

Katrin Arheit

Regressionsverfahren zur Schätzung
des Betafaktors im CAPM

Friedberger Hochschulschriften Band 37

Katrin Arbeit

Regressionsverfahren zur Schätzung
des Betafaktors im CAPM

Friedberger Hochschulschriften Band 37

Friedberger Hochschulschriften Band 37

© 2013 Katrin Arbeit, Friedberg

Herausgeber der Friedberger Hochschulschriften:
Die Dekaninnen und Dekane des Campus Friedberg
der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Einzelne Hochschulschriften auch online abrufbar:
www.thm.de/bibliothek/hochschulschriften

ISSN 1439-1112

PLATZHALTER

ab hier den Text der Arbeit ab dem
Inhaltsverzeichnis einfügen

Regressionsverfahren zur Schätzung des Betafaktors im CAPM

Bachelorarbeit

Katrin Arheit

Studiengang Wirtschaftsmathematik

Büdingen, im September 2013

Referent: Prof. Dr. Kai Bruchlos

Korreferent: Prof. Dr. Oliver Steinkamp

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	5
Tabellenverzeichnis	6
Abkürzungsverzeichnis	7
Symbolverzeichnis	8
1 Einleitung	13
1.1 Ausgangssituation und Problemstellung	13
1.2 Aufbau der Arbeit	15
2 Modelltheoretische Grundlagen	17
2.1 Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)	18
2.1.1 Die Kapitalmarktlinie	18
2.1.2 Die Wertpapierlinie	20
2.2 Das Marktmodell	24
2.3 Der Betafaktor	26
3 Datenbasis	28
4 Schätzverfahren im Regressionsmodell für den Betafaktor im CAPM	34
4.1 Mathematisches Modell der multiplen linearen Regression mit KQ-Schätzern ...	35
4.2 Anwendung des Regressionsmodells auf den Betafaktor im CAPM	38
4.3 KQ-Schätzung im CAPM	39
4.3.1 Einfache KQ-Schätzung	40
4.3.2 Rekursive KQ-Schätzung	42
4.4 Rekursive diskontierte KQ-Schätzung im CAPM	43
4.5 Vergleich der Ansätze	48
5 Schätzungen und Beurteilung	50
6 Zusammenfassung und Ausblick	53
6.1 Zusammenfassung	53
6.2 Ausblick	54
Anhang A: Beweis zu (4.10)	55
Anhang B: Ergebnisse der einfachen linearen Regression	56
Anhang C: Ergebnisse der rekursiven KQ-Schätzung	61

Anhang D: Ergebnisse der RDLS-Schätzung.....	64
Anhang E: Vergleich RDLS-Schätzung mit einfacher KQ-Schätzung	67
Anhang F: Beweis zu Satz 4.3.....	68
Anhang G: Beweis zu Proposition 4.1	70
Anhang H: Ergebnisse der Regression mit falscher Berechnung der Einmonatsrenditen ...	72
Datenverzeichnis	75
Literaturverzeichnis	77

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Aktienkurse und Handelsvolumen von MICROSOFT und YAHOO	14
Abbildung 2 Die Kapitalmarktklinie	19
Abbildung 3 Die Wertpapierlinie.....	23
Abbildung 4 Regressionsgerade des Marktmodells	25
Abbildung 5 Einmonats-EURIBOR vom 30.12.1998 bis 11.02.2008	29
Abbildung 6 Beispiel einfache lineare Regression	41
Abbildung 7 Beispiel rekursive KQ-Schätzung	43
Abbildung 8 Beispiel RDLS-Schätzung	46
Abbildung 9 Beispiel DSS- und RDLS-Schätzung	47
Abbildung 10 RDLS-Schätzung von Becker	48
Abbildung 11 Einfache lineare Regression HDAX/ADIDAS	56
Abbildung 12 Einfache lineare Regression HDAX/BMW	57
Abbildung 13 Einfache lineare Regression HDAX/DAIMLER	58
Abbildung 14 Einfache lineare Regression HDAX/SIEMENS	59
Abbildung 15 Einfache lineare Regression HDAX/TUI.....	60
Abbildung 16 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/ADIDAS	61
Abbildung 17 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/BMW	61
Abbildung 18 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/DAIMLER.....	62
Abbildung 19 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/SIEMENS	62
Abbildung 20 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/TUI.....	63
Abbildung 21 RDLS-Schätzung HDAX/ADIDAS	64
Abbildung 22 RDLS-Schätzung HDAX/BMW	64
Abbildung 23 RDLS-Schätzung HDAX/DAIMLER	65
Abbildung 24 RDLS-Schätzung HDAX/SIEMENS.....	65
Abbildung 25 RDLS-Schätzung HDAX/TUI.....	66

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Datensätze rekursive KQ-Schätzung HDAX-SIEMENS	42
Tabelle 2 Datensätze RDLS-Schätzung HDAX-SIEMENS	45
Tabelle 3 Beispiel für KQ-Schätzer und DSS-Schätzer	47
Tabelle 4 Regressions-Statistik HDAX/ADIDAS	56
Tabelle 5 Regressions-Statistik HDAX/BMW	57
Tabelle 6 Regressions-Statistik HDAX/DAIMLER.....	58
Tabelle 7 Regressions-Statistik HDAX/SIEMENS	59
Tabelle 8 Regressions-Statistik HDAX/TUI	60
Tabelle 9 Vergleich RDLS-Schätzungen - einfache KQ-Schätzungen.....	67
Tabelle 10 Regressions-Statistik - erste Regression SIEMENS.....	72
Tabelle 11 Regressions-Statistik - zweite Regression SIEMENS.....	73
Tabelle 12 Regressions-Statistik - dritte Regression SIEMENS	73
Tabelle 13 Regressions-Statistik - vierte Regression SIEMENS.....	74
Tabelle 14 Regressions-Statistik - erste Regression ADIDAS.....	74

Abkürzungsverzeichnis

BLUE	Best Linear Unbiased Estimator
CAPM	Capital Asset Pricing Model
DAX	Deutscher Aktienindex
DSS	Discounted Sum of Squares
EURIBOR	Euro Interbank Offered Rate
HDAX	Hundert Werte Deutscher Aktienindex
KQ-Schätzung	Kleinste-Quadrate-Schätzung
MDAX	Mid-Cap Deutscher Aktienindex
OLS	Ordinary Least Squares
RDLS	Recursive Discounted Least Squares
RLS	Recursive Least Squares
TecDAX	Technologie-Werte Deutscher Aktienindex

Symbolverzeichnis

a_i	Schätzer für α_i
a_{it}	Aktien-Schlusskurs zum Zeitpunkt t
a_{mt}	Index-Schlusskurs zum Zeitpunkt t
a_t	Schlusskurs zum Zeitpunkt t
b_o	Schätzer für β_0
b_{ot}	Schätzer für jeden Zeitpunkt t
b_1	Schätzer für β_1
b_{1t}	Schätzer für jeden Zeitpunkt t
b_i	Schätzer für β_i
b_0^{DSS}	Rekursiver diskontierter KQ-Schätzer
b_1^{DSS}	Rekursiver diskontierter KQ-Schätzer
b_0^{KQ}	Einfacher KQ-Schätzer
b_1^{KQ}	Einfacher KQ-Schätzer
b_{0t}^{RLS}	Rekursiver KQ-Schätzer für jeden Zeitpunkt t
b_{1t}^{RLS}	Rekursiver KQ-Schätzer für jeden Zeitpunkt t
$b_{1t}^{\delta_t}$	RDLS-Schätzer von Becker
c_0	Schätzer für γ_0
c_1	Schätzer für γ_1
COV_{im}	Kovarianz zwischen Wertpapier i und dem Marktportfolio m

c_1^{KQ}	Einfacher KQ-Schätzer
$E(\dots)$	Erwartungswert von (...)
g_t	Überrendite des Wertpapiers zum Zeitpunkt t
\bar{g}	Mittelwert
\bar{g}_t	Mittelwert für jeden Zeitpunkt t
\hat{g}_t	Schätzer für g_t
h_t	Überrendite des HDAX zum Zeitpunkt t
\bar{h}	Mittelwert
\bar{h}_t	Mittelwert für jeden Zeitpunkt t
i	Bestimmtes Wertpapier, in Abschnitt 4.1 für die i -te Beobachtung
m	Marktportfolio
n	Anzahl der Datensätze in Abschnitt 4.1
p	Portfolio
r_{it}	Einmonatsrendite der Aktie zum Zeitpunkt t
r_{mt}	Einmonatsrendite des HDAX zum Zeitpunkt t
r_t	Einmonatsrendite zum Zeitpunkt t
R_i	Rendite des Wertpapiers i
R_{it}	Rendite des Wertpapiers i zum Zeitpunkt t
\hat{R}_i	Geschätzte Rendite des Wertpapiers i im Marktmodell
R_f	Risikolose Anlagemöglichkeit/risikoloser Zinssatz
R_{ft}	Risikolose Anlagemöglichkeit/risikoloser Zinssatz zum Zeitpunkt t

R_m	Rendite des Marktportfolios m
R_{mt}	Rendite des Marktportfolios m zum Zeitpunkt t
R_p	Rendite des Portfolios p
R^2	Bestimmtheitsmaß
t	Ein bestimmter Zeitpunkt in der Zeitreihe mit T Daten
T	Anzahl der Datensätze
u_i	Zufallsfehler der Regressionsgleichung im Marktmodell
u_{it}	Zufallsfehler der Regressionsgleichung im Marktmodell zum Zeitpunkt t
u_t	Unabhängige Variable in Abschnitt 4.4
\bar{u}	Mittelwert
v_t	Abhängige Variable in Abschnitt 4.4
\bar{v}	Mittelwert
\hat{v}	Schätzer für v_t
x	Anteil eines Wertpapiers i am Portfolio p in Kapitel 2
x_i	Unabhängige Variable der i -ten Beobachtung
\bar{x}	Mittelwert
x_1, \dots, x_p	Unabhängige Variablen
x_{i1}, \dots, x_{ip}	Unabhängige Variablen für n Datensätze
\mathbf{X}	Matrix der unabhängigen Variablen
y	Abhängige Variable
y_i	Abhängige Variable der i -ten Beobachtung

\bar{y}	Mittelwert
\hat{y}	Schätzer für y_i
\hat{y}_i	Geschätzte abhängige Variable der Beobachtung i
\mathbf{y}	Vektor der n abhängigen Variablen
$\hat{\mathbf{y}}$	Vektor der geschätzten abhängigen Variablen
Y	Zufallsvariable
Y_i	Zufallsvariable der i -ten Beobachtung
α_i	Von der Marktrendite unabhängige Wertpapierrendite
$\hat{\alpha}_i$	Schätzer für α_i
β_i	Berechneter Betafaktor
β_0	Absolutglied
β_1	Regressionskoeffizient der einfachen linearen Regression
$\beta_i R_m$	Systematische Wertpapierrendite
$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$	Regressionskoeffizienten der multiplen Regression
$\hat{\beta}_0$	Schätzer für β_0
$\hat{\beta}_1$	Schätzer für β_1
$\hat{\beta}_i$	Schätzer für β_i
$\boldsymbol{\beta}$	Vektor der Regressionskoeffizienten
$\hat{\boldsymbol{\beta}}$	Vektor der geschätzten Regressionskoeffizienten
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{KQ}$	Vektor der kleinste Quadrate Schätzer
γ_0, γ_1	Regressionskoeffizienten der einfachen linearen Regression

$\hat{\gamma}_0$	Schätzer für γ_0
$\hat{\gamma}_1$	Schätzer für γ_1
δ_t	Diskontierungsfaktor für jeden Zeitpunkt t
ε_i	Fehler
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vektor der Fehler
σ_i	Standardabweichung des Wertpapiers i
σ_p	Standardabweichung des Portfolios p
σ_m	Standardabweichung des Marktportfolios m

1 Einleitung

1.1 Ausgangssituation und Problemstellung

Die Analyse und Beschreibung der Preisbildung von Wertpapieren am Kapitalmarkt ist ein Kern der modernen Kapitalmarktforschung.¹ In der Börsenpraxis ist das Marktverhalten tatsächlich das wichtigste Kennzeichen zur Erklärung von Aktienpreisen.² So bildet das Capital Asset Pricing Model (CAPM) in seinen verschiedenen Varianten einen Grundpfeiler der modernen Finanzmarkttheorie. Ziel dieses Modells ist die Preisbildung und somit die Renditen alternativer Kapitalanlagen zu erklären. Markowitz (1952 und 1959) legt das Fundament für die Herleitung des CAPM mit der Analyse des Anlageverhaltens eines rational handelnden, risikoaversen Investors, der sich für ein Portfolio allein wegen der mit ihm verbundenen erwarteten Rendite und Varianz entscheidet. Ist ein Risiko vorgegeben, halten Anleger nur das Portfolio mit der höchsten erwarteten Rendite. Es existieren unendlich viele Portefeuilles, weil sich für jedes Risiko ein anderes effizientes Portfolio ergibt. Tobin (1958), Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966) entwickeln es weiter und nahezu zeitgleich ist das Sharpe-Lintner-CAPM entstanden.³

Dieses Modell geht von einem gleichgewichtigen Kapitalmarkt aus und postuliert eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite eines breit diversifizierten Marktportfolios, in dem die Einflussfaktoren in einem Faktor zusammengefasst sind, und der erwarteten Rendite eines Wertpapiers.⁴ Der Betafaktor, der Koeffizient der zugehörigen Regressionsgleichung, ist eine wichtige Kennzahl der technischen Aktienanalyse, da er eine Maßzahl für die Aggressivität eines Wertpapiers ist.⁵ In der Literatur kommt dem Betafaktor als Maß für das systematische Risiko von Aktien sehr große Aufmerksamkeit zu.⁶ Sowohl für Börsenanalysten als auch für die wissenschaftliche Theorie stellt seine Berechnung eine

¹Vgl. *Opfer, H.*, 2004, S. 1

²Vgl. *Becker, S.*, 2008, S. 2

³Vgl. *Warfsmann, J.*, 1993, S. 1

⁴Vgl. *Opfer, H.*, 2004, S. 3

⁵Vgl. *Hausmann, W.*, 2002, S. 47

⁶Vgl. *Pfennig, M.*, 1993, S. 1

bedeutende Rolle dar.⁷ In der Praxis wird der Betafaktor meist als konstanter Parameter über die einfache KQ-Schätzung geschätzt.⁸ Anhand der folgenden Beispiele aus dem Jahr 2008 lässt sich jedoch die Stabilitätsannahme relativ einfach widerlegen.

