UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

FACHHOCHSCHULE GIESSEN FRIEDBERG

Friedberger Hochschulschriften

Wilfried Hausmann

Das Nimspiel, der Assemblerbefehl XR und eine merkwürdige Art, zwei und zwei zusammenzuzählen

Friedberger Hochschulschriften Nr. 1

Friedberger Hochschulschriften
Herausgeber:
Die Dekane der Fachbereiche des Bereichs Friedberg der FH Gießen-Friedberg
Wilhelm-Leuschner-Straße 13, D-61169 Friedberg
http://www.fh-friedberg.de

Friedberg 1999
ISSN 1439-1112

Das Nimspiel, der Assemblerbefehl XR und eine merkwürdige Art, zwei und zwei zusammenzuzählen

Wilfried Hausmann

Festvortrag anläßlich des 20jährigen Jubiläums des Studiengangs Mathematik an der Fachhochschule Giessen-Friedberg
Friedberg, 30. Oktober 1998

Normalerweise beschäftigen wir uns ja in unserem Studiengang Mathematik eher mit den nützlichen und ernsthaften Seiten der angewandten Mathematik, aber anläßlich eines Jubiläums dürfen auch mal unterhaltsame und spielerische Aspekte im Mittelpunkt stehen. Darüberhinaus kann nun auch die Algebra - zumindest klassischerweise nicht unbedingt ein vorrangig angewandter Zweig der Mathematik - einmal zu ihrem Recht kommen.

Zwanzig Jahre ist der Studiengang Mathematik nun alt und so weit geht auch die Entstehungsgeschichte dieses Vortrags in etwa zurück. Die einzelnen Teile sind mir zu völlig unterschiedlichen, Jahre auseinanderliegenden Zeitpunkten begegnet und die jeweilige Darstellung war auch keineswegs so, daß der enge Zusammenhang, der zwischen ihnen besteht, offensichtlich war. Dieser Zusammenhang wurde mir erst im Lauf der Zeit völlig klar, nachdem ich immer mal wieder auf eines der Themen gestoßen war. Irgendwann stand der Vortrag dann gedanklich fest und mit diesem Jubiläum ist die willkommene Gelegenheit da, ihn zu halten.

1 Das Nimspiel

Die eigentlichen Wurzeln des Nimspiels sind mir nicht bekannt. Ich glaube, es geht auf einen Mathematiker gleichen Namens zurück. Jedenfalls ist *Nimspiel* kein Schreibfehler, obwohl auch der Name *Nimmspiel* durchaus passend wäre (s.u.). Das Spiel kam zu einiger Berühmtheit durch den 1961 von dem französischen Regisseur Alain Resnais gedrehten Spielfilm *Letztes Jahr in Marienbad*, in dem es eine durchaus wichtige Rolle spielt. Dieser Schwarzweiß-Film mit *unlösbar verworrener Doppeldeutigkeit der Handlung*, der sich durch eine *gespenstisch-traumartige Stimmung* und *frostig-karge Schönheit* auszeichnet [1], erlangte seinerzeit eine Art Kultstatus. Ich selbst habe das Nimspiel allerdings erst sehr viel später kennengelernt, nämlich als ich Mitte der siebziger Jahre das sehr empfehlenswerte Zahlentheoriebuch von Hardy und Wright [5] als Begleitlektüre einer einführenden Zahlentheorievorlesung von Don Zagier gelesen habe (zugegebenermaßen nur teilweise). Den Film habe ich auch gesehen, aber das war noch viel später.

Die Spielregeln des Nimspiels sind schnell erklärt: Es ist ein Spiel für zwei Spieler, und um es zu spielen, braucht man nur eine Schachtel Streichhölzer. Zu Beginn des Spiels wird eine beliebige Anzahl Streichhölzer auf mehrere Stapel verteilt auf einen Tisch gelegt. Dann nehmen sich die Spieler abwechselnd Streichhölzer vom Tisch. Jeder muß jeweils mindestens ein Streichholz nehmen, es dürfen aber auch mehrere genommen werden. Die einzige Bedingung ist, daß jedesmal nur einem einzigen Stapel Hölzer entnommen werden dürfen. Sieger ist, wer als letzter ein Streichholz (oder mehrere) nehmen kann.

Bemerkung. Es gibt eine zweite Variante des Spiels. Bei ihr hat derjenige verloren, der das letzte Hölzchen nehmen muß. Für beide Varianten sind die optimalen Strategien ähnlich, wobei die erste Variante des Spiels aber die schöneren, d.h. einheitlicheren Eigenschaften hat. Deswegen beschränken wir uns im Folgenden auf diese Variante.

