich mit der Normalverteilung. Man beachte, dass die Linie für $-3s$ (entspricht -3σ) links von 0 liegt, obwohl 0 die natürliche Untergrenze des gemessenen Parameters ist.

(© qs-STAT)

Es ist also erforderlich - vor allem für erfolgreiche Zertifizierungen -, dass die Berechnung von Qualitätsregelkarten und Prozessfähigkeit auch dann korrekte Resultate ergibt, wenn nicht-normale Messwertverteilungen vorliegen. Einige CAQ-Programme leisten dies bereits, verlangen aber vom Anwender die Auswahl einer Modellverteilung, was nicht immer einfach ist; außerdem bietet oft die beste vom Programm angebotene Modellverteilung noch keine befriedigende Näherung der Messwerte. Dem Bedürfnis der Anwender, mit einfach zu handhabenden Formeln selbst arbeiten zu können, kommen die Arbeiten [5, 7, 8, 10, 11, 13] teilweise entgegen. Im Folgenden soll ein Weg aufgezeigt werden, der zumindest die Berechnung von c_{pk} und von Regelkarten zur Prozesskontrolle wie in Bild 1 oben links ermöglicht, ohne dem Anwender die Ermittlung einer Näherungsverteilung aufzuerlegen.

Wie Tafel 1 zeigt, hängt die Prozessfähigkeit direkt mit dem Ausschussanteil zusammen. Analysiert man die obige Berechnung von c_{pk} unter der Normalverteilungsannahme, so wird deutlich, dass dabei lediglich der größere der beiden Ausschussanteile - unterhalb der unteren bzw. oberhalb der oberen Toleranzgrenze - in die Rechnung eingeht. Somit liegt es nahe, generell diesen größeren Ausschussanteil in einen c_{pk} -Wert umzurechnen, ungeachtet der vorliegenden Messwertverteilung (siehe Bild 5). Dies muss natürlich so geschehen, dass die Aussagen vom rechten Teil der Tafel 1 (symmetrisch/unsymmetrisch) erhalten bleiben. Die aus diesen Überlegungen resultierende Formel steht in Tafel 2. Bild 6 zeigt Beispielrechnungen in EXCEL.

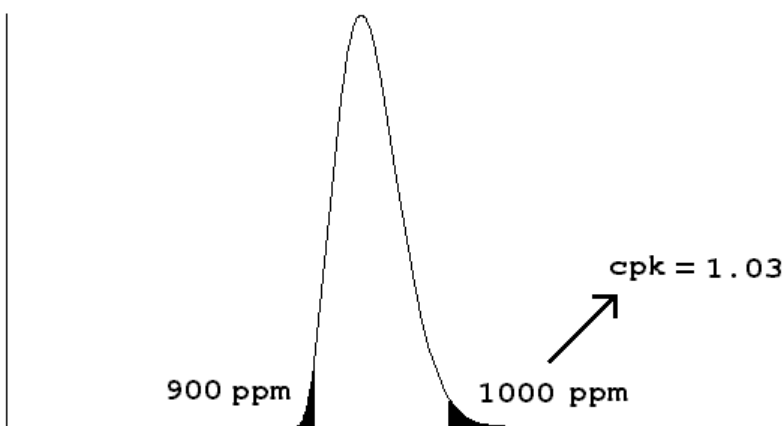


Bild 5

Bei einer beliebigen Messwertverteilung führen 1000 ppm Ausschussanteil oberhalb der oberen Toleranzgrenze (dies ist der größere der beiden Ausschussanteile) zu einem c_{pk} -Wert von 1,03. Dies entspricht exakt dem analogen Fall bei normalverteilten Messwerten.

$$c_{pk} = -\frac{1}{3} \cdot \text{Quantil}(a_{\max})$$

EXCEL-Befehl: $CPK = -\text{NORMINV}(AMAX;0;1)/3$

a_{\max} = Max (Ausschussanteil unterhalb der unteren Toleranzgrenze,
Ausschussanteil oberhalb der oberen Toleranzgrenze)

Quantil bezieht sich auf die Standardnormalverteilung, d.h. ist
 $x = \text{Quantil}(a)$, so liegt links von x der Anteil a unter dieser Verteilung.

Tafel 2

c_{pk} -Berechnung für beliebige Messwertverteilungen. In einigen Installationen lässt sich der EXCEL-Befehl nur für $a_{\max} > 0,000001$ (= 1 ppm) einsetzen.