Der Handyhersteller NOKIA kündigt am 15. Januar an, seine Produktionsstätte in Bochum zu schließen. NOKIA ist ein Unternehmen mit historisch variierender Produktionspalette, das sowohl rasante Entwicklungen wie auch Sättigung des Marktes miterlebt hat und nun entscheidende Veränderungen in der Produktion vorsieht. Dass sein Wert immer mit der gleichen Sensibilität auf das Gesamtmarktgeschehen reagiert, ist prinzipiell nicht zu erwarten.

Aufgrund der Subprime-Krise kommt es am 21. Januar an den Börsen weltweit zu großen Kurseinbrüchen. Innerhalb eines Tages verliert der deutsche Aktienindex (DAX) mehr als sieben Prozent, seit dem 21. Dezember 2007 weist der breitere HDAX einen Monatsverlust von annähernd 16 Prozent auf. In den Zeitreihen dieser beiden Indizes ist von einem deutlichen Strukturbruch auszugehen. Daher stellt sich die Frage, was es für ein spezielles Wertpapier bedeutet, dass ein Markt wie der DAX bzw. der HDAX solchen erheblichen Kursverlusten unterliegt.

Der weltgrößte Softwarehersteller MICROSOFT legt einem der bekanntesten Internetanbieter YAHOO ein Übernahmeangebot vor. Dies wurde am 1. Februar bekannt und die Aktienkurse der beiden Unternehmen entwickelten sich wie folgt:

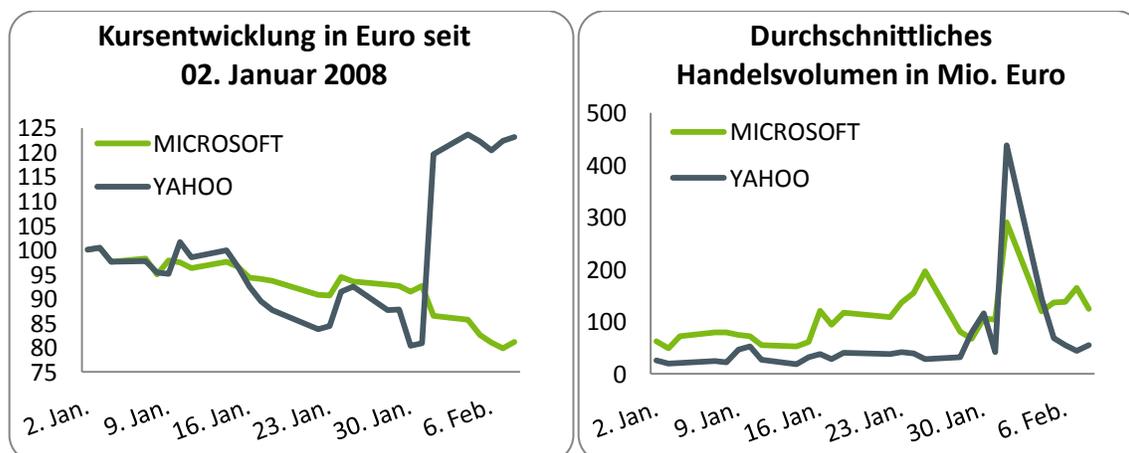


Abbildung 1 Aktienkurse und Handelsvolumen von MICROSOFT und YAHOO⁹

⁷Vgl. Becker, S., 2008, S. 2

⁸Vgl. Steiner, M./Bruns, C., 2007, S. 64 und Stellbrink, J./Brückner, C., 2011, S. 2

Die linke Grafik zeigt die Aktienkurse im Zeitraum 02.01.2008 bis 08.02.2008 und die rechte Grafik stellt im selben Zeitraum die Marktaktivitäten bezüglich der beiden Aktien dar.

Anhand dieser drei Beispiele will Becker zeigen, dass ein variierender Regressionskoeffizient weitaus realitätsnäher und wahrscheinlicher ist, als das konstante Beta des ursprünglichen CAPM.¹⁰

Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeit ist es gewesen, die von Becker verwendeten Verfahren auf aktuelle Zeitreihen anzuwenden und die neuen Ergebnisse mit den alten zu vergleichen. Dafür ist es notwendig, die von Becker erzielten alten Ergebnisse zu reproduzieren. Hierbei sind grundsätzliche Schwierigkeiten aufgetreten, die das Verfolgen des ursprünglichen Zieles mit Blick auf den Zeitrahmen nicht mehr erlaubt hat. Da Beckers Darstellung nicht immer konsistent und teilweise sogar falsch ist, sind folgende Ziele anzustreben:

1. Reproduzieren einiger Ergebnisse von Becker
2. Exakte Darstellung der Verfahren
3. Behebung der Fehler
4. Anwendung des neuen Schätzverfahrens

1.2 Aufbau der Arbeit

Der Aufbau dieser Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 erfolgt die Darstellung der modelltheoretischen Grundlagen wie das CAPM, das Marktmodell und die wichtige Kennzahl, der Betafaktor. Dazu beschreibt Kapitel 3 die Modellierung der Daten, bevor sie für die verschiedenen Regressionsverfahren benutzt werden. Das Kapitel 4, das die Schätzverfahren im Regressionsmodell für den Betafaktor im CAPM zeigt, ist in mehrere Abschnitte

⁹In Anlehnung an *Becker, S., 2008, S. 3*. Die Aktienkurse vom 02.01.2008 bis 08.02.2008 sind auf 100 normiert. Die Daten sind auf der CD enthalten.

¹⁰Vgl. *Becker, S., 2008, S. 2f*

eingeteilt. Zuerst wird das multiple lineare Regressionsmodell bis hin zum einfachen linearen Regressionsmodell und die Anwendung des Regressionsmodells auf den Betafaktor im CAPM beschrieben. Außerdem sind die einfache, die rekursive und die rekursive diskontierte KQ-Schätzung im CAPM dargestellt. Danach werden die Ansätze der Schätzverfahren verglichen. In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der Schätzungen beurteilt. Eine Zusammenfassung erfolgt in Kapitel 6. Zuletzt wird ein kurzer Ausblick hinsichtlich der weiteren Möglichkeiten gegeben.

2 Modelltheoretische Grundlagen

Die Ausführungen dieses Kapitels sind in Anlehnung an *Steiner, M./Bruns, C., 2007, S. 3ff* verfasst.

In diesem Kapitel werden zwei Modelle der Kapitalmarkttheorie vorgestellt: Das Capital-Asset-Pricing-Model (CAPM) mit den beiden zentralen Teilen der Kapitalmarktlinie sowie der Wertpapierlinie und das Marktmodell. Beide gehen davon aus, dass für die Preisfindung von Anlagemöglichkeiten den Parametern Rendite und Risiko eine zentrale Bedeutung zukommt. Die Erklärung für die Wechselwirkung zwischen der zu erwartenden Rendite eines Wertpapiers und dessen Risiko stehen im Vordergrund der Betrachtung. Die Modelle der Kapitalmarkttheorie versuchen verschiedenartig zu klären, welche Rendite bei welchem Risiko erwartet werden darf. Das CAPM ist ein Modell zur Preisbildung in einem Kapitalmarkt, in dem sich alle Investoren gemäß den folgenden Regeln verhalten und alle die gleichen Bedingungen vorfinden:

- „Für alle Investoren sind Erwartungswert und Standardabweichung der Rendite die allein maßgeblichen Größen eines Portfolios.
- Alle Investoren wollen eine maximale Rendite bei möglichst kleinem Risiko, dürfen aber unterschiedliche Risikopräferenzen haben.
- Alle Investoren sind vollständig informiert und haben die gleichen Einschätzungen bezüglich der Rendite und des Risikos der vorhandenen risikobehafteten Anlageform.
- Alle Investoren planen für die gleiche Periode.
- Alle Investoren haben den gleichen risikolosen Zinssatz, zu dem sie Geld leihen und verleihen können.
- Jedes Wertpapier kann in beliebig kleinem Umfang gekauft werden.

- Steuern und Transaktionskosten (d. h. mit Kauf und Verkauf verbundene Kosten) gibt es nicht oder sind zumindest für die Anlagestrategien der Investoren unerheblich.“¹¹

Ein Kapitalmarkt, der diese Eigenschaften besitzt, heißt auch *vollkommener Kapitalmarkt*.¹² Zudem werden Wertpapiere vereinfachend auf ihre finanzielle Größe reduziert und daher durch einen deterministischen oder stochastischen Zahlungsstrom charakterisiert.

2.1 Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Das CAPM wurde von Sharpe, Lintner und Mossin entwickelt und baut auf die *Portfoliotheorie* auf. In der Portfoliotheorie bleibt die Frage unbeantwortet, welcher Teil des Risikos nicht durch Diversifikation zu beseitigen und aus diesem Grund relevant für den Anleger ist, bzw. vom Markt im Gleichgewicht vergütet werden muss. Daraus entstehen folgende zwei Fragen:

1. Welche Rendite kann von einem Portfolio im Kapitalmarktgleichgewicht erwartet werden, wenn es neben den risikotragenden Anlageformen auch eine risikofreie Anlageform gibt?
2. Welcher Preis ist im Kapitalmarktgleichgewicht einem Wertpapier, das Teil eines Portfolios ist, zuzumessen und welches Risiko ist für dieses Wertpapier relevant?

2.1.1 Die Kapitalmarktlinie

Die erste Frage wird durch die Kapitalmarktlinie beantwortet. Die Kapitalmarktlinie ist eine Gerade, die durch die effiziente Menge in einem vollkommenen Kapitalmarkt im

¹¹Hausmann, W., 2002, S. 39

¹²Vgl. Hausmann, W., 2002, S. 39

Gleichgewichtszustand gegeben ist. Sie verläuft durch das Marktportfolio m mit den Werten σ_m und R_m und die risikolose Anlageform $(0|R_f)$.¹³

Es kommen die Bedingungen hinzu, dass ein risikoloser Zinssatz existiert, zu dem zu jeder Zeit beliebig viel Geld aufgenommen und angelegt werden kann und, dass bei den Anlegern bezüglich der Rendite aller Wertpapiere homogene Erwartungen bestehen.

Dadurch entsteht eine Mischung einer risikolosen Anlagemöglichkeit und der individuellen Wertpapierportfolios. Die individuellen Portfolios können überall auf der Effizienzkurve liegen.

CAPM – Kapitalmarktlinie

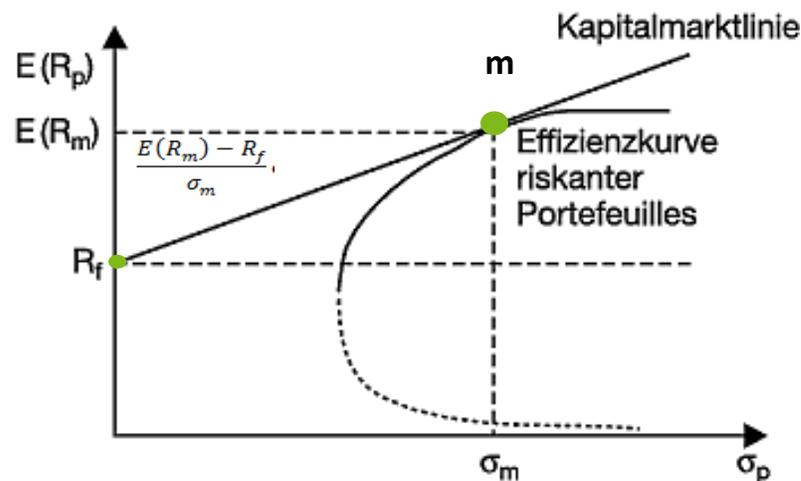


Abbildung 2 Die Kapitalmarktlinie¹⁴

In Abbildung 2 ist die Effizienzgerade dargestellt, die alle anderen Geraden bzgl. der Risikoeffizienz dominiert. Diese Gerade wird als Kapitalmarktlinie bezeichnet. Zwei Punkte determinieren die Lage dieser Geraden: Der Ordinatenabschnitt R_f und das Marktportfolio m . - In Abhängigkeit der individuellen Risikopräferenz ergibt sich ein effizientes Portfolio auf der Kapitalmarktlinie. Die Kapitalmarktlinie ist unabhängig von individuellen Risikopräferenzen, also für alle Investoren gleich.