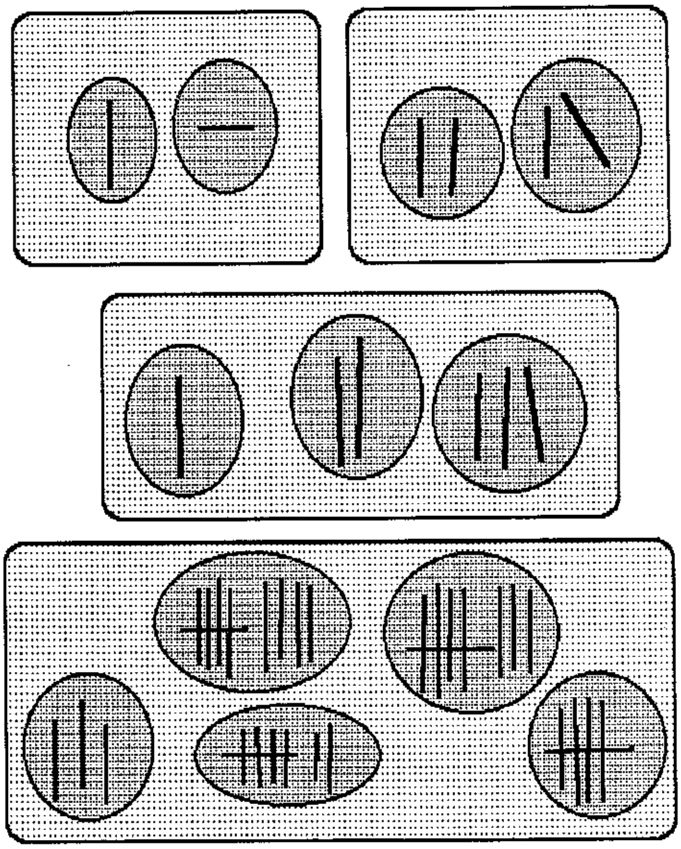
Offensichtlich ist das Nimspiel ein endliches Spiel ohne Zufallseinflüsse (wie z.B. Würfeln). Liegen nämlich noch n Streichhölzer auf dem Tisch, so ist das Spiel nach spätestens n Zügen entschieden, denn jeder Spieler muß ja immer mindestens ein Streichholz nehmen. Man überlegt sich nun leicht, daß für ein solches Spiel das Folgende gelten muß (Satz von *Zermelo* und *von Neumann*): Jede mögliche Spielstellung ist entweder eine Gewinnstellung oder eine Verluststellung. Hierbei heißt eine Stellung **Gewinnstellung**, wenn sie so ist, daß der Gegner garantiert verliert, wenn man ihm eine solche Stellung übergibt (sofern man selbst weiterhin optimal spielt). Jede andere Stellung heißt **Verluststellung**[1]. Man wird also immer versuchen, so viele Streichhölzer wegzunehmen, daß eine Gewinnstellung entsteht und dem Gegner dann nichts anderes übrig bleibt, als wieder eine Verluststellung zu erzeugen. Es gilt also, daß

- man durch optimales Spiel aus einer Verluststellung eine Gewinnstellung erzeugen kann und
- jeder zulässige Zug aus einer Gewinnstellung zwangsläufig eine Verluststellung macht.

[1]Diese Definition ist sprachlich nicht sehr glücklich, aber wir folgen [5]. Man hätte die Namensgebung genauso gut umgekehrt vornehmen können.

Somit ist jedes Nimspiel eigentlich schon zu Spielbeginn entschieden: Ist die Ausgangsstellung eine Gewinnstellung, so hat der Spieler, der als erster ziehen muß, verloren, wenn sein Gegner optimal spielt. Startet er hingegen mit einer Verluststellung, so kann er den Sieg erzwingen. Damit ist das Spiel aber noch nicht reizlos, denn das Problem ist, wie man eine Gewinnstellung erkennt. Auch Schach ist ein endliches Spiel ohne Zufallseinflüsse (mit allerdings drei möglichen Spielausgängen: Sieg, Niederlage und Remis), das aber so kompliziert ist und so viele Ausnahmeregeln hat, daß für komplexe ausgeglichene Stellungen unumstößliche Bewertungen auch heute noch nicht möglich sind. Insbesondere ist nicht bekannt, ob die Ausgangsstellung Weiß bei optimalem Spiel einen Sieg oder wenigstens ein Remis garantiert.

Das Nimspiel ist aber wesentlich einfacher als Schach und hat vor allem keine Ausnahmeregeln, die Asymmetrie ins Spiel bringen. Hier könnte es möglich sein, daß man Gewinn- und Verluststellungen leichter erkennen kann. Sehen wir uns ein paar Gewinnstellungen an:



Die ersten drei Stellungen weist man leicht als Gewinnstellungen nach, aber die vierte?

2 Der Assemblerbefehl XR

In den siebziger Jahren war die kommerzielle EDV-Welt noch ein wenig anders als heute. PCs gab es noch nicht und auf den Großrechnern war Rechenzeit teuer, Speicherplatz knapp und in den Betrieben liefen überwiegend Batchprogramme. Zwar gab es damals auch schon viele COBOL-Programme und -Programmierer, aber ein *richtiger* Programmierer war ein ASSEMBLER–Programmierer. Das war zumindest die Einstellung der Assembler-Programmierer und das nicht ganz zu Unrecht, denn nur mit der maschinennahen Programmiersprache Assembler ließen sich die knappen Ressourcen optimal nutzen. Aber Assembler-Programmierer war nicht gleich Assembler-Programmierer. Ein Assembler-Programmierer, der etwas auf sich hielt, musste ein paar Tricks kennen, mit denen er beweisen konnte, daß er sein Metier beherrschte.

Dies war nun alles vor meiner Zeit, ich hatte erst in den achtziger Jahren mit der kommerziellen EDV zu tun. Aber natürlich habe ich da noch viele Leute getroffen, die aus jener glorreichen Pionierzeit stammten und die in ihrem tiefsten Innern nach wie vor ASSEMBLER für die einzige wirkliche Programmiersprache hielten (einige Kompromissler haben sich dann mit C abgefunden) und die auch so ab und an ihre Weisheiten verrieten. So habe also auch ich ein paar der Tricks kennengelernt und einen davon möchte ich jetzt vorstellen.