	A	B	C	D
1	Amax in ppm	cpk		
2				
3	10000	0,775		
4	1350	1,000		
5	1000	1,030		
6	100	1,240		
7	31,5	1,333		
8	10	1,422		
9	5	1,471		
10	1	1,589		
11				

Bild 6

EXCEL-Berechnung der c_{pk} -Werte. Da hier die a_{\max} -Werte in ppm angegeben sind (Spalte A), werden diese Werte in der Formel (Kopfzeile) durch 1.000.000 dividiert, um der Formel aus Tafel 2 zu genügen.

Weder die Verteilungsform der Messwerte noch Verteilungsparameter wie Mittelwert oder Standardabweichung gehen in die c_{pk} -Berechnung nach Tafel 2 ein. Es genügt, dass für einen Messparameter bekannt ist, welcher Anteil der Messwerte im langfristigen Mittel außerhalb der Toleranzgrenzen liegt. Natürlich enthebt dies den Betrieb nicht von der Feststellung, ob der zugrunde liegende Produktionsprozess beherrscht ist - falls nämlich der Ausschussanteil stärkeren Schwankungen unterliegt, sollte erst gar nicht in die Prozessfähigkeitsanalyse eingestiegen werden.

Dass die Verteilungsform der Messwerte in Tafel 2 keine Rolle spielt, soll nicht bedeuten, dass die Ermittlung einer theoretischen statistischen Verteilung als (gute) Näherung der vorliegenden Messdaten sinnlos ist. Selbstverständlich lässt sich auch der Ausschussanteil, der sich aus dieser Näherungsverteilung ablesen lässt, in die c_{pk} -Berechnung nach Tafel 2 einsetzen.

Es sollen noch einige nahe liegende Fragen behandelt werden:

- ◆ *Gibt es einen ähnlichen Ansatz für die Berechnung von c_p (Prozesspotential)?*

Das Prozesspotential gibt an, wie groß die Prozessfähigkeit maximal werden kann. Es wird dabei unterstellt, dass sich die Messwertverteilung in ihrem Mittelwert beliebig verschieben lässt, ansonsten aber unverändert bleibt. Die maximale Prozessfähigkeit bei normalverteilten Messwerten ist also dann gegeben, wenn der Mittelwert in der Mitte zwischen den Toleranzgrenzen liegt („Toleranz symmetrisch“ in Tafel 1). Dies hat zur Folge, dass auch die Ausschussanteile unterhalb der unteren und oberhalb der oberen Toleranzgrenze gleich groß sind. Dies legt nahe, für nicht-normale Messwertverteilungen das Prozesspotential wie in Tafel 3 zu berechnen.

$c_p = -\frac{1}{3} \cdot \text{Quantil} \left(\frac{1}{2} \cdot a_{\text{gesamt}} \right)$
EXCEL-Befehl: CP = - NORMINV (AGESAMT/2;0;1)/3
<p>a_{gesamt} = Ausschussanteil</p> <p>Quantil bezieht sich auf die Standardnormalverteilung, d.h. ist $x = \text{Quantil}(a)$, so liegt links von x der Anteil a unter dieser Verteilung.</p>

Tafel 3

c_p -Berechnung für beliebige Messwertverteilungen.

◆ *Gibt es einen ähnlichen Ansatz für Qualitätsregelkarten?*

Für die kontinuierliche Verfolgung der Einzelmesswerte (Bild 1 oben links) lassen sich die beiden Grenzen $\bar{x} \mp 3s$ ersetzen durch Quantil(0,00135) bzw. Quantil(0,99865), wobei sich hier „Quantil“ auf die tatsächliche Messwertverteilung bezieht und nicht wie in den Tafeln 2 und 3 auf die Standardnormalverteilung.

◆ *Wie verfährt man, wenn nur eine obere (bzw. untere) Toleranzgrenze vorliegt?*

Dieser Fall wird in der Normung und der Literatur etwas stiefmütterlich behandelt. Der in [7] beschriebene Fall, dass bei nur einer Toleranzgrenze $c_p < c_{pk}$ auftreten kann, sollte aus Plausibilitätsgründen vermieden werden - er zeigt lediglich, dass man dann c_p und c_{pk} sorgfältiger definieren muss. (Es soll auch darauf hingewiesen werden, dass keineswegs das Fehlen der unteren Toleranzgrenze mit dem Vorliegen einer natürlichen unteren Grenze des Messparameters einher gehen muss.) Die mit Tafel 2 konsistente Berechnung der Prozessfähigkeit ist

$$c_{pk} = - \text{Quantil}(a_{\text{gesamt}}) / 3 .$$

c_p hängt davon ab, ob sich die Messwertverteilung überhaupt „verschieben“ lässt. Beliebige Verschiebbarkeit lässt sich nur mit „ $c_p = \infty$ “ beschreiben. Hat die Messwertverteilung dagegen am unteren (bzw. oberen) Rand den Abstand b zu einer natürlichen Grenze, ist $c_p = - \text{Quantil}(a_b) / 3$, wobei a_b der Ausschussanteil rechts (bzw. links) der Toleranzgrenze $\pm b$ ist. Tafel 4 gibt die Zusammenfassung dieser Formeln.