¹³Vgl. Hausmann, W., 2002, S. 41

¹⁴In Anlehnung an Internetquelle 1

Die so entstehende Kapitalmarktklinie ist mathematisch eine lineare Gleichung aus den Parametern Achsenabschnitt und Steigung, die auch in Abbildung 2 zu sehen sind

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m} \sigma_p \quad (2.1)$$

mit:

$E(R_p)$ als Renditeerwartungswert des Portfolios p ,

$E(R_m)$ als Renditeerwartungswert des Marktportfolios m ,

σ_p als Standardabweichung des Portfolios p ,

σ_m als Standardabweichung des Marktportfolios m und

R_f als risikolose Anlagemöglichkeit.

Die Steigung $\frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m}$ der Geraden ist der *Marktpreis des Risikos* und der konstante Term R_f kann als *Marktpreis der Zeit* angesehen werden.¹⁵ Die Kapitalmarktklinie sagt also aus: Verändert sich das Risiko σ_p , resultiert daraus, dass sich die Renditeerwartung ebenso ändert.

2.1.2 Die Wertpapierlinie

Eine weitere Quelle für diesen Abschnitt ist *Hausmann, W.*, 2002, S. 43f.

Mit Hilfe der Kapitalmarktklinie wurde die Frage nach der Renditeerwartung riskanter Portfolios beantwortet. Jetzt interessiert welchen Preis einzelne Wertpapiere des Marktportfolios im Kapitalmarktgleichgewicht haben. Man geht vom Marktportfolio aus, um den Gleichgewichtspreis für einzelne Wertpapiere zu bestimmen. Da im Marktportfolio jedes risikotragende Wertpapier gemäß seinem Anteil am Gesamtumlauf aller Wertpapiere vertreten ist, kann der Wert des Wertpapiers im Verhältnis zum Marktportfolio ausgedrückt werden. Folglich kann ein Portfolio gebildet werden, das aus x Teilen des Wertpapiers i und aus $(1 - x)$ Teilen des Marktportfolios m . Somit ergibt sich die Rendite des Portfolios zu

¹⁵Vgl. *Hausmann, W.*, 2002, S. 41

$$E(R_p) = x E(R_i) + (1 - x)E(R_m) \quad (2.2)$$

mit:

x als Anteil des Wertpapiers i am Portfolio p ,

$E(R_i)$ als Renditeerwartungswert des Wertpapiers i ,

$E(R_m)$ als Renditeerwartungswert des Marktportfolios m ,

$E(R_p)$ als Renditeerwartungswert des Portfolios p .

Das Risiko des Portfolios ergibt sich zu:

$$\sigma_p = \sqrt{x^2 \sigma_i^2 + (1 - x)^2 \sigma_m^2 + 2COV_{im}x(1 - x)} \quad (2.3)$$

Die jeweilige Ableitung der beiden Gleichungen zeigt, welchen Effekt die Variation des Anteils des Wertpapiers i auf die Portfoliorendite und das Portfoliorisiko hat:

$$\frac{dE(R_p)}{dx} = E(R_i) - E(R_m) \quad (2.4)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_p}{dx} &= \frac{1}{2} (x^2 \sigma_i^2 + (1 - x)^2 \sigma_m^2 + 2COV_{im}x(1 - x))^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot (2x\sigma_i^2 - 2\sigma_m^2(1 - x) + 2COV_{im} - 4COV_{im}x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Im nächsten Schritt (2.6) und (2.7) wird der Anteil des Wertpapiers i am Portfolio p auf null gesetzt, da der Preis im Gleichgewicht bestimmt werden soll, denn im Marktportfolio m ist das Wertpapier i bereits mit einem Anteil x vertreten. Bei einer zusätzlichen Nachfrage nach diesem Wertpapier würde dies ein Ungleichgewicht bewirken:

$$\left. \frac{dE(R_p)}{dx} \right|_{x=0} = E(R_i) - E(R_m) \quad (2.6)$$

und

$$\left. \frac{d\sigma_p}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{2} (\sigma_m^2)^{-\frac{1}{2}} (-2\sigma_m^2 + 2COV_{im})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - 2\sigma_m^2 + 2COV_{im}}{2(\sigma_m^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{COV_{im} - \sigma_m^2}{\sigma_m}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Werden die beiden verbliebenen Gleichungen (2.6) und (2.7) dividiert, stellen diese das Austauschverhältnis von Rendite und Risiko dar. Es gibt also an, wie viel zusätzliches Risiko bei einer bestimmten Steigung des Erwartungswertes der Rendite in Kauf zu nehmen ist:

$$\left. \frac{\frac{dE(R_p)}{dx}}{\frac{d\sigma_p}{dx}} \right|_{x=0} = \frac{E(R_i) - E(R_m)}{\frac{COV_{im} - \sigma_m^2}{\sigma_m}} \tag{2.8}$$

Die Steigung dieses Austauschverhältnisses von Rendite und Risiko im Tangentialpunkt zwischen Kapitalmarktklinie und Portfoliokurve entspricht exakt der Steigung der Kapitalmarktklinie. Daher lassen sich die Steigung der Kapitalmarktgeraden und das Austauschverhältnis von Rendite und Risiko gleichsetzen. Die *Wertpapierlinie*, auch Security Market Line genannt, ergibt sich durch Auflösen dieser Gleichung nach $E(R_i)$:

$$E(R_i) = R_f + (E(R_m) - R_f) \frac{COV_{im}}{\sigma_m^2} \tag{2.9}$$

mit:

$E(R_i)$ als Renditeerwartungswert des Wertpapiers i ,

$E(R_m)$ als Renditeerwartungswert des Marktportfolios m ,

COV_{im} als Kovarianz zwischen Wertpapier i und dem Marktportfolio m ,

σ_m^2 als Varianz des Marktportfolios m und

R_f als Rendite der risikolosen Anlagemöglichkeit.

Dementsprechend setzt sich die Rendite einer risikobehafteten Anlage aus einem risikolosen Zinssatz und einer Risikoprämie zusammen:

$$E(R_i) = R_f + (E(R_m) - R_f) \frac{COV_{im}}{\sigma_m^2}$$



Risikoloser Zinssatz Risikoprämie

Die Risikoprämie besteht aus zwei Teilen: Zum einen aus dem Marktpreis des Risikos und zum anderen aus der Höhe des Risikos. Die Höhe des Risikos ist wird oft als *Betafaktor* bezeichnet:

$$\beta_i = \frac{COV_{im}}{\sigma_m^2} \quad (2.10)$$

Daraus ergibt sich die *Fundamentalgleichung des CAPM*¹⁶:

$$E(R_i) = R_f + (E(R_m) - R_f)\beta_i \quad (2.11)$$

Die Wertpapierlinie ist in Abbildung 3 dargestellt. Sie beantwortet die Frage, wie ein einzelnes Wertpapier zu bewerten ist.

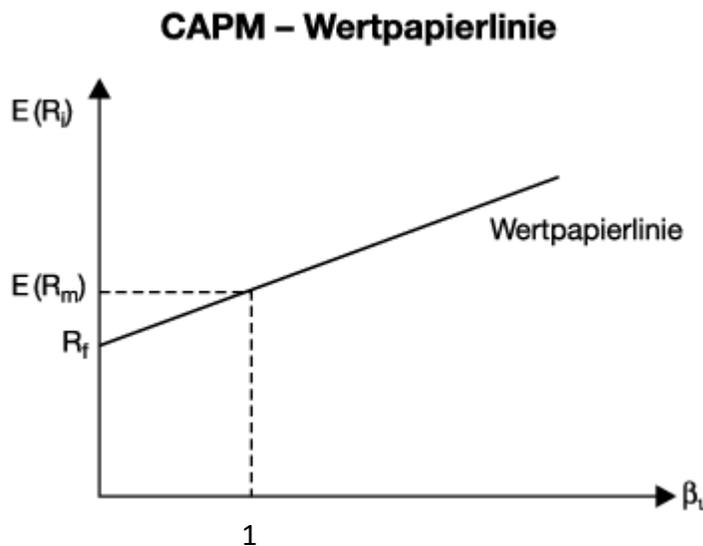


Abbildung 3 Die Wertpapierlinie¹⁷

Für einzelne Wertpapiere im Portfoliozusammenhang ist nur das Beta als Risikomaß relevant, wie anhand der Achsenbeschriftung deutlich wird. Im CAPM wird für die Übernahme

¹⁶Vgl. Hausmann, W., 2002, Satz 27

¹⁷Siehe Internetquelle 1 und Hausmann, W., 2002, S. 46

des unsystematischen Risikos keine Risikoprämie gewährt, da der Betafaktor lediglich das systematische, also das nicht wegdiversifizierbare Marktrisiko widerspiegelt. Dies ist dadurch begründet, dass das unsystematische Risiko durch Diversifikation vollständig eliminiert werden kann.

2.2 Das Marktmodell¹⁸

Ziel des Marktmodells ist es, die Kursentwicklung einer Aktie durch die Entwicklung eines zugehörigen Marktindex zu erklären.¹⁹ Mithilfe historischer Zeitreihen/Kursen wird versucht den Zusammenhang zwischen der Rendite eines einzelnen Wertpapiers und einem Marktindex zu ermitteln und mit Hilfe des gewonnenen Zusammenhangs zukünftige Renditen des Wertpapiers zu schätzen.

Der Unterschied zwischen dem Marktmodell und dem CAPM ist, dass das Marktmodell einen empirischen Ansatz zur Schätzung und Erklärung zukünftiger bzw. vergangener Aktienrenditen darstellt. Die künftigen Renditen des Marktmodells werden ausschließlich durch den linearen Zusammenhang zum Marktportfolio, das alle Titel eines Marktes gewichtet mit ihren jeweiligen Anteilen beinhaltet, geschätzt und es wird kein risikoloser Zinssatz unterstellt.²⁰

Mit Hilfe einer linearen Einfachregression wird beim Marktmodell eine Schätzung für zukünftige Renditen des Einzeltitels ermittelt, da ein linearer Zusammenhang zwischen der Rendite des einzelnen Wertpapiers und der Rendite des Marktportfolios vorausgesetzt wird. Deshalb ergibt sich folgende lineare Regressionsgleichung:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + u_i \quad (2.12)$$

mit:

α_i als von der Marktrendite unabhängige Wertpapierrendite,

$\beta_i R_m$ als systematische Wertpapierrendite,

¹⁸Siehe hierzu auch *Hausmann, W.*, 2002, S. 33ff

¹⁹Vgl. *Hausmann, W.*, 2002, S. 33

²⁰Siehe Internetquelle 3

R_m als Rendite des Marktportfolios m ,

R_i als Rendite des Wertpapiers i und

u_i als Zufallsfehler.

Die Regressionsfunktion zur Regressionsgleichung lautet

$$\hat{R}_i = a_i + b_i R_m, \quad (2.13)$$

wobei $a_i := \hat{\alpha}_i$ und $b_i := \hat{\beta}_i$

Diese Funktion stellt eine Gerade durch die Punktwolke der Rendite des Marktportfolios und der Rendite des Wertpapiers (Renditepaare) dar. Der Zufallsfehler u_i ist eine Zufallsvariable und erklärt, warum die exakte Beziehung $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m$ nicht gilt. Daher sollte u_i die folgenden Eigenschaften haben, die man üblicherweise von einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Zufallsfehler verlangt:²¹ Der Erwartungswert u_i soll null betragen ($E(u_i) = 0$). Das Modell unterstellt außerdem eine Korrelation von null zwischen der Rendite des Marktportfolios und dem Zufallsfehler u_i und die titelspezifischen Renditen a_i werden als unkorreliert angenommen.

Die nachfolgende Abbildung²² zeigt die Regressionsgerade des Marktmodells. Dabei beschreibt a_i den y -Achsenabschnitt, β_i die Steigung der Geraden und u_i den Abstand von einem Punktepaar zur Geraden.

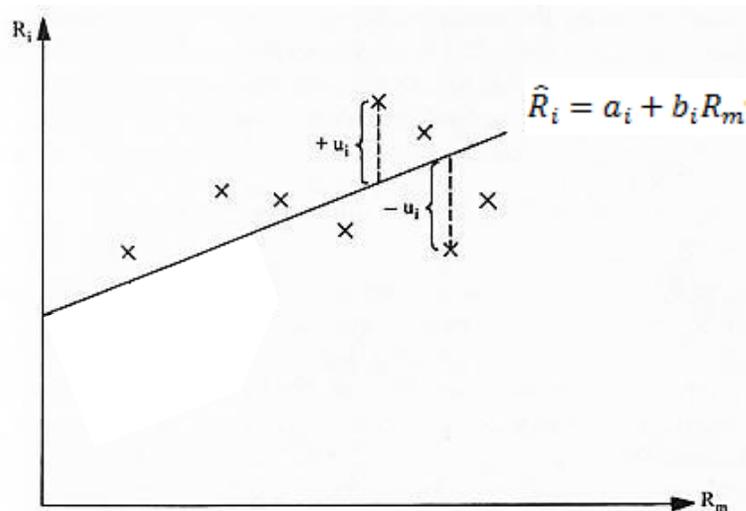


Abbildung 4 Regressionsgerade des Marktmodells

²¹Vgl. Hausmann, W., 2002, S. 34

²²In Anlehnung an Internetquelle 3

Anhand des Bestimmtheitsmaßes R^2 wird die Güte der mittels Regression errechneten Geraden gemessen. Nähert sich der Wert von R^2 an 1, desto besser wird die Renditeentwicklung des Einzelwertes durch den Marktindex erklärt. Das Bestimmtheitsmaß wird wie folgt berechnet:²³

$$R^2 = \beta_i^2 \frac{\sigma_m^2}{\sigma_i^2} \quad (2.14)$$

2.3 Der Betafaktor

Der Betafaktor (vgl. (2.10)) ist ein häufig verwendetes Maß zur Bestimmung des systematischen Risikos eines Wertpapierportfolios im Vergleich zum Markt.²⁴ Systematische Risiken sind jene Risiken, die nicht nur einzelne Titel betreffen, sondern die Gesamtheit aller vergleichbaren Titel. Für Investitionen in Aktien können als systematische Risiken die Änderung der Marktzinsen sowie politische und wirtschaftliche Ereignisse wie z.B Steuerreformen angeführt werden. Ein wichtiger Punkt dabei ist, dass beim Eintreten solcher Ereignisse alle Titel betroffen sind.²⁵

Durch Beobachtungen wurde festgestellt, dass die Renditen einzelner Wertpapiere und somit die Renditen des Wertpapierportfolios, die aus den einzelnen Wertpapieren bestehen, sehr stark mit der Entwicklung des Marktes korrelieren. Das sogenannte *Beta* misst die Sensitivität der Portfoliorenditen gegenüber der Entwicklung des Marktes.²⁶

Das Beta kann positive als auch negative Zahlenwerte annehmen. Dabei weisen positive Werte für das Beta auf eine gleich ausgerichtete Renditeänderung des untersuchten Wertpapiers mit dem verwendeten Marktindex hin und negative Beta-Werte weisen auf eine gegenläufige Renditeentwicklung hin. Nachstehend einige Beispiele für Beta-Werte und ihre Bedeutung:

²³(2.14) steht so im *Steiner, M./Bruns, C., 2007, S. 37*. Diese Darstellung ist so nicht richtig. Es sind nicht die theoretischen Parameter zu verwenden, sondern die empirischen Parameter.