Der Trick benötigt den Befehl XR des IBM-MVS-Assemblers, der wie folgt definiert ist: XR steht für *e<u>x</u>clusive o<u>r</u>* (= 'ausschließendes oder', lat. Name: *Antivalenz*), womit in der Aussagenlogik folgende binäre Operation gemeint ist (A, B = Aussagen im Sinne der Aussagenlogik, $0 = falsch$, $1 = wahr$, $\curlyvee$ = Symbol für die Antivalenz):

A	B	$A \curlyvee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(1)

Damit ist der Befehl XR fast schon erklärt, denn bekanntlich sieht man ja lauter Nullen und Einsen, die sogenannten *Bits*, wenn man mit einer großen Lupe in einen Computer guckt, und XR bildet bitweise die Antivalenz, genauer:

Der Assemblerbefehl

$$XR\ R1\ R2$$

bildet für alle i die Antivalenz zwischen dem i-ten Bit des Registers $R1$ und dem i-ten Bit des Registers $R2$ und ersetzt $R1$ durch diese neue Bitfolge. $R2$ bleibt unverändert.

Vielleicht wissen nicht alle, was Register sind: Vergleicht man einen Computer mit einer Arztpraxis, so sind sie die Behandlungszimmer. Die meiste Zeit schlummern die Daten im Speicher (= Wartezimmer) und werden ab und an in ein Register (= Behandlungszimmer) befördert, wo sie verändert (= verarztet) werden.

Nun zu dem eigentlichen Trick: Häufig steht man in der Programmierung vor der Aufgabe, die Inhalte zweier Felder vertauschen zu müssen. Genau wie wenn man zwei Blumentöpfe auf der Fensterbank vertauschen will, benutzt man dazu in der Regel ein Zwischenfeld: Man stellt zunächst einen Blumentopf (den Inhalt des ersten Feldes) auf die Erde (bzw. in das Zwischenfeld), stellt den zweiten Blumentopf dahin, wo ursprünglich der erste stand (überschreibt den Inhalt von Feld 1 mit dem von Feld 2) und stellt dann den ersten Blumentopf auf die ursprüngliche Stelle des zweiten (belegt Feld 2 mit dem Inhalt des Zwischenfeldes). Mit Hilfe des Befehls XR kommt man ohne ein Zwischenfeld aus: Die Befehlsfolge

$$\begin{gathered} XR\ R1\ R2 \\ XR\ R2\ R1 \\ XR\ R1\ R2 \end{gathered}$$

bewirkt eine Vertauschung der Inhalte von $R1$ und $R2$. Daß das so ist, prüft man leicht nach, indem man alle möglichen Kombinationen durchspielt, aber:

$$Warum\ ist\ das\ so?$$

3 Eine merkwürdige Art, zwei und zwei zusammenzuzählen

Nun zu einer innermathematischen Fragestellung: Die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$$

sind uns seit frühester Kindheit vertraut, spätestens in der Grundschule lernt man mit ihnen zu rechnen. Aber - so natürlich sie auch sein mögen - aus algebraischer Sicht sind die natürlichen Zahlen keineswegs makellos. So läßt sich z.B. die Gleichung

$$2 + x = 1$$

in ihnen nicht lösen. Erst in den *ganzen Zahlen* **Z**, also nach Hinzunahme der negativen Zahlen $-1, -2, ...$ lassen sich allgemein Gleichungen der Art

$$a + x = b$$

lösen, und zwar eindeutig. Aufgrund dieses offenkundigen Mangels der natürlichen Zahlen könnte man sich nun fragen, ob sie und ihre Rechenregeln wirklich so gottgegeben sind.

$$Hätte\ man\ die\ Addition\ nicht\ besser\ definieren\ können?$$

Wie oft hat sich nicht schon das scheinbar Unumstößliche und Offensichtliche als trügerisch erwiesen, und in einem Krimi ist ja auch nur selten der erste Verdächtige auch wirklich der Täter!

Hat man diese Erkenntnis erst einmal und genügend Selbstvertrauen und Naivität sich zuzutrauen, es besser zu machen als die gesamte bisherige Menschheit, so kann man sich auf die Suche machen, eine 'perfektere' Addition der natürlichen Zahlen zu finden. Bei diesem Versuch wird man schnell feststellen, daß die Anzahl der Möglichkeiten, hier anzusetzen, überwältigend groß und völlig unübersichtlich ist. So entsteht dann rasch der Wunsch nach Ordnung und man versucht vielleicht herauszufinden, was denn herauskommt, wenn man von den kleinen Zahlen aus startet und die Addition so definiert, daß die Summe immer möglichst klein bleibt, also ($\boxplus$ =Symbol für die neue Addition):

$$0 \boxplus 0 = 0 \qquad 0 \boxplus 1 = 1 \qquad 1 \boxplus 0 = 1$$

und schrittweise so weiter, wobei immer die kleinste Zahl genommen wird, die noch nicht 'vergeben' ist:

Definition 1 *Zu den natürlichen Zahlen a und b sei $a \boxplus b$ induktiv definiert als die kleinste Zahl, die nicht von der Form $a \boxplus x$ oder $y \boxplus b$ ist mit $x < b$ bzw. $y < a$.*

Die folgende Tabelle erläutert die Funktionsweise der Definition: Warum ist $3 \boxplus 5 = 6$? Weil in der Zeile links neben der 6 bzw. in der Spalte über der 6 jede der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 und 5 mindestens einmal vorkommt, die 6 aber nicht.