$c_{pk} = -\frac{1}{3} \cdot \text{Quantil} (a_{gesamt})$	$c_p = \begin{cases} \infty & \text{falls Verteilung verschiebbar} \\ -\frac{1}{3} \cdot \text{Quantil} (a_b) & \text{sonst} \end{cases}$
<p style="text-align: center;">EXCEL-Befehl: CPK = - NORMINV (AGESAMT;0;1)/3</p>	<p style="text-align: center;">EXCEL-Befehl: CP = - NORMINV (Ab;0;1)/3</p>
<p>a_{gesamt} = Ausschussanteil</p>	<p>b = Abstand der Messwertverteilung zur linken bzw. rechten natürlichen Grenze</p> <p>a_b = Ausschussanteil rechts von: (obere Toleranzgrenze)+b bzw. a_b = Ausschussanteil links von: (untere Toleranzgrenze)-b</p>
<p>Quantil bezieht sich auf die Standardnormalverteilung, d.h. ist $x = \text{Quantil}(a)$, so liegt links von x der Anteil a unter dieser Verteilung.</p>	

Tafel 4

c_{pk} - und c_p -Berechnung bei nur einer Toleranzgrenze.

Zum Abschluss dieses Abschnitts über Prozessfähigkeit noch eine Bemerkung: Die Berechnung des c_{pk} -Wertes wie in Tafel 1 hat sich in der Industrie durchgesetzt. Deshalb wurde für nicht-normale Messwertverteilungen ein analoger Ansatz gewählt (Tafeln 2 - 4), um ein konsistentes Formelwerk zu schaffen. Es sollte allerdings darauf hingewiesen werden, dass eine faire und mathematisch besser begründete Berechnung der Prozessfähigkeit die Einbeziehung *beider* Enden der Messwertverteilung erfordern würde. In Tafel 2 müsste dann a_{max} ersetzt werden durch $a_{max}+a_{min}$ oder $(a_{max}+a_{min}) / 2$.

2. Optimale Stichprobenpläne

In diesem Abschnitt werden nicht metrische Messwerte, sondern „Fehler“ oder „fehlerhafte Teile“ in einem Los behandelt. Der statistische Nachweis für eine „gute“ Qualitätslage kann über eine Annahmestichprobenprüfung nach DIN ISO 2859 [6] geführt werden; diese Norm ergänzt DIN ISO 9000 und andere QS-Normen sinnvoll und kann Grundlage von QS-Vereinbarungen zwischen Herstellern und Kunden sein. Wie im ersten Abschnitt ist es aber auch hier erforderlich, die Vorgehensweise nach der Norm zu ergänzen durch weitergehende und modernere Methoden, da die Norm im betrieblichen Alltag nicht immer die Bedürfnisse abdeckt. In Tafel 5 wird zunächst das allgemeine Vorgehen bei einer Annahmestichprobenprüfung dargestellt.

Annahmestichprobenprüfung

- Prüfe $x\%$ (oder n Stücke) von jedem Los
- Freigabe bei max. c Fehlern in der Stichprobe
- Reklamationsfall: Mehr als M Fehler im Los
- Ein „Reklamationslos“ führt mit hoher Wahrscheinlichkeit zur Rückweisung

DIN ISO 2859 / 2 gibt den Prüfplan (n,c) in Abhängigkeit von M an.

Tafel 5

Annahmestichprobenprüfung nach „Rückzuweisender Qualitätsgrenzlage (LQ)“ (DIN ISO 2859 Teil 2).
M wird in der Norm in LQ umgerechnet.
Rückweisung bedeutet Nicht-Freigabe des Loses nach erfolgter Stichprobenprüfung.

Auffällig an dem Vorgehen nach Tafel 5 ist, dass der Prüfplan nicht von der tatsächlichen Qualitätslage abhängt. Dies kann sehr nachteilig für den Betrieb sein, da Stichprobenprüfungen Kosten verursachen, die mit dem Stichprobenumfang n steigen. Es sollte angestrebt werden, dass eine relativ gute Qualitätslage einen geringeren Prüfaufwand erfordert als eine relativ schlechte. Ausgehend von dem richtigen Ansatz der DIN ISO 2859/2, das Reklamationsrisiko zu beschränken, werden Methoden zur

Berechnung von (n,c) benötigt, die außerdem die aktuelle Qualitätslage sowie die Kosten berücksichtigen (Tafel 6).