²⁴Vgl. *Fischer, B., 2010, S. 439*

²⁵Vgl. *Fischer, B., 2010, S. 391*

²⁶Vgl. *Fischer, B., 2010, S. 440* und *Hausmann, W., 2002, S. 34*

- Für $\beta_i = 1$: Steigt/Fällt die Rendite des Marktindex, so ist im Durchschnitt auch mit einem Renditeanstieg/-rückgang des untersuchten Wertpapiers i in gleicher Richtung zu rechnen.
- Für $\beta_i = 2$: Steigt/Fällt die Rendite des Marktindex, so ist im Durchschnitt mit einem doppelten und damit überproportionalen Renditeanstieg/-rückgang des untersuchten Wertpapiers i in gleicher Richtung zu rechnen.
- Für $\beta_i = 0,5$: Steigt/Fällt die Rendite des Marktindex, so ist im Durchschnitt mit der Hälfte des Renditeanstieg/-rückgang des untersuchten Wertpapiers i in gleicher Richtung zu rechnen.²⁷

Wertpapiere, die ein $\beta_i > 1$ besitzen, werden als *aggressive Wertpapiere* bezeichnet. Wertpapiere, die ein $\beta_i < 1$ aufweisen, heißen *defensive Wertpapiere*.²⁸

Negative Beta-Werte sind in der Praxis der Finanzmärkte von äußerster Seltenheit. Die meisten Wertpapiere weisen ein Beta von etwa 0,6 auf und selten weniger. Solche Wertpapiere, die ein negatives Beta aufweisen, geben damit eine gegenläufige Entwicklungsbeziehung zwischen den auf ihren Märkten erzielten Renditeausprägungen zu erkennen. Zeigt der Marktindex z.B. eine ansteigende Tendenz auf, so ist mit einer fallenden Wertpapierrendite zu rechnen.

Der *Betafaktor* sagt also aus: Ändert sich die Rendite des Marktportfolios, so ändert sich ebenso die erwartete Rendite des Wertpapiers i . Damit zeigt er in systematischer Weise den relativen Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite einer individuell risikobehafteten Anlage und der erwarteten Rendite des Marktportfolios der Anlageentscheidung auf.²⁹ Die Neigung eines Wertpapiers zu Kursschwankungen wird auch als *Volatilität* bezeichnet. Das bedeutet, je höher der Betafaktor ist, desto höher ist auch die Volatilität des Wertpapiers.³⁰

²⁷Vgl. Internetquelle 2

²⁸Vgl. Hausmann, W., 2002, S. 35

²⁹Vgl. Internetquelle 2

³⁰Vgl. Hausmann, W., 2002, S. 35

3 Datenbasis

In diesem Kapitel wird beschrieben wie und welche Daten bereinigt werden bevor sie für die einzelnen Schätzungen verwendet werden. Es wird geklärt wie der risikolose Zinssatz und das Marktportfolio des CAPM abgebildet werden. Darüber hinaus wird ein Überblick der Wertpapiere i sowie zur Vorgehensweise im Modell gegeben. Zur Berechnung der Schätzungen wird das Programm Excel verwendet. Alle Daten, die hierfür verwendet werden, befinden sich auf der beigefügten CD mit dem entsprechenden Name der Aktie und der Schätzmethode.

Zunächst werden die Bestandteile beschrieben, die auch Becker für die Auswertung verwendet hat.

Als *risikoloser Zinssatz* wird der *Einmonats-EURIBOR* gewählt, da im Folgenden monatliche Renditen für die Berechnung zugrunde liegen. EURIBOR steht für **Euro Interbank Offered Rate** und bezeichnet den durchschnittlichen Zinssatz (Referenzzinssatz), zu dem viele europäische Banken einander Anleihen in Euro gewähren. Es existieren 15 verschiedene EURIBOR-Zinssätze mit je unterschiedlichen Laufzeiten von einer Woche bis hin zu zwölf Monaten. An jedem Arbeitstag um 11:00 Uhr Central European Time werden die EURIBOR-Werte festgesetzt und allen teilnehmenden Partnern und der internationalen Presse mitgeteilt. Er besteht seit 1999, wobei sich die Höhe in erster Linie durch Angebot und Nachfrage bestimmt. Dabei handelt es sich um Marktzinsen, die von einer großen Anzahl europäischer Banken festgesetzt werden. Es gibt jedoch eine Reihe externer Faktoren, die die Höhe der EURIBOR-Zinssätze stark beeinflussen, wie z.B. das Wirtschaftswachstum oder die Höhe der Inflation.³¹ In Abbildung 5 ist der Einmonats-EURIBOR dargestellt:

³¹Vgl. Internetquelle 4

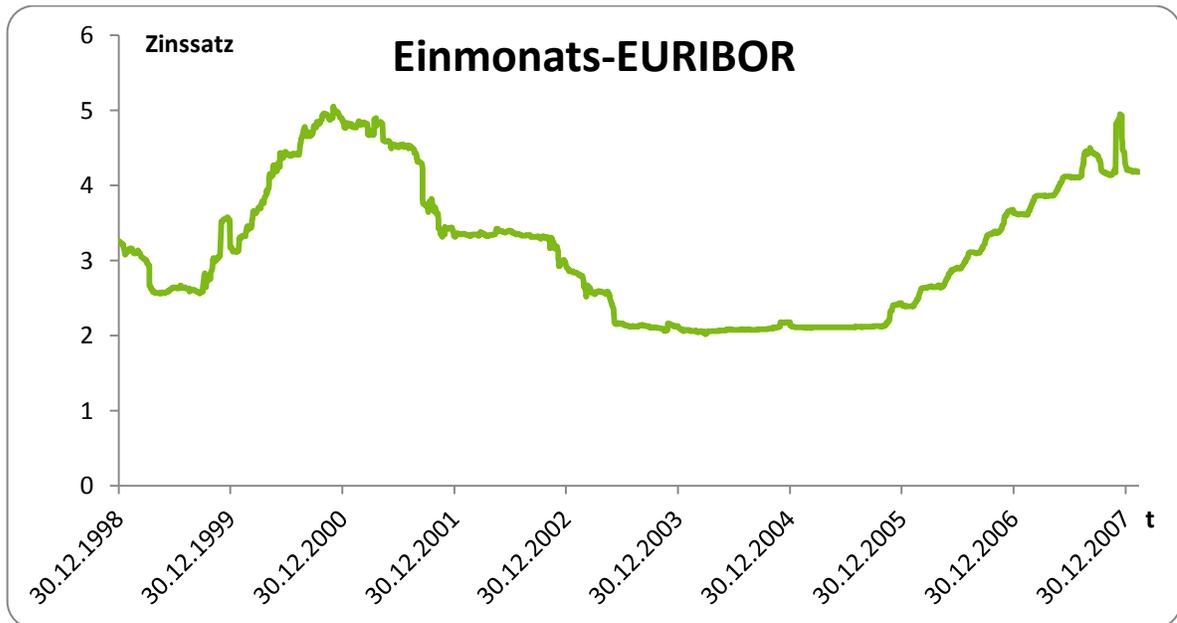


Abbildung 5 Einmonats-EURIBOR vom 30.12.1998 bis 11.02.2008

Hier ist zu sehen, dass der Zinssatz nicht konstant ist und es daher sinnvoll erscheint, diese Entwicklung in das Modell einfließen zu lassen, obwohl das CAPM einen konstanten risikolosen Zinssatz unterstellt. Daher werden die Überrenditen der Wertpapiere und des Marktportfolios in jedem Zeitpunkt t berechnet.

Die Analyse verwendet für das *Marktportfolio* m den Aktienindex HDAX. Das Indexportfolio vom HDAX bilden die 30 Werte vom DAX, die 50 Werte vom MDAX und die 30 Werte vom TecDAX.³² Der HDAX umfasst also die 110 Werte des deutschen Aktienmarktes. Die so genannte Überrendite des Indexes wird aus der historischen Zeitreihe der HDAX Schlusskurse und den Daten des Einmonats-EURIBOR berechnet und im CAPM als Überrendite h_t dargestellt.

Die Daten der betrachteten *Wertpapiere* ADIDAS, BMW, DAIMLER, SIEMENS und TUI werden über die Periode vom 27.11.1998 bis 11.02.2008 benutzt. Es werden auch hier die Schlusskurse der Zeitreihen verwendet.

Da für die Regression die Anzahl von x - und y -Werten gleich sein muss, werden die Daten des HDAX für jedes Wertpapier individuell angepasst. Das bedeutet, fehlt ein Tag bei dem

³²Vgl. Deutsche Börse AG, 2013, S. 9

Wertpapier, wird dieser Tag auch bei dem HDAX entfernt und umgekehrt. So kann die Anzahl der Datensätze für jede Untersuchung variieren.

Die *Periode* der Renditeberechnung in Bezug auf Finanzmarktrenditen sollte nicht zu klein gewählt werden, da z.B. Tages- oder Wochenrenditen sehr sensibel auf eintretende Ereignisse sind und werden bei starken Kursschwankungen im Betrag überproportional groß. Zu große Perioden hingegen würden eine stark einschränkende Bedingung für das Modellieren der Parameter-Variation darstellen. Daher ist die Wahl von *Einmonatsrenditen* am sinnvollsten, da auch der Zeithorizont des Einmonats-EURIBOR genau einen Monat beträgt. Die Daten der Wertpapiere und des HDAX liegen als Tagesdaten der Börsenhandelstage vor und auf diese Datenfülle sollte nicht verzichtet werden. Es können beispielsweise auch monatliche Durchschnittswerte berechnet werden oder es fließt nur ein Datenwert pro Monat in die Schätzung ein, allerdings ist dann von erheblichen Verzerrungen auszugehen. Aus diesem Grund wird wie folgt vorgegangen. Die Berechnung der Renditen des HDAX und der Wertpapiere geschieht durch *Transformation* der Schlusskurse in Wachstumsraten, da die Periodizität der Tagesdaten erhalten bleibt. In jedem Zeitpunkt t wird jedoch nicht die Rendite der Aktienkursentwicklung vom vorigen Handelstag $t - 1$ berechnet, sondern die Entwicklung seit der Vorperiode $t - 21$. Somit entstehen die neuen Zeitreihen mit handelstäglichen Daten der *Einmonatsrendite*. Die Einmonatsrendite beantwortet die Frage, wie hoch bei einem Wertpapierkauf vor genau einem Monat die Rendite des Wertpapiers in t ist. Die Vorperiode $t - 21$ kommt wie folgt zustande: Der Beobachtungszeitraum vom 30.12.1998 bis 11.02.2008 umfasst ca. $T = 2320$ Handelstage und hat eine kalendarische Länge von ungefähr 110 Monaten. Also ergibt sich eine durchschnittliche monatliche Anzahl von Handelstagen:

$$\frac{2320}{110} = 21,09 \approx 21$$

Definition 3.1: a_{it} bzw. a_{mt} bezeichnet den Aktienschlusskurs i bzw. den Index-Schlusskurs m der historischen Ausgangszeitreihe zum Zeitpunkt t . Die Berechnungsformel für die Einmonatsrendite der Aktie lautet prozentual:

$$r_{it} = \frac{a_{it} - a_{it-21}}{a_{it-21}} \cdot 100 \quad \text{für } t = 1, \dots, T^{33} \quad (3.1)$$

Eine entsprechende Formel gilt für den Index. Zur besseren Identifizierung bezeichnet r_{it} die Einmonatsrendite der Aktie und r_{mt} die Einmonatsrendite des HDAX.