$\boxplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1					4
2	2					7
3	3	2	1	0	7	6

Addiert man zu einer Zahl die Null, erhält man bei dieser neuen Addition das gleiche Ergebnis wie bei der alten, aber bei anderen Zahlen scheint sich ein heilloses Durcheinander zu ergeben - oder?

Nein, es ist kein Durcheinander, der naive Ansatz führt zum Erfolg!

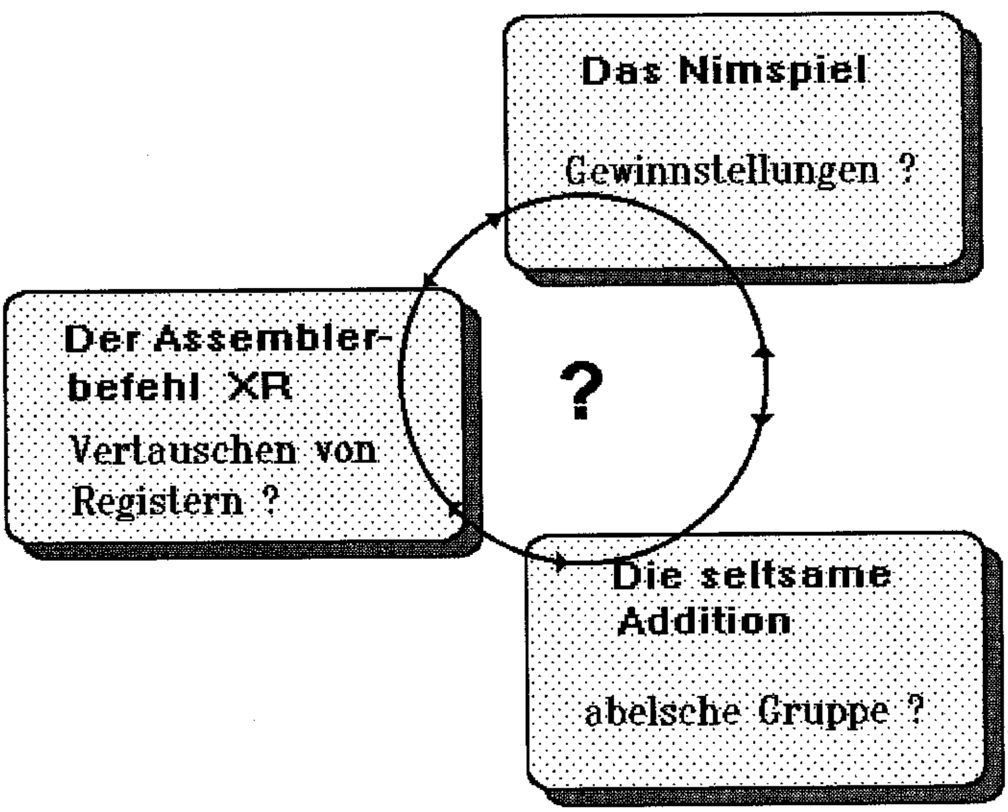
Theorem 2 *Die Operation $\boxplus$ gibt den natürlichen Zahlen die Struktur einer* abelschen Gruppe*, d.h.*
1.) Für alle a, b gilt: $a \boxplus b = b \boxplus a$.
2.) Für alle a, b und c gilt: $(a \boxplus b) \boxplus c = a \boxplus (b \boxplus c)$.
3.) Für alle a gilt: $a \boxplus 0 = a$.
4.) Für alle a, b gibt es genau ein x, so daß gilt: $a \boxplus x = b$.

Für die normale Addition in den natürlichen Zahlen gelten nur die Eigenschaften 1.)-3.), erst in den ganzen Zahlen gilt auch 4.).

Es ergeben sich nun direkt zwei Fragen:

- Wie läßt sich das beweisen?
- Welche Struktur hat die Gruppe, d.h. wie kann man die Aussage des Theorems nicht nur staunend zur Kenntnis nehmen, sondern auch verstehen?

Insgesamt sind dies nun schon eine ganze Reihe Fragen, zu denen noch eine weitere kommt: Welche Beziehung besteht zwischen den Fragen?



4 Entschlüsselung von ⊞

Nach all den Fragen ist es jetzt an der Zeit, Antworten zu geben. Beginnen wir mit der merkwürdigen Addition. Ich bin ihr ca. gegen Ende der siebziger/Beginn der achtziger Jahre begegnet, als ich Assistent bei Friedrich Hirzebruch in Bonn war. Ich betreute damals den Übungsbetrieb zu einer Vorlesung über Infinitesimalrechnung im Grundstudium des Mathematikstudiengangs, die Hirzebruch las. Er präsentierte damals den Studierenden die Definition der Addition und setzte einen Geldpreis zur Belohnung für diejenigen aus, die beweisen konnten, daß dadurch auf den natürlichen Zahlen die Struktur einer abelschen Gruppe definiert wird (genauso wie Ulrich Abel es bei uns gelegentlich macht). Als Assistent hatte ich natürlich den Ehrgeiz, diese Denksportaufgabe zu lösen, auch wenn mir ungerechterweise keine Belohnung winkte. Der erste Ansatz war naheliegenderweise, mit Hilfe der Definition die Eigenschaften 1)-4) nachzuweisen, aber da kam ich nicht sehr weit (man versuche einmal, das Assoziativgesetz $(a \boxplus b) \boxplus c = a \boxplus (b \boxplus c)$ zu beweisen) und tat dann das, was Mathematiker häufig tun, wenn sie mit dem Beweisen nicht so recht von der Stelle kommen: ich rechnete Beispiele aus in der Hoffnung, so die Konturen der Struktur der merkwürdigen Addition zu sehen. Und in der Tat, schon nach wenigen Rechnungen zeigte sich eine Besonderheit:

$$\begin{aligned} 0 \boxplus 0 &= 0 \\ 1 \boxplus 1 &= 0 \\ 2 \boxplus 2 &= 0 \end{aligned}$$

Dies konnte kein Zufall sein und schnell war die Vermutung da, daß das so weitergeht, was auch stimmt:

Proposition 3 *Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n \boxplus n = 0$.*

Diese Proposition soll nun bewiesen werden. Es handelt sich um eine Aussage über die natürlichen Zahlen, und wie unsere Studierenden schon im ersten Semester lernen, beweist man eine solche Aussage mit Hilfe vollständiger Induktion, d.h. man zeigt die Aussage zunächst für die kleinste Zahl, für die sie gelten soll (hier $n = 0$) und hangelt sich dann schrittweise zu allen größeren Werten hoch. In unserem Fall ist der Anfang mit $0 \boxplus 0 = 0$ schon gemacht und wir können annehmen, daß für alle Zahlen n, die kleiner als eine natürliche Zahl n_0 sind, bereits $n \boxplus n = 0$ bewiesen ist. Man betrachte nun die folgende Additionstabelle:

$\boxplus$	0	1	2	3	...	$n_0 - 1$	n_0
0	0	1	2	> 0	...	> 0	> 0
1	1	0	3	> 0	...	> 0	> 0
2	2	> 0	0	> 0	...	> 0	> 0
3	> 0	> 0	> 0	0	...	> 0	> 0
...	...	...	...	...	...	...	...
$n_0 - 1$	> 0	> 0	> 0	> 0	...	0	> 0
n_0	> 0	> 0	> 0	> 0	...	> 0	?

Da nach Annahme für alle $n < n_0$ ja $n \boxplus n = 0$ gilt, ist damit die Null für alle Zeilen oberhalb von n_0 und alle Spalten links von n_0 schon 'verbraucht', also kann sowohl in der Spalte oberhalb des Fragezeichens als auch in der Zeile links des

Fragezeichens nirgendwo eine Null stehen, also folgt nach Definition $n_0 \boxplus n_0 = 0$. Damit ist die Proposition bewiesen.

Die soeben bewiesene Eigenschaft der Addition $\boxplus$ ist aber nun ein schon sehr deutlicher Hinweis, ähnlich wie Fingerabdrücke auf einem Messer in der Brust eines Ermordeten. Die möglichen Strukturen abelscher Gruppen sind nämlich mathematisch vollständig bekannt und die Eigenschaft, daß jedes Element die Ordnung 2 hat, wie man in der Sprache der Gruppentheorie die Eigenschaft $n \boxplus n = 0$ nennt, läßt nur noch eine Möglichkeit offen (siehe z.B. [6] oder [7], für unseren Fall reichen sogar schon Argumente der linearen Algebra, denn eine abelsche Gruppe, in der jedes Element die Ordnung 2 hat, ist automatisch Vektorraum über dem Körper mit zwei Elementen):

Wenn $\boxplus$ (wirklich) die Struktur einer abelschen Gruppe auf den natürlichen Zahlen definiert, so kann dies - als abstrakte Gruppe - nur die Gruppe

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

sein.

Man möge sich durch die kompliziert aussehende Formel nicht abschrecken lassen, die Gruppe G ist eigentlich etwas sehr Einfaches: Elemente von G sind endliche Folgen von Nullen und Einsen, also z.B.

0001101 oder 10 oder 110011.

Folgen, die sich nur durch führende Nullen unterscheiden, werden dabei als gleich angesehen, also z.B.

$$000001011101 = 1011101 = 01011101$$

Die Addition in G, die wir mit # bezeichnen wollen, ist komponentenweise gemäß der Tafel

$$\begin{array}{c|cc} \# & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \tag{2}$$

definiert, d.h. es gilt z.B.

$$\begin{array}{rr} & 101110 \\ \# & 1100101 \\ \hline & 1001011 \end{array}$$

Mit anderen Worten: # ist die bekannte Dualzahladdition mit dem einzigen Unterschied, daß der Übertrag weggelassen wird.