Was müsste ein optimaler Prüfplan leisten?

- Kontrollierte Begrenzung des Reklamationsrisikos
- „Optimal“ = „Kostenminimal“
- Der kostenminimale Prüfplan wird aus der gegebenen Qualitätslage errechnet
- Unterstützung durch CAQ

Tafel 6

Erweiterung des Ansatzes nach DIN ISO 2859

Es soll ein Beispiel für die Optimierung nach Tafel 6 gegeben werden. Die in Tafel 7 angegebenen Werte beziehen sich auf die Serienproduktion eines einzelnen Bauteils. Die Berechnung erfolgte im QS-Labor des Fachbereichs MND der FH Gießen-Friedberg.

Das durchgerechnete Beispiel zeigt, dass sich die durch die DIN ISO 2859 vorgegebenen Prüfpläne ergänzen lassen durch solche, die bei beherrschten Prozessen - diese gehen mit stabilen Ausschussquoten einher - kostengünstigere Alternativen darstellen. Die dafür erforderliche CAQ-Software ist teilweise in [2, 3] (für EXCEL), umfassender in [9, 12] dokumentiert.

Berechnung eines optimalen Prüfplans - <i>Beispiel</i>	
Losgröße	N = 500
Qualitätslage	310 ppm Ausschuss
Reklamationsgrenze	M = 2 d.h. max. 1 Ausschussteil pro Los erlaubt
Reklamationsrisiko	< 1 %
Prüfkosten	0,95 € / Stück
Reklamationskosten	5.000 € / rekl. Los
Rückweisekosten	1.000 € / zurückgew. Los
<p>→ optimaler Prüfplan (21 , 0) <i>d.h.: Prüfung von 21 Teilen pro Los</i> <i>Freigabe nur bei fehlerlosen Stichproben</i></p> <p>→ Gesamtkosten pro Los 76,31 € <i>d.h. alle anderen Prüfpläne sind teurer</i></p>	
<p>Verwendete CAQ-Software erstellt durch: QS-Labor Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und Datenverarbeitung University of Applied Sciences FH Gießen-Friedberg</p>	

Tafel 7

Beispielrechnung

Literatur

- [1] Börgens, M.
Optimierungsverfahren und Risiko-Kennwerte für Stichprobenprüfung und Kostenrechnung
in: G. Benes, F.-K. Feyerabend, U. Vossebein (Hrsg.): Qualitätsmanagement als
interdisziplinäres Problem, Deutscher Universitäts-Verlag
- [2] Börgens, M.
Prozeßkennzahlen und Qualitätsregelkarten bei attributiven Merkmalen
Der Qualitätssicherungs-Berater, 11210 (1998), TÜV-Verlag
- [3] Börgens, M.
Kostenoptimierung bei der Stichprobenprüfung
Der Qualitätssicherungs-Berater, 11220 (1998), TÜV-Verlag
- [4] Börgens, M.
Stichprobenprüfung in beherrschten und nichtbeherrschten Prozessen – Beispiele und Formeln für
Attributprüfung mit Anwendungen auf DIN ISO 2859
Shaker Verlag
- [5] Clements, J. A.
Process Capability Calculations for Non-Normal Distributions
Quality Progress, Sept. 1989, S. 95 - 100
- [6] Deutsches Institut für Normung (Hrsg.)
Qualitätssicherung und angewandte Statistik, Verfahren 2: Probenahme und
Annahmestichprobenprüfung
DIN-Taschenbuch 225, Verlag Beuth
- [7] Dietrich, E.; Schulze, A.
Statistische Verfahren zur Maschinen- und Prozessqualifikation
Verlag Hanser
- [8] vom Hagen, R.; Möller, H.; Mohr, W.
Nichtnormale Qualität
QZ, 44 (1999) 4, S. 458 - 460
- [9] Kersebaum, C.; Rispler, M.
Stichprobenoptimierung in der mathematischen Qualitätssicherung
Diplomarbeit FH Gießen-Friedberg 1997
- [10] Köhler, J.; Kopriva, F.
Fliegender Wechsel
QZ, 45 (2000) 6, S. 758 - 761
- [11] Quentin, H.
Berechnung von Fähigkeitsfaktoren für nicht normalverteilte Streuungen
Automobil-Industrie, 4/5-91, S. 375 - 381
- [12] Szczepanski, L.
Kostenoptimale Stichprobenpläne in der Qualitätssicherung
Diplomarbeit FH Gießen-Friedberg 1999
- [13] Trumpold, H.; Pertuch, C.
Jenseits der Normalverteilung
QZ, 45 (2000) 7, S. 888 - 893