Die Transformation der Zeitreihen in Wachstumsraten, hat den Vorteil, dass die Beobachtungsanzahl T nicht um ein Vielfaches reduziert wird und alle vorhandenen Informationen in die Schätzung einfließen. Dies bietet eine optimale Vergleichbarkeit mit dem Einmonats-EURIBOR. Die Angabe des Einmonats-EURIBOR ist eine p.a.-Angabe, das bedeutet die Zeitreihe des EURIBORs muss durch zwölf dividiert werden, um in Kombination mit den Einmonatsrenditen *echte Überrenditen* zu erhalten. Um die Daten der Index- und Wertpapierzeitreihe ab dem 30.12.1998 in Wachstumsraten umwandeln zu können, werden schon die Daten ab dem 27.11.1998 benötigt. Die HDAX-Überrendite h_t sowie die Überrenditen der Aktie g_t entstehen durch Subtraktion des monatlichen risikolosen Zinssatzes von den Einmonatsrenditen in jedem Zeitpunkt t .

Das erste Ziel ist es gewesen, anhand Beckers Beschreibungen die Ergebnisse aus dem Arbeitspapier nachzuvollziehen.

In Anhang 4 berechnet Becker eine einfache lineare Regression zwischen der SIEMENS-Aktie und dem HDAX. Die benötigten Zeitreihen h_t und g_t für die CAPM-Schätzungen gibt er jedoch nicht an, sondern beschreibt nur wie sie berechnet werden. Unter Zuhilfenahme von Excel wird zuerst eine einfache lineare Regression berechnet mit h_t als x -Wert und g_t als y -Wert. Es ist leicht zu erkennen (Anhang H, erste Regression), dass das Ergebnis stark von den Werten Beckers abweicht. Minimale Abweichungen sind zu akzeptieren, da die Daten zum einen von einer anderen Internetquelle stammen und zum anderen erwähnt Becker, dass vereinzelte Zeitreihen mit unwesentlich mangelhaften Daten vorhanden sind.³⁴ Daher ist nicht feststellbar in welchem Zeitraum die Daten mangelhaft sind, weil er nur die Gesamtanzahl T der Datensätze angibt.³⁵

Der nächste Schritt verlangt die Gründe für derart große Abweichungen zu ermitteln. Die erste Idee ist, dass er die Einmonatsrenditen als x - oder y -Wert verwendete.

³³Vgl. Fahrmeir, L., 2004, S. 62. Diese Formel hat Becker so nicht dargestellt. Weiteres dazu wird im Folgenden erläutert.

³⁴Vgl. Becker, S., 2008, S. 18

³⁵Vgl. Becker, S., 2008, Anhang 3

Die nächsten Versuche der einfachen linearen Regression werden mit verschiedenen Kombinationen der Einmonatsrenditen r_{it} und r_{mt} und den Überrenditen g_t und h_t berechnet:

- Zweite Regression: g_t als y -Wert und r_{mt} als x -Wert
- Dritte Regression: r_{it} als y -Wert und r_{mt} als x -Wert
- Vierte Regression: r_{it} als y -Wert und h_t als x -Wert

Bei allen vier Ergebnissen ist zu erkennen, dass nur b_1^{KQ} annähernd mit dem Ergebnis von Becker übereinstimmt und b_0^{KQ} immer stark abweicht (siehe Anhang H).

Die Frage besteht immer noch darin, woran es liegen kann, dass die Ergebnisse der einfachen linearen Regression nicht mit denen von Becker übereinstimmen. Es ist sehr unwahrscheinlich, dass die historischen Zeitreihen der SIEMENS-Aktie und des HDAX ungenügend oder falsch sind. Der Einmonats-EURIBOR, der hier als risikofreier Zinssatz verwendet wird, scheint ebenfalls korrekt zu sein, denn er entspricht der Grafik, die in dem Arbeitspapier von Becker zu finden ist.³⁶

Becker hat wie schon oben erwähnt, die Formel zur Berechnung der Einmonatsrenditen r_{it} und r_{mt} mit Blick auf seine Ergebnisse falsch dargestellt (auf den Index i und m wird hier verzichtet):

$$r_t = \frac{a_t - a_{t-21}}{a_t} \cdot 100 \quad (3.2)$$

Die Formel für Wachstumsraten lautet

$$r_t = \frac{a_t - a_{t-21}}{a_{t-21}} \cdot 100 \quad (3.3)$$

wie in **Definition 3.1** angeführt. Der Unterschied ist eindeutig im Nenner der Formel zu erkennen, da man wissen möchte, wie hoch bei einem Wertpapierkauf vor genau einem Monat die Rendite des Wertpapiers in t ist. Zur besseren Nachvollziehbarkeit werden auf Basis der Formel von Becker eine einfache lineare Regression zwischen der ADIDAS-Aktie

³⁶Vgl. Becker, S., 2008, Anhang 1

und dem HDAX berechnet. Die Ergebnisse sind in Anhang H dargestellt und hier sind ebenfalls große Abweichungen zu erkennen.

Anhand der Formel von *Fahrmeir, L., 2004, S. 62* wurden erneut einfache lineare Regressionen mit den Einmonatsrenditen h_t und g_t durchgeführt und sind in Anhang B aufgeführt. Diese Werte kommen näher an die von Becker heran. Auf dieser Grundlage wurden auch die anderen Schätzmethoden berechnet.

4 Schätzverfahren im Regressionsmodell für den Betafaktor im CAPM

In diesem Kapitel werden verschiedene Schätzverfahren im Regressionsmodell für den Betafaktor im CAPM dargestellt. Zuerst wird das multiple lineare Regressionsmodell sowie als Spezialfall das einfache lineare Regressionsmodell vorgestellt und deren Anwendung auf den Betafaktor im CAPM. Danach wird der Betafaktor mit Hilfe der einfachen KQ-Schätzung, der rekursiven KQ-Schätzung und der rekursiven diskontierten KQ-Schätzung berechnet.

Um Missverständnisse bei der Verwendung der Begriffe einfache, univariate, multiple, multivariate Regression zu vermeiden, werden hier die folgenden Begriffe entsprechend Walz, G./Grabowski, B., 2004 verwendet:

Gibt es nur eine unabhängige Variable x und eine abhängige Variable y , so wird von *einfacher Regression* gesprochen.³⁷ Gibt es mehrere unabhängige Variablen x_1, \dots, x_n und eine abhängige Variable y , so wird von *multipler Regression* gesprochen.³⁸

Die unabhängige Variable wird in der Regressionsanalyse auch als Regressor, Prädiktor, erklärende³⁹ oder exogene⁴⁰ Variable bezeichnet. Die abhängige wird auch als Regressand,⁴¹ erklärte, endogene⁴² Variable oder Zielvariable bezeichnet.⁴³

³⁷Vgl. Walz, G./Grabowski, B., 2004, S. 203 und S. 348ff

³⁸Vgl. Walz, G./Grabowski, B., 2004, S. 203 und S. 348ff

³⁹Vgl. Schlittgen, R., 2008, S. 151

⁴⁰Vgl. Hartung, J./Elpelt, B., 1992, S. 81

⁴¹Vgl. Hartung, J./Elpelt, B./Klößener, K.-H., 2009, S. 569

⁴²Vgl. Hartung, J./Elpelt, B., 1992, S. 81

⁴³Vgl. Fahrmeir, L./Hamerle, A./Tutz, G., 1996, S. 93f und vgl. Gujarati, D. N., 1988, S. 20

4.1 Mathematisches Modell der multiplen linearen Regression mit KQ-Schätzern

Die Darstellung dieses Abschnittes erfolgt in Anlehnung an *Schlittgen, R.*, 2008, S. 151ff.

Das multiple Modell geht davon aus, dass die Zufallsvariable Y von den Einflussgrößen x_1, \dots, x_p abhängt, also $Y(x_1, \dots, x_p)$. Das lineare Modell fordert, dass der bedingte Erwartungswert als lineare Funktion der unabhängigen Variablen dargestellt werden kann:

$$E[Y|x_1, \dots, x_p] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p, \quad \beta_0, \dots, \beta_p \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Liegen nun n Datensätze $x_{i1}, \dots, x_{ip}, y_i$ $i = 1, \dots, n$ vor, dann folgen aus der Gleichung des bedingten Erwartungswertes die linearen Regressionsgleichungen

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

wobei die ε_i die Abweichungen vom Erwartungswert darstellen, der sogenannte *Fehler*

Dabei wird grundsätzlich davon ausgegangen, dass die x_{i1}, \dots, x_{ip} fest gewählte Werte sind. Dies bedeutet, dass bei Wiederholung der i -ten Stichprobenziehung die x_{i1}, \dots, x_{ip} dieselben sind und nur das y_i sich ändern kann.⁴⁴ Diese Voraussetzung ist notwendige Bedingung für die folgenden Aussagen zu den Schätzern.

In Matrixschreibweise ergibt sich nun:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Mit $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$ und $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ ergibt sich die kompakte Darstellung:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.4)$$

Der nächste Schritt ist die Schätzung des Vektors $\boldsymbol{\beta}$, woraus sich dann für das multiple lineare Modell die Regressionsfunktion

⁴⁴Vgl. *Gujarati, D. N.*, 1988, S. 19

$$\hat{y} = X\hat{\beta} \quad (4.5)$$

ergibt. Existiert die Inverse von $X'X$, dann ist der *Kleinste-Quadrate-Schätzer* (KQ-Schätzer oder OLS-Schätzer⁴⁵):

$$\hat{\beta}_{KQ} = (X'X)^{-1}X'y \quad (4.6)$$

Im Spezialfall der einfachen linearen Regression ergeben sich die linearen Regressionsgleichungen

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

die Regressionsfunktion zu⁴⁶

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \quad (4.8)$$

mit $b_0 := \hat{\beta}_0$ und $b_1 := \hat{\beta}_1$ sowie die KQ-Schätzer zu

$$b_0^{KQ} = \bar{y} - b_1 \bar{x} \quad (4.9)$$

und

$$b_1^{KQ} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} .^{47} \quad (4.10)$$

Dabei ist

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{sowie} \quad \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.11)$$

und entsprechend \overline{xy} , $\overline{x^2}$.

⁴⁵Ordinary Least Squares

⁴⁶Vgl. Hartung, J./Elpelt, B./Klößener, K.-H., 2009, S.574f

⁴⁷Das Gleichheitszeichen gilt wegen Anhang A.

Als Maß für die Güte der Anpassung, Maß für den linearen Zusammenhang⁴⁸ wird das *Bestimmtheitsmaß*

$$R^2 := \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (4.12)$$

verwendet⁴⁹, wobei

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \text{ für } i = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

ist. Es gilt $0 \leq R^2 \leq 1$.⁵⁰

Werden die Fehler ε_i als Zufallsvariablen

$$\varepsilon_i := \varepsilon(x_i) \text{ für } i = 1, \dots, n, \quad (4.14)$$

deren Erwartungswerte und Varianzen existieren, aufgefasst, dann ergeben sich daraus die Zufallsvariablen

$$Y_i := \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \text{ für } i = 1, \dots, n. \quad (4.15)$$

Für die Zufallsvariablen gilt⁵¹

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + E(\varepsilon_i) \text{ für } i = 1, \dots, n. \quad (4.16)$$

Es werden drei Modellannahmen getroffen:

1. Es gilt $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ für $i = 1, \dots, n$, d. h. $E(\varepsilon_i) = 0$.
2. Y_1, \dots, Y_n sind stochastisch unabhängig.
3. Es gilt $Var(Y_1) = \dots = Var(Y_n) = \sigma^2$ für $i = 1, \dots, n$, d. h. es ist $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$.

Mit diesen drei Annahmen gilt:

Satz 4.1:⁵² Die KQ-Schätzer b_0^{KQ} und b_1^{KQ} sind erwartungstreue Schätzer. Sie sind lineare Schätzer der Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n .

⁴⁸Vgl. Kreyszig, E., 1988, S.309 Satz 107.2

⁴⁹Vgl. Hartung, J./Elpelt, B./Klößener, K.-H., 2009, S.578f; Pestman, W. R., 2009, S. 201ff

⁵⁰Vgl. Pestman, W. R., 2009, S. 203

⁵¹Vgl. Pestman, W. R., 2009, S. 22, Proposition I.5.1

Satz 4.2:⁵³ *Gauß Markov* Unter den erwartungstreuen linearen Schätzern für β_0 und β_1 haben die KQ-Schätzer b_0^{KQ} und b_1^{KQ} die kleinste Varianz. Jeder andere erwartungstreue Schätzer hat eine größere Varianz. (BLUE-Eigenschaft)⁵⁴

4.2 Anwendung des Regressionsmodells auf den Betafaktor im CAPM

Die Gleichung des CAPM lautet in vereinfachter⁵⁵ Schreibweise:

$$R_i = R_f + (R_m - R_f)\beta_i \quad (4.17)$$

Die erwartete Rendite des Wertpapiers i kann auch als *Überrendite*⁵⁶ umformuliert werden, indem der risikofreie Zinssatz subtrahiert wird:

$$R_i - R_f = (R_m - R_f)\beta_i \quad (4.18)$$

Der Betafaktor bildet einen Zusammenhang zwischen dem CAPM und dem Marktmodell, da die Gleichung des Marktmodells regelmäßig als Testgleichung des CAPM verwendet wird.⁵⁷ Aus diesem Grund bestimmt man in der Praxis den Betafaktor mit Hilfe des Marktmodells, da der Regressionskoeffizient β_1 unter gewissen Voraussetzungen einen unverzerrten und effizienten Schätzwert für das β_i im CAPM darstellt.⁵⁸ Die Regressionsgleichung des Marktmodells hat folgende Form

$$R_{it} = \beta_0 + \beta_1 R_{mt} + u_{it} \quad \text{mit } t = 1, \dots, T \quad (4.19)$$

für jeden Zeitpunkt t eines Wertpapiers i und liefert die in der Anlagepraxis verwendeten Betafaktoren.⁵⁹

⁵²Vgl. Pestman, W. R., 2009, S. 187, Proposition IV.1.3

⁵³Vgl. Pestman, W. R., 2009, S. 189, Proposition IV.1.2

⁵⁴Best Linear Unbiased Estimator

⁵⁵Die korrekte Darstellung bezüglich der Erwartungswerte ist in (2.11) dargestellt.