Wir wissen nun also, wie die Struktur der Addition $\boxplus$ auf den natürlichen Zahlen sein muß, wenn dadurch wirklich eine abelsche Gruppe definiert sein sollte, wir wissen aber noch nicht, ob letzteres auch tatsächlich der Fall ist. Um das nachzuweisen, muß noch eine Beziehung (=bijektive Abbildung) zwischen den natürlichen Zahlen **N** und G hergestellt werden, unter der die beiden Operationen $\boxplus$ und $\#$ einander entsprechen. Ein naheliegender Kandidat für diese Beziehung ist nun aber leicht gefunden, ich habe ihn durch das Stichwort *Dualzahladdition* eigentlich schon verraten: es ist die bekannte *Dualzahlentwicklung* der natürlichen Zahlen!

$$\mathbf{N} \quad \overset{\text{Dualzahlentwicklung}}{\longleftarrow\text{-}\text{-}\text{-}\longrightarrow} \quad \mathbf{G} \tag{3}$$

Zum Beispiel entspricht also der natürlichen Zahl $6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ das Element 110 in G und dem Element 11011 in G entspricht umgekehrt die natürliche Zahl $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 27$. Da jede natürliche Zahl eine (bis auf führende Nullen) eindeutige Dualzahlentwicklung hat, ist (3) eine bijektive Abbildung, aber eine Frage verbleibt noch: Entspricht unter dieser Korrespondenz die Addition $\boxplus$ in **N** der Addition $\#$ in **G**? Die Antwort ist ja, aber um das zu sehen, wird noch das folgende Ergebnis benötigt:

Lemma 4 *$a_1, ..., a_n, b$ seien Elemente aus G, es sei $b < a_1\#...\#a_n$ [2]. Dann gibt es ein k mit $1 \leq k \leq n$ und ein $a \in G$ mit $a < a_k$, so daß gilt:*

$$b = a_1\#...\#a_{k-1}\#a\#a_{k+1}\#...\#a_k \tag{4}$$

Verbal besagt das Lemma, daß in G Folgendes gilt: Ist ein Element b aus G kleiner als die Summe von n Elementen $a_1, ..., a_n$ aus G, so kann man durch Ersetzen eines geeigneten Summanden a_k durch einen (ebenfalls geeigneten) kleineren Wert a erreichen, daß b gleich der Summe der n Elemente ist. Das Lemma ist von zentraler Bedeutung, daher sei hier auch der Beweis angegeben, obwohl er etwas technisch ist. Außerdem - soviel sei an dieser Stelle schon verraten - ist das Verstehen des Beweises schon ein gutes Training für das Nimspiel.

Beweis des Lemmas: Es gibt eine höchste Stelle j_0, an der sich b und $a_1\#...\#a_n$ unterscheiden. Wegen $b < a_1\#...\#a_n$ muß b an dieser Stelle den Wert 0 und $a_1\#...\#a_n$ den Wert 1 haben. Also gibt es mindestens einen Summanden a_k, der an der Stelle j_0 den Wert 1 hat. Die Zahl a erhält man nun, indem man a an den Stellen $j > j_0$ wie a_k definiert, die Stelle j_0 setzt man auf 0 (das garantiert $a < a_k$) und die Stellen j mit $j < j_0$ setzt man so, daß die gewünschte Identität (4) gilt. Dies ist problemlos möglich, da wir es ja mit der Dualzahladdition *ohne* Übertrag zu tun haben. Damit ist das Lemma schon bewiesen. Die folgende

[2] Vermöge der Dualzahlentwicklung überträgt sich die '<'-Relation der natürlichen Zahlen auf G.

Darstellung illustriert die Argumentation:

$$\begin{array}{rccc}
 & & j_0 & \\
a_1 & ......1...0.. & . & .... \\
\# \ ... & ... & . & ... \\
\# \ a_k & .... & 1 & .... \\
\# \ ... & ... & . & ... \\
\# \ a_n & .... & . & .... \\
\hline
a_1\#...\#a_n & \underbrace{1...01...} & 1 & ...1.1....0...1.0... \\
 & = & & \\
b & \overbrace{1...01...} & 0 & ...0.0....1...1.0... \\
\hline
a_k & \underbrace{...011...} & 1 & ...1.0....0...1.0... \\
 & = & & \\
a & \overbrace{...011...} & 0 & ...0.1....1...1.0...
\end{array}$$

Der Spezialfall $n = 2$ des Lemmas besagt nun nichts anderes, als daß $a_1\#a_2$ die kleinste Zahl ist, die nicht von der Form $a_1\#x$ oder $y\#a_2$ ist mit $x < a_2$ bzw. $y < a_1$ und das ist die Definiton der merkwürdigen Addition! Somit ist nun gezeigt:

- $\boxplus = \#$ d.h.
- $\boxplus =$ 'Dualzahladdition ohne Übertrag' d.h.
- $\boxplus$ definiert auf den natürlichen Zahlen die Struktur einer abelschen Gruppe

Bemerkung. Auch wenn damit eine im algebraischen Sinne komplettere Addition auf den natürlichen Zahlen gefunden ist, so ist zu befürchten, daß dennoch auch in Zukunft wohl nicht auf die herkömmliche verzichtet werden kann.

5 Der Assemblerbefehl XR (Fortsetzung)

Zu erklären, weshalb es möglich ist, die Inhalte von Registern im Gegensatz zu Blumentöpfen auf der Fensterbank ohne Zwischenablageplatz zu vertauschen, ist nun nicht mehr schwer. Der Inhalt eines Registers ist eine Folge von Nullen und Einsen und kann somit als Element von G angesehen werden und auch der Befehl XR hat eine Interpretation in G: das 'ausschließende oder' ist nichts anderes als die Addition $\#$ in G (siehe (1) und (2)).

Der Trick schließlich funktioniert, weil für alle Elemente a aus G gilt: $a\#a = 0$.