⁵⁶Vgl. Schmid, F./Trede, M. M., 2005, S. 207

⁵⁷Vgl. Steiner, M./Bruns, C., 2007, S. 38 und Stellbrink, J./Brückner, C., 2011, S. 2

⁵⁸Internetquelle 3

⁵⁹Vgl. Steiner, M./Bruns, C., 2007, S. 38

Diese Gleichung wird ebenso in Überrenditen umgeformt. Der risikofreie Zinssatz wird von der Rendite des Wertpapiers i und der Rendite des Marktportfolios m abgezogen. Somit ergibt sich die modifizierte Gleichung:

$$R_{it} - R_{ft} = \beta_0 + \beta_1(R_{mt} - R_{ft}) + u_{it} \quad (4.20)$$

β_0 und β_1 und können durch Schätzen der Regressionsfunktion bestimmt werden. Zur vereinfachten Darstellung werden die Überrenditen des Wertpapiers $R_{it} - R_{ft}$ als g_t und die Überrenditen des Marktes $R_{mt} - R_{ft}$ als h_t bezeichnet. Auf den Index i und m , der für Spezifizierung der einzelnen Wertpapiere und für das Marktportfolio dient, wird verzichtet.⁶⁰

$$g_t = \beta_0 + \beta_1 h_t + u_t \quad (4.21)$$

Hierbei stammen g_t und h_t aus historischen Zeitreihen, wobei g_t die Überrendite des HDAX und h_t ein Wertpapier in jedem Zeitpunkt t beschreibt. In Abschnitt 4.3.2 und 4.4 werden für verschiedene Wertpapiere die Parameter b_0 und b_1 , die über die Beobachtungsperiode hinweg variieren dürfen, geschätzt.

Für die Regressionsfunktion zur Regressionsgleichung ergibt sich

$$\hat{g}_t = b_0 + b_1 h_t \quad (4.22)$$

mit $b_0 := \hat{\beta}_0$ und $b_1 := \hat{\beta}_1$.

4.3 KQ-Schätzung im CAPM

In diesem Kapitel werden zwei Schätzmethoden dargelegt. Die Schätzung für die Parameter b_0 und b_1 erfolgt zuerst über die *einfache KQ-Schätzung* und im Anschluss über die *rekursive KQ-Schätzung*.

⁶⁰Vgl. Becker, S., 2008, S. 5

Es ist völlig unklar, warum Becker in seinem Aufsatz von multipler Regression spricht und diese auch angibt zu verwenden, da er die Schätzer in Matrixschreibweise darstellt.⁶¹ Allerdings handelt es sich bei der Regressionsfunktion

$$\hat{g}_t = b_0 + b_1 h_t$$

lediglich um eine abhängige Variable \hat{g}_t und eine unabhängige Variable h_t , d. h. um eine *einfache lineare Regression* und nicht um eine *multiple Regression*, bei der es mehrere unabhängige Variablen gibt. Dies bedeutet, dass die Schätzer der einfachen KQ-Schätzung verwendet werden. Bei der rekursiven Schätzung handelt es sich ebenso um die einfache Regression, die in Abschnitt 4.3.2 erläutert wird. Ob die Berechnungsvorschrift der rekursiven Methode in multipler Darstellung bei Becker⁶² der Berechnungsvorschrift der multiplen Regression⁶³ entspricht, ist noch zu überprüfen.

Festzuhalten ist ebenso Beckers Behauptung, dass bei den Schätzmethoden das Absolutglied aufgrund der CAPM-Gleichung als null angenommen wird,⁶⁴ weil sie kein Absolutglied enthält. Diese Behauptung kann relativ schnell widerlegt werden, da er ein Beispiel der OLS (KQ)-Schätzung angibt, indem das Absolutglied offensichtlich ungleich null ist.⁶⁵ Er benutzt also die Gleichung des Marktmodells, die regelmäßig als Testgleichung des CAPM verwendet wird. Dies erwähnt er jedoch nicht. Auch bei der rekursiven KQ-Schätzung wird das Absolutglied nicht null gesetzt.

4.3.1 Einfache KQ-Schätzung

Die Schätzung des konstanten Betafaktors und des Absolutglieds erfolgt über die *einfache KQ-Schätzung*. Die Schätzer lauten dementsprechend (beachte Abschnitt 4.1):

$$b_0^{KQ} = \bar{g} - b_1^{KQ} \bar{h} \quad (4.23)$$

⁶¹Vgl. Becker, S., 2008, S. 8

⁶²Vgl. Becker, S., 2008, Formel 3.8

⁶³Vgl. Becker, S., 2008, Formel 3.7

⁶⁴Vgl. Becker, S., 2008, S. 8 Fußnote 12

⁶⁵Vgl. Becker, S., 2008, Anhang 4

und

$$b_1^{KQ} = \frac{\overline{hg} - \bar{h}\bar{g}}{\overline{h^2} - \bar{h}^2} \quad (4.24)$$

Die Daten zur Berechnung der nachfolgenden Beispiele sind auf der beigefügten CD unter dem Name der Schätzmethode und dem Wertpapier zu finden.

Beispiel 4.1: Für die SIEMENS-Aktie ergeben sich die Schätzer:

$$b_0^{KQ} = 0,90262816 \text{ und}$$

$$b_1^{KQ} = 1,40921932$$

Grafisch dargestellt:

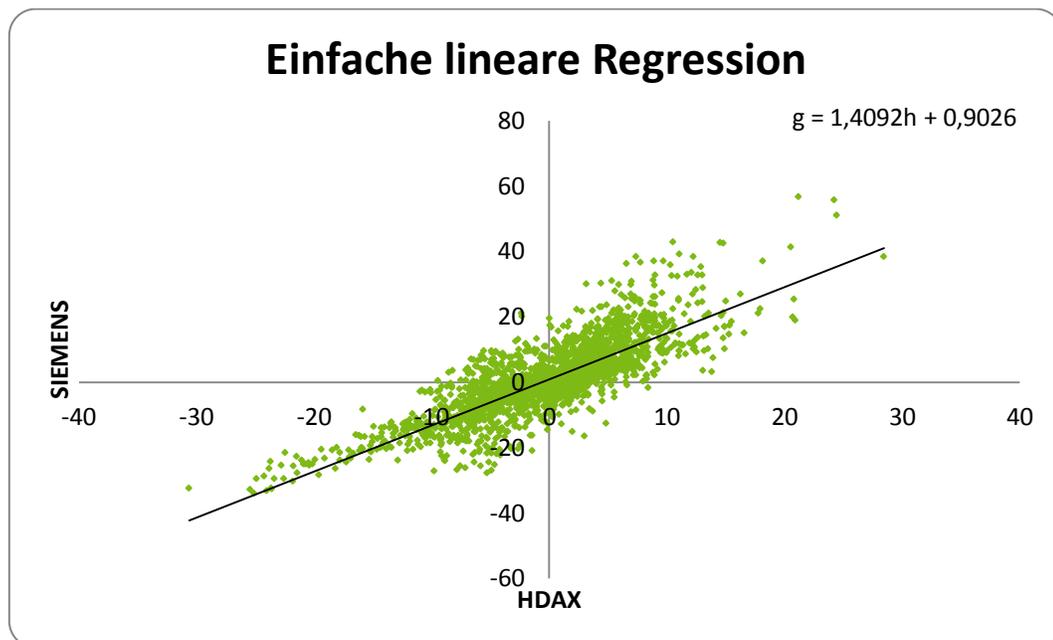


Abbildung 6 Beispiel einfache lineare Regression

Die Grafik zeigt die Punktwolke der Wertepaare $(h_t|g_t)$, wobei h_t die Werte des HDAX und g_t die Werte der SIEMENS-Aktie sind.

Die Herkunft der Daten ist im Datenverzeichnis aufgelistet. In Kapitel 3 wird die Aufbereitung der Daten beschrieben bevor sie für die Berechnung der Schätzer angewendet werden. Weitere Beispiele zur einfachen KQ-Schätzung sind in Anhang B dargestellt.

4.3.2 Rekursive KQ-Schätzung

Bei der *rekursiven KQ Schätzung (RLS)*⁶⁶ variieren die Parameter b_{0t} und b_{1t} , da sie für jeden Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ bestimmt werden. Zur besseren Darstellung der Schätzer b_{0t} und b_{1t} wird der Index t eingeführt, der die einzelnen Zeitpunkte kennzeichnen soll. Bei jeder Schätzung der Parameter b_{0t} und b_{1t} für die einzelnen Zeitpfade wird ein Datensatz hinzu genommen. Die Schätzer für die Zeitpfade lauten

$$b_{0t}^{RLS} = \bar{g}_t - b_{1t}^{RLS} \bar{h}_t \quad (4.25)$$

und

$$b_{1t}^{RLS} = \frac{\overline{h_t g_t} - \bar{h}_t \bar{g}_t}{\overline{h_t^2} - \bar{h}_t^2} \quad (4.26)$$

für jeden Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$. – Vermerkt sei, dass der Schätzer b_{1t}^{RLS} sich rekursiv berechnen lassen soll.⁶⁷ Hiermit erklärt sich der Name des Verfahrens.

Becker gibt diese Formel so nicht an, weil er von einer multiplen Regression ausgeht, in der die Schätzer als Vektoren dargestellt werden. Leider stellt er auch keine Grafiken für seine Formel zur Verfügung. Das Ergebnis der rekursiven KQ-Schätzung stimmt aber mit seiner Aussage, dass die Koeffizientenpfade mit wachsendem t tendenziell glatter werden und dass sich für $t = T$ der zeitunabhängige einfache KQ-Schätzer ergibt, überein.⁶⁸

Beispiel 4.2: Anhand der SIEMENS-Aktie wird b_{1t}^{RLS} von $t = 1, \dots, 3$ berechnet. Die vorliegenden Datensätze sind in der Tabelle dargestellt:

t	h_t	g_t	b_{1t}^{RLS}
0	-2,2092222	7,86654953	
1	3,7250788	9,07409657	0,20348598
2	8,42381354	-1,7130956	0,54504461
3	13,8359595	3,09352888	0,74687824

Tabelle 1 Datensätze rekursive KQ-Schätzung HDAX-SIEMENS

⁶⁶Recursive Least Squares

⁶⁷Vgl. Becker, S., 2008, S. 9 (3.9) und (3.10)

⁶⁸Vgl. Becker, S., 2008, S. 9 Formel 3.8

b_{11}^{RLS} berechnet sich also aus den ersten beiden Datensätzen für $t = 0$ und $t = 1$.

Die nachkommende Grafik zeigt die variierenden Betafaktoren für $t = 1, \dots, T$:

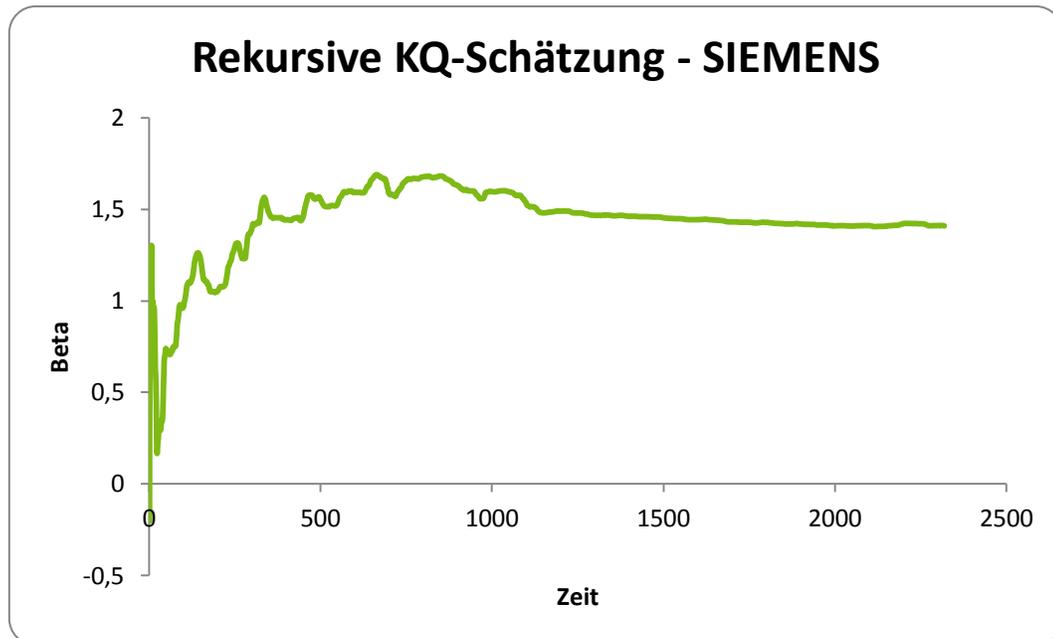


Abbildung 7 Beispiel rekursive KQ-Schätzung

Weitere Grafiken zu verschiedenen Wertpapieren sind in Anhang C dargestellt.

Anhand der Grafik kann man sehr gut erkennen, dass mit wachsendem t die Koeffizientenpfade immer glatter werden. Diese Sprünge oder stetige Entwicklungen der Koeffizientenpfade können als Strukturänderung interpretiert werden.⁶⁹

Vermerkt sei ausdrücklich, dass sich für $t = T$ der zeitunabhängige Betaschätzer der einfachen KQ-Schätzung ergibt:

$$b_{1T}^{RLS} = b_1^{KQ} \quad (4.27)$$

4.4 Rekursive diskontierte KQ-Schätzung im CAPM

Bei der rekursiven KQ-Schätzung werden die Koeffizientenpfade mit wachsendem t tendenziell glatter. Dieses Verfahren gewichtet alle Beobachtungen der Zeitreihe gleich. Bei

⁶⁹Vgl. Lütkepohl, H./Moryson, M./Wolters, J., 1995, S. 109

großem t kann die extreme Glättung dazu führen, dass potenzielle Parameterveränderungen gegen Ende des betrachtenden Zeitraums nicht erkannt werden. Durch die Erweiterung der rekursiven KQ-Schätzung um den Ansatz der rekursiven diskontierten KQ-Schätzung (RDLS)⁷⁰ werden die Beobachtungen unterschiedlich gewichtet. Die rekursive diskontierte KQ-Schätzung wählt b_0 und b_1 so, dass die *diskontierte Summe der Residuenquadrate (DSS)*⁷¹ minimiert wird:⁷²

$$DSS(b_0, b_1) := \sum_{i=1}^T \delta^{T-t} (g_t - b_0 - b_1 h_t)^2 \rightarrow \min! \quad (4.28)$$

mit

$$\delta_t := \delta^{\frac{T-t}{2}} = \sqrt{\delta^{T-t}} \quad \text{für } t = 1, \dots, T \quad (4.29)$$

erhält man die Darstellung:

$$DSS(b_0, b_1) := \sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_0 \delta_t - b_1 \delta_t h_t)^2 \quad (4.30)$$

Für die Schätzer b_0 und b_1 ergibt sich der folgende

Satz 4.3: Für $DSS(b_0, b_1) \rightarrow \min$ gilt:

$$b_0^{DSS} = \frac{\overline{\delta^2 g} - b_1^{DSS} \overline{\delta^2 h}}{\overline{\delta^2}} \quad (4.31)$$

und

$$b_1^{DSS} = \frac{\overline{\delta^2 g h} \cdot \overline{\delta^2} - \overline{\delta^2 g} \cdot \overline{\delta^2 h}}{\overline{\delta^2 h^2} \cdot \overline{\delta^2} - (\overline{\delta^2 h})^2} \quad (4.32)$$

Beweis zu Satz 4.3: Siehe Anhang F

⁷⁰Recursive Discounted Least Squares – Becker nennt seine Methode RDLS. In dieser Arbeit ergeben sich die Schätzer aus der diskontierten Summe der Residuenquadrate (DSS) – siehe [Satz 4.3](#).

⁷¹Discounted Sum of Squares

⁷²Vgl. Becker, S., 2008, S. 10

In Beckers Arbeitspapier werden keine Schätzer für diese Methode angegeben. Er zeigt allerdings in Anhang 6 die grafischen Darstellungen der rekursiven diskontierten Methode der kleinsten Quadrate (RDLS). Zunächst war es nicht sehr einfach zu ermitteln, wie er diese Grafiken erstellt hat. Nach mehrmaligem Ausprobieren hatte sich herausgestellt, dass Becker zwei vollständig neue Reihen, nämlich $u_t = \delta_t h_t$ und $v_t = \delta_t g_t$, gebildet und darauf die einfache KQ-Schätzung für jeden Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ angewendet hat, womit sich $b_{1t}^{\delta_t}$ ergibt. Die Ergebnisse beziehen sich auf ein $\delta = 0,95$.

Beispiel 4.3: Anhand der SIEMENS-Aktie werden die Datensätze im Folgenden bis $t = 5$ gezeigt:

t	h_t	g_t	$\delta_t h_t$	$\delta_t g_t$	$b_{1t}^{\delta_t}$
0	-2,2092222	7,86654953	-3,2716E-26	-1,1649E-25	
1	3,7250788	9,07409657	5,6597E-26	-1,3787E-25	0,23930688
2	8,42381354	-1,7130956	1,3131E-25	-2,6704E-26	0,52205849
3	13,8359595	3,09352888	2,2128E-25	4,9475E-26	0,72033515
4	9,82400086	6,00713757	1,612E-25	9,8569E-26	0,8704991
5	11,0434369	7,9496394	1,8592E-25	1,3383E-25	1,00810249

Tabelle 2 Datensätze RDLS-Schätzung HDAX-SIEMENS

Die ursprünglichen Reihen h_t und g_t wurden mit einem Diskontierungsfaktor

$$\delta_t := \delta^{\frac{T-t}{2}} \text{ für } t = 1, \dots, T$$

multipliziert. Für die gesamten Datensätze ergibt sich die nachstehende Grafik der SIEMENS-Aktie, die mit Beckers Grafik übereinstimmt.⁷³

⁷³Vgl. Becker, S., 2008, Anhang 6

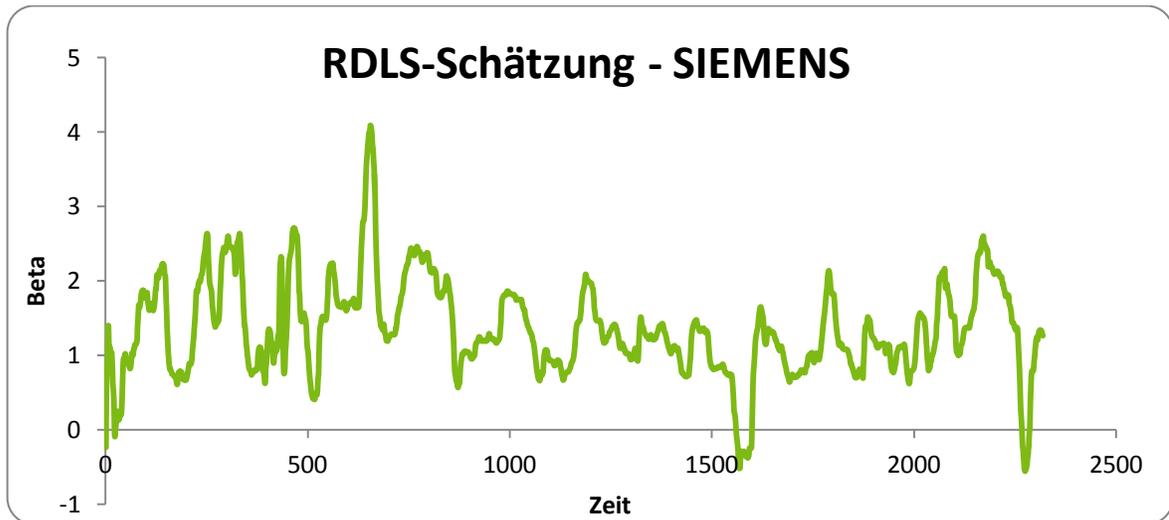


Abbildung 8 Beispiel RDLS-Schätzung

Becker nennt die Methode mit den neuen Zeitreihen RDLS. In seinem Arbeitspapier erwähnt er, dass sich die Ergebnisse auf eine initiierte Periode von drei Monaten (63 Handstage) beziehen.⁷⁴ Allerdings ist nicht klar, was er damit meint. Hier wird keine bestimmte Periode gewählt und die Grafiken stimmen trotzdem mit denen Beckers überein. In Anhang D befinden sich weitere Grafiken der Schätzung von Becker.

Dieses Vorgehen ist natürlich falsch, weil die diskontierte Summe der Residuenquadrate (DSS) ein ganz anderes Minimierungsproblem ergibt und zu anderen Schätzern führt – siehe [Satz 4.3](#). Diese Schätzer unterscheiden sich in der Regel von den einfachen KQ-Schätzern, wie im nachfolgenden Beispiel zu erkennen ist:

Sei $u_t = \delta_t h_t$, $v_t = \delta_t g_t$,

$$v_t = \gamma_0 + \gamma_1 u_t + \varepsilon_t \quad \text{für } t = 1, \dots, T \quad (4.33)$$

die Regressionsfunktion und

$$\hat{v} = c_0 + c_1 u \quad (4.34)$$

die Regressionsgerade für u und v mit $c_0 := \hat{\gamma}_0$ und $c_1 := \hat{\gamma}_1$. Der KQ-Schätzer für c_1^{KQ} lautet:

⁷⁴Vgl. Becker, S., 2008, S. 20

$$c_1^{KQ} = \frac{\overline{uv} - \bar{u}\bar{v}}{\overline{u^2} - \bar{u}^2} \quad (4.35)$$

Beispiel 4.4: Anhand der SIEMENS-Aktie wird im nächsten Beispiel gezeigt, dass die beiden Schätzer b_1^{DSS} und c_1^{KQ} für $t = 1, \dots, T$ keinesfalls gleich sind. Für die nachfolgenden Berechnungen wird $\delta = 0,95$ verwendet, ebenso wie in Beckers Arbeitspapier:

Vergleich	
c_1^{KQ}	1,262341666
b_1^{DSS}	1,431501599

Tabelle 3 Beispiel für KQ-Schätzer und DSS-Schätzer

Der c_1^{KQ} Schätzer ist der einfache KQ-Schätzer, der b_1^{DSS} Schätzer der KQ-Schätzer für DSS.

Die erste Grafik zeigt die RDLS-Schätzung von Becker (einfache KQ-Schätzung der Zeitreihen u_t und v_t) und die DSS-Schätzung für jeden Zeitpunkt t . Hier ist deutlich zu erkennen, dass sich die beiden Schätzungen voneinander unterscheiden.

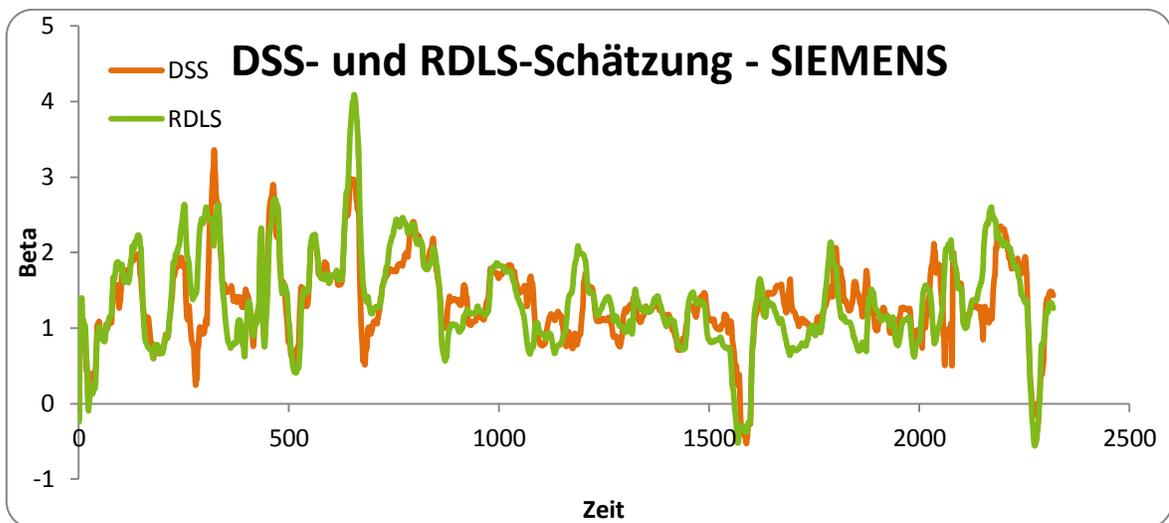


Abbildung 9 Beispiel DSS- und RDLS-Schätzung

Die zweite Grafik ist aus Beckers Arbeitspapier entnommen und stellt die RDLS-Schätzung dar, die eindeutig mit der RDLS-Schätzung aus der ersten Grafik übereinstimmt.

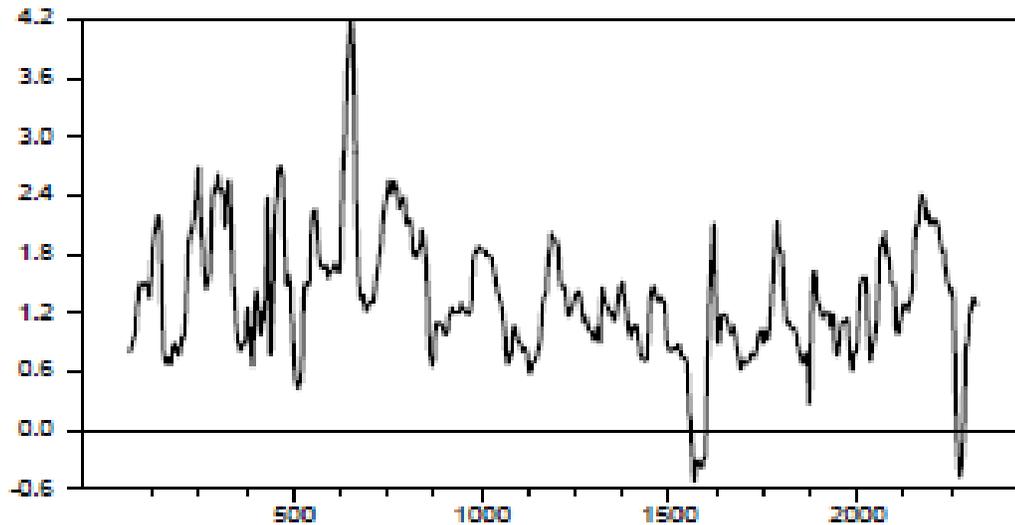


Abbildung 10 RDLS-Schätzung von Becker⁷⁵

Somit ist bewiesen:

Satz 4.4: Ist $\beta_0 \neq 0$, so ist im Allgemeinen $b_1^{DSS} \neq c_1^{KQ}$.