Befehlsfolge	Register R1	Register R2
Ausgangsstellung	r_1	r_2
$XR\ R1\ R2$	$r_1\#r_2$	r_2
$XR\ R2\ R1$	$r_1\#r_2$	$r_2\#(r_1\#r_2) = r_1$
$XR\ R1\ R2$	$(r_1\#r_2)\#r_1 = r_2$	r_1

Bemerkung. 1.) Natürlich gibt es das 'ausschließende oder' nicht nur im MVS-Assembler, sondern auch in vielen anderen Programmiersprachen. Daß ich gerade den Befehl in dieser Sprache ausgewählt habe, hat nur die erwähnten historischen Gründe.
2.) Von Peter Edelmann und Holger Lutz habe ich erfahren, daß auch in modernen (Stand: 1998) EDV-Systemen die algebraische Interpretation der Antivalenz ausgenutzt wird. So wird der Befehl benutzt, um zwei Graphiken auf dem Bildschirm temporär zu überblenden, indem bitweise die Antivalenz $a\#b$ gebildet wird. Dann sind leicht verfremdet beide Bilder erkennbar. Soll das ursprüngliche Bild wiederhergestellt werden, wird erneut b addiert, womit wegen $a\#b\#b = a$ das gewünschte Ergebnis erzielt wird.

6 Gewinnstellungen im Nimspiel

Es fehlt noch die Auflösung der Aufgabe, Gewinnstellungen im Nimspiel zu charakterisieren. Betrachten wir dazu zu den Beispielen aus Kapitel 1 spaßeshalber die Dualzahldarstellung der Hölzchenanzahlen in den einzelnen Stapeln und bilden die Summe bezgl. der merkwürdigen Addition $\boxplus$ bzw. $\#$.

Beispiel 1

Stapel	Anzahl Hölzchen	Dualzahldarstellung
1	1	1
2	1	1
	Summe #	0

Beispiel 2

Stapel	Anzahl Hölzchen	Dualzahldarstellung
1	2	10
2	2	10
	Summe #	0

Beispiel 3

Stapel	Anzahl Hölzchen	Dualzahldarstellung
1	1	1
2	2	10
3	3	11
	Summe #	0

Beispiel 4

Stapel	Anzahl Hölzchen	Dualzahldarstellung
1	9	1001
2	8	1000
3	3	11
4	7	111
5	5	101
	Summe #	0

Die Summe ist immer Null und das ist kein Zufall:

Theorem 5 *Eine Stellung mit n Stapeln ist genau dann eine Gewinnstellung, wenn gilt:*

$$a_1\#...\#a_n = 0$$

(a_i = Anzahl Hölzchen des i-ten Stapels)

Beweis: Zu zeigen ist nur, daß 1.) eine Stellung mit $a_1\#...\#a_n = 0$ (Gewinnstellung) zwangsläufig zu einer Stellung mit $a_1\#...\#a_n \neq 0$ (Verluststellung) führt und daß aus einer Stellung mit $a_1\#...\#a_n \neq 0$ durch einen optimalen Zug wieder die Summe 0 hergestellt werden kann.

Zu 1.): Es sei $a_1\#...\#a_n = 0$. Durch einen Spielzug ändert sich genau ein a_i, also ändert sich auch die Summe, also ist sie dann ungleich 0.

Zu 2.): Sei $a_1\#...\#a_n \neq 0$, dann gilt also $0 < a_1\#...\#a_n$. Nach dem zentralen Lemma (4) gibt es dann ein k ($1 \leq k \leq n$) und ein $a < a_k$, so daß $a_1\#...\#a_{k-1}\#a\#a_{k+1}\#...\#a_n = 0$ gilt. Ein optimaler Spielzug ist somit die Entfernung von $a_k - a$ Hölzchen aus dem k-ten Stapel (hierbei ist '-' ganz klassisch, also als übliche Subtraktion, zu verstehen).

Sehen wir uns ein Beispiel an. Ausgangspunkt sei die folgende Stellung mit fünf Stapeln:

3	11
5	101
7	111
8	1000
9	1001
Summe #	0000

Es handelt sich also um eine Gewinnstellung, d.h. der Spieler, der jetzt am Zug ist (Spieler 1), hat schon verloren. Nehmen wir an, er entnimmt dem Stapel mit

5 Hölzchen ein Hölzchen, so entsteht die folgende Verluststellung:

3	11
4	100
7	111
8	1000
9	1001
Summe #	0001

Spieler 2 hat nun mehrere Möglichkeiten, wieder eine Gewinnstellung herzustellen. Da die Summe 1 ist, erreicht er dies, wenn er einem der Stapel mit ungerader Anzahl genau ein Hölzchen entnimmt. Jeder andere Zug führt zu einer Verluststellung und Spieler 1 hätte dann die Chance, das Spiel doch noch zu seinen Gunsten zu entscheiden.

Spielen wir eine zweite Variante durch: Nehmen wir an, daß Spieler 1 anstelle seines oben angegebenen ersten Zugs dem Stapel mit 8 Hölzchen zwei entnimmt. Dann ergibt sich folgendes Bild:

3	11
5	101
7	111
6	110
9	1001
Summe #	1110

Jetzt hat Spieler 2 nur eine einzige Möglichkeit, wieder eine Gewinnstellung zu erzeugen. Er muß dem Stapel mit 9 Hölzchen (dem einzigen, der Einfluß auf die 1 an der ersten Stelle nehmen kann) 2 Streichhölzer entnehmen.