Proposition 4.1: Ist $\beta_0 = 0$, dann gilt:

$$b_1^{DSS} = \frac{\overline{\delta^2 gh}}{\overline{\delta^2 h^2}} = \frac{\overline{vu}}{\overline{u^2}} = c_1^{KQ} \quad (4.36)$$

Beweis zu Proposition 4.1: Siehe Anhang G

Erläuterungen und Untersuchungen dieser Methode werden in dieser Arbeit nicht weiter fortgeführt.

4.5 Vergleich der Ansätze

In den vorherigen Abschnitten sind die drei Schätzmethode einfache KQ-Schätzung, rekursive KQ-Schätzung und RDLS-Schätzung(DSS-Schätzung) angewendet worden. Dabei ist bei der einfachen KQ-Schätzung und der rekursiven KQ-Schätzung die Schätzmethode gleich – KQ-Schätzung -, bei der rekursiven KQ-Schätzung und der RDLS-Schätzung ist die Methode der variierenden Regressionskoeffizienten gleich. Dies bedeutet, dass sich in

⁷⁵Vgl. Becker, S., 2008, Anhang 6

jedem Zeitpunkt t neue Regressionskoeffizienten ergeben. Rekursive KQ-Schätzungen sind einfache KQ-Schätzungen in jedem Zeitpunkt t und führen bei großem t zu einer enormen Glättung der Pfade. Dies erschwert das Erkennen von potentieller Koeffizientenveränderung. Damit begründet sich der Ansatz der RDLS-Schätzungen von Becker, in dem er einen Diskontierungsfaktor an die Datensätze heranmultipliziert. Dies hat den Vorteil, dass ursprüngliche Informationen nicht verloren gehen, da jede Schätzung unterschiedlich gewichtet wird. Die Schätzungen sind also abhängig von dem Gewichtungsfaktor δ und beeinflussen die Gestalt und Glättung der Zeitpfade.

Bei der DSS-Schätzung liegt ein ganz anderes Minimierungsproblem vor. Die Folge ist, dass nicht die einfache KQ-Schätzung vorliegt, sondern sich andere Schätzer ergeben - siehe Satz 4.3. Aber auch hier werden die einzelnen Zeitpfade unterschiedlich gewichtet, weshalb Strukturveränderungen nicht verloren gehen.

5 Schätzungen und Beurteilung

Das CAPM wurde für fünf Großunternehmen ADIDAS, BMW, DAIMLER, SIEMENS und TUI, die im HDAX gelistet sind, getestet. Genau diese fünf Großunternehmen wurden ausgewählt, weil sie in Beckers Arbeitspapier alle gleich große Datensätze besitzen. Bei den Großunternehmen mit weniger Datensätzen ist nicht klar welcher Zeitraum fehlt, denn dazu macht Becker keine genauen Angaben.⁷⁶

Zuerst erfolgt die Schätzung über die einfache KQ-Schätzung, bei der das Beta (b_1^{KQ}) zeitunabhängig ist. Die Schätzungen sind in Anhang B dargestellt. Das geschätzte b_0^{KQ} bestätigt, dass als Testgleichung das Marktmodell benutzt wird (siehe Abschnitt 4.2) und nicht die Fundamentalgleichung des CAPM, da diese nach Umformung in Überrenditen (4.18) kein Absolutglied enthält. Die geschätzten Absolutglieder weichen ein wenig von null ab. Das kleinste $b_0^{KQ} = -0,3564$ für die Schätzung von BMW. Alle Werte von b_0^{KQ} liegen fast am Ursprung, daher kann man sagen, dass alle Geraden Ursprungsgeraden sind. Die geschätzten Betafaktoren (b_1^{KQ}) sind alle signifikant von null verschieden und sind $> 0,5$. Bei ADIDAS beträgt $b_1^{KQ} \approx 0,5116$.

Dies bedeutet: Steigt die Rendite des Marktindex um einen Prozentpunkt, so ist mit einem Anstieg der Wertpapierrendite um einen halben Prozentpunkt zu rechnen. Auch BMW hat ein geschätztes Beta, das unter eins liegt ($\approx 0,8146$). Das heißt, das Wertpapier schwankt weniger als der HDAX. DAIMLER besitzt ein b_1^{KQ} von $\approx 1,021$ und TUI ein b_1^{KQ} von $\approx 1,1522$. Ihr Verhalten ist sehr ähnlich dem des Marktes. Erhöht sich also die Rendite des Marktes um einen Prozentpunkt, so erhöht sich auch die Wertpapierrendite um einen Prozentpunkt. SIEMENS weist das größte geschätzte b_1^{KQ} von $\approx 1,4092$ auf. Hier ist von einem überproportionalen Anstieg der Wertpapierrendite bei Marktschwankungen zu rechnen. Es gibt also kein negatives Beta, das auch in der Praxis sehr selten auftaucht (siehe Abschnitt 2.3).

⁷⁶Vgl. Becker, S., 2008, Anhang 3

Das Bestimmtheitsmaß, welches Auskunft über den linearen Zusammenhang gibt, liegt bei allen Schätzungen deutlich um 0,6. ADIDAS, BMW, DAIMLER und TUI weisen ein Bestimmtheitsmaß von $\approx 0,5$ auf und der Standardfehler der Schätzungen ist sehr hoch. Ob das Bestimmtheitsmaß hier dann überhaupt einen linearen Zusammenhang anzeigt, ist noch gesondert zu untersuchen.⁷⁷

Ein weiterer Punkt, der mit der Festlegung des CAPM einhergeht, ist die Korrelation zwischen der Residualgröße und dem Regressor HDAX, der in der Praxis nicht deterministisch ist. Demnach sind die Schätzungen der einfachen KQ-Schätzung verzerrt und inkonsistent.⁷⁸

Durch das Zulassen des variierenden Regressionskoeffizienten werden Strukturveränderungen und Schwankungen des Wertpapiers und dem HDAX beachtet. Die rekursive KQ-Schätzung und Beckers RDLS-Schätzung sind als zeitlich eingegrenzte, fortwährende Wiederholungen⁷⁹ der einfachen KQ-Schätzung zu sehen. Ergebnisse der rekursiven diskontierten KQ-Schätzung (DSS-Schätzung) werden hier nicht dargestellt und beurteilt, da dies den Rahmen dieser Arbeit weit überschreiten würde.

Bei der rekursiven KQ-Schätzung sind eindeutige Schwankungen am Anfang des Zeitfensters zu erkennen. Ebenso ist bei allen fünf Schätzungen zu sehen, dass ungefähr ab dem Zeitpunkt $t = 1000$ das Beta gegen den Wert der einfachen KQ-Schätzung konvergiert. Dadurch werden spätere Veränderungen in der Struktur nicht beachtet. Beckers RDLS-Schätzung hingegen gewichtet alle Betas durch das heranzumultiplizieren von einem Diskontierungsfaktor unterschiedlich, sodass einzelne Schwankungen über die Periode hinweg deutlich zu erkennen sind. In Anhang E sind die Mittelwerte, Minimum und Maximum der Betas aller Wertpapiere zusammengestellt, um die Schwankungsbreite über die gesamte Periode zu zeigen. ADIDAS und SIEMENS haben die größte Schwankungsbreite.

Betrachtet man die Mittelwerte der mittels RDLS geschätzten Betafaktoren $b_{1t}^{\delta_t}$ fallen im Vergleich zu der einfachen KQ-Schätzung keine großen Abweichungen auf. Eine nennenswerte Ausnahme ist die TUI-Aktie, die bei der einfachen KQ-Schätzung ein $b_1^{KQ} < 1$ besitzt

⁷⁷Vgl. Büchter, A., Henn, H.-W., 2007, S. 127 f

⁷⁸Vgl. Becker, S., 2008, S. 20

⁷⁹Vgl. Becker, S., 2008, S. 20

und damit als defensives Wertpapier bezeichnet wird und bei der RDLS-Schätzung ein durchschnittliches $b_{1t}^{\delta_t} > 1$ besitzt und somit als aggressives Wertpapier bezeichnet wird. Die Mittelwerte der Betas mittels RDLS, außer das von ADIDAS ($b_{1t}^{\delta_t} \approx 0,4489$), liegen in einem Intervall von $\approx \mp 0,35$ um die Marktschwankung $b_{1t}^{\delta_t} = 1$ herum.⁸⁰

⁸⁰Vgl. *Becker, S.*, 2008, S. 21

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wird eine Zusammenfassung der erzielten Resultate und einen Ausblick für mögliche weitere Untersuchungen des Betafaktors gegeben.

6.1 Zusammenfassung

Das zuerst formulierte Ziel dieser Arbeit, die Untersuchung eines variierenden Regressionskoeffizienten anhand aktueller Daten, konnte nicht durchgeführt werden, da Becker einige ungenaue oder falsche Aussagen trifft:

1. Keine genauen Angaben zu mangelhaften Daten, das heißt, es ist nicht klar welcher Zeitraum fehlt (Kapitel 3)
2. Die Formel zur Berechnung der Einmonatsrendite (siehe Kapitel 3)
3. Die Verwendung der multiplen Regression (siehe Abschnitt 4.3)
4. Die Angabe, dass das Absolutglied bei den Schätzungen gleich null gesetzt wird (siehe Abschnitt 4.3)
5. Die Verwendung falscher Schätzer bei der rekursiven diskontierten Methode der kleinsten Quadrate (RDLS) (siehe Abschnitt 4.4)

Diese Punkte sind sehr zeitintensiv gewesen, sodass das ursprüngliche Ziel nicht mehr verfolgt werden konnte und das Ziel geändert werden musste: Die Überprüfung der Ergebnisse der verschiedenen Regressionsverfahren und der getroffenen Aussagen von Becker. Dafür werden zuerst die Grundlagen ausführlich dargestellt. Danach ist die Gestaltung der Daten erläutert worden, bevor sie für die verschiedenen Schätzverfahren verwendet werden. Ebenso werden unterschiedliche Schätzverfahren mathematisch beschrieben. Darüber hinaus werden neue Schätzer für die rekursive diskontierte KQ-Schätzung (DSS-Schätzung) hergeleitet, die Becker eigentlich hätte verwenden müssen. Die Ergebnisse der Schätzungen sind allerdings mit Vorsicht anzusehen, da das Bestimmtheitsmaß weit unter

0,8 liegt und somit kein linearer Zusammenhang zwischen dem HDAX und der Wertpapierre im einfachen linearen Regressionsmodell vorliegt.

6.2 Ausblick

Der Betafaktor ist auch heute noch ein wichtiger Risikofaktor. Dies zeigt zum Beispiel das Working Paper von *Hanauer, M./Kaserer, C./Rapp, M. S.*, 2013 S. 19f. Ebenso wird er auch bei Insolvenzrisiken oder bei der Berechnung der Eigenkapitalkosten beachtet.⁸¹ Daher sollte eine weitere Untersuchung des Betafaktors in Betracht bezogen werden.

Aus zeitlichen Gründen konnte die rekursive Formel der rekursiven KQ-Schätzung sowie der RDLS-Schätzung Beckers nicht untersucht werden.⁸² Es gilt also noch zu überprüfen, ob die beiden rekursiven Formeln⁸³ auf das gleiche Ergebnis wie in dieser Arbeit führen und sich im Eindimensionalen überhaupt eine Rechensparnis ergibt. Des Weiteren ist die gleitende lokale Regression (MLR) zu untersuchen, die nur einen lokalen Datenbereich betrachtet und ebenfalls eine rekursive Methode ist.⁸⁴ Hierbei ist sehr auf die Richtigkeit der angegebenen Formeln zu achten und auf die Länge der Zeitfenster. Becker vergleicht diese Methode mit der RDLS-Schätzung.

Gegenstand einer Masterarbeit könnte die Weiterführung der DSS-Schätzung, für die in dieser Arbeit nur die Ergebnisse der SIEMENS-Aktie vorliegen, sein. Dabei können unterschiedliche Werte für δ herangezogen werden. Weiterhin können alle Verfahren für aktuelle Daten benutzt werden, um daran zu zeigen, ob ein variierender Regressionskoeffizient immer noch realitätsnäher ist. Des Weiteren kann untersucht werden, wie groß das Bestimmtheitsmaß sein muss, um von einem tatsächlichen linearen Zusammenhang ausgehen zu können. Da das Bestimmtheitsmaß hier keinen linearen Zusammenhang nachweist, wäre auch ein Modellwechsel bis hin zum Fehler-in-den-Variablen-Modell⁸⁵ zu betrachten.

⁸¹Siehe *Knabe, M.*, 2012 und *Lütkeschümer, G.*, 2012

⁸²In der Literatur ist nur die rekursive Formel für die RDLS-Schätzung dargestellt - siehe *Neumann, T.*, 2003, S. 260

⁸³Vgl. *Becker, S.*, 2008, (3.9) und (3.12)

⁸⁴Vgl. *Becker, S.*, 2008, S. 11

⁸⁵Vgl. *Gujarati, D. N.*, 1988, S. 415ff

Anhang A: Beweis zu (4.10)

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n \bar{x}^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + \frac{1}{n} n \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} n \bar{x}^2} \\ &= \frac{\bar{xy} - 2\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2} \\ &= \frac{\bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \end{aligned}$$

Anhang B: Ergebnisse der einfachen linearen Regression

ADIDAS