7 Das Nimspiel in der Praxis

Nach den Ausführungen des vorigen Abschnitts ist das Nimspiel vollständig entschlüsselt und es ist nicht mehr als eine leichte Übungsaufgabe, ein EDV-Programm zu schreiben, das perfekt spielen kann. Will man allerdings ohne maschinelle Unterstützung das Spiel gemäß der soeben gewonnenen Erkenntnisse beherrschen, so muß man schon ganz erhebliche Fertigkeiten im Kopfrechnen (mit Dualzahlen) haben. Eine Alternative könnte es sein, möglichst viele Gewinnstellungen auswendig zu lernen, aber auch dies ist ein mühevolles Geschäft. Eine einzige Streichholzschachtel mit 38 Hölzchen erlaubt 148.785 unterschiedliche Spielstellungen und bei Verwendung aller Hölzchen allein 26.015 unterschiedliche Ausgangspositionen.

Dennoch, gegen einen unbedarften Gegenspieler dürfte es ausreichend sein, sich einige einfache Gewinnstellungen zu merken, z.B. die in der folgenden Tabelle enthaltenen:

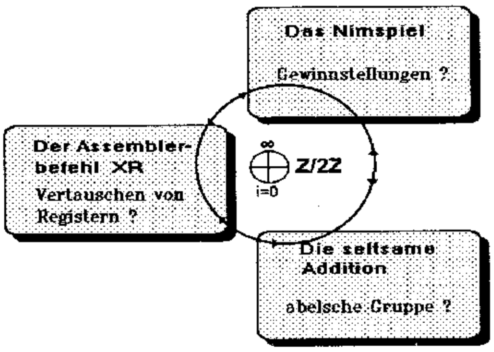
Allgemeine Form	Beispiele
(n, n)	(1,1) (2,2) (3,3) ...
(1, 2n, 2n+1)	(1,2,3) (1,4,5) ...
(2, 4n, 4n+2)	(2,4,6) (2,8,10) ...
(2, 4n+1, 4n+3)	(2,5,7) (2,9,11) ...
(3, 4n+1, 4n+2)	(3,5,6) (3,9,10) ...
(3, 4n, 4n+3)	(3,4,7) (3,8,11) ...
(4, 8n+k, 8n+4+k)	(4,8,12) (4,9,13) (4,10,14) (4,11,15)
mit k=0, 1, 2, 3)	(4,16,20) ...
(2,3,4,5)	

Nützlich ist ferner, sich zu merken, daß die Vereinigung von Gewinnstellungen wieder eine Gewinnstellung ist. Vereinigung bedeutet hierbei, die Stellungen zusammenzufassen, ohne daß Stapel zusammengelegt werden. Z.B. ist die Vereinigung der Stellungen (2,4,6) und (4,11,15) die Stellung (2,4,4,6,11,15).

Zum Abschluß dieses Abschnitts noch ein paar Literaturhinweise: Manfred Börgens wies mich darauf hin, daß eine sehr ausführliche Darstellung des Nimspiels in [2] enthalten ist. Dort findet man auch eine Reihe verwandter Spiele, die sich bei genauerem Hinsehen als verkappte Nimspiele entpuppen, sowie eine Darstellung der zentralen Bedeutung des Nimspiels für sogenannte *neutrale Spiele*. Darüberhinaus enthält [2] etliche interessante Literaturhinweise zu dem Thema, von denen der auf die Originalarbeit der mathematischen Entschlüsselung des Nimspiels [4] an dieser Stelle hervorgehoben sei. Ebenfalls sehr lesenswert sind die Ausführungen zum Nimspiel in [3]. Auch von dieser aktuellen Quelle habe ich erst lange nach dem Vortrag erfahren.

8 Schlußbemerkung

Nachdem die Rätsel geklärt und die Fragen beantwortet sind, ist jetzt auch klar, welcher Zusammenhang zwischen den drei Fragestellungen besteht: In allen drei Fällen ist die algebraische Struktur der Gruppe G letztlich verantwortlich für die überraschenden Phänomene. Dies ist kein Zufall. Algebraische Struktur steht für Symmetrie, für eine über das Normalmaß hinausgehende Regelmäßigkeit und wo immer man entdeckt, daß ein Objekt der realen Welt in Beziehung zu einer algebraischen Struktur steht, ist zu erwarten, daß die Eigenschaften der algebraischen Struktur nichttriviale und häufig überraschende Interpretationen in der realen Welt haben.



Literatur

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Gewinnen - Strategien für mathematische Spiele, 1-4*, 1985/86, Braunschweig, Wiesbaden

[2] C. L. Bouton: *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Ann. of Math., Princeton (2), (1901-02) 35-39

[3] L.-A. Bawden (Hrsg.), W. Tichy: *ro-ro-ro-Filmlexikon, 1 Filme A*-J, 1978, Reinbek bei Hamburg

[4] G.H. Hardy, E.M. Wright: *Einführung in die Zahlentheorie*, 1958, R. Oldenbourg, München

[5] S. Lang: *Algebra*, 3. Auflage, 1971, Reading Massachusetts u.a.

[6] B.L. van der Waerden: *Algebra I* und *II*, 1966 bzw. 1967, Berlin Heidelberg New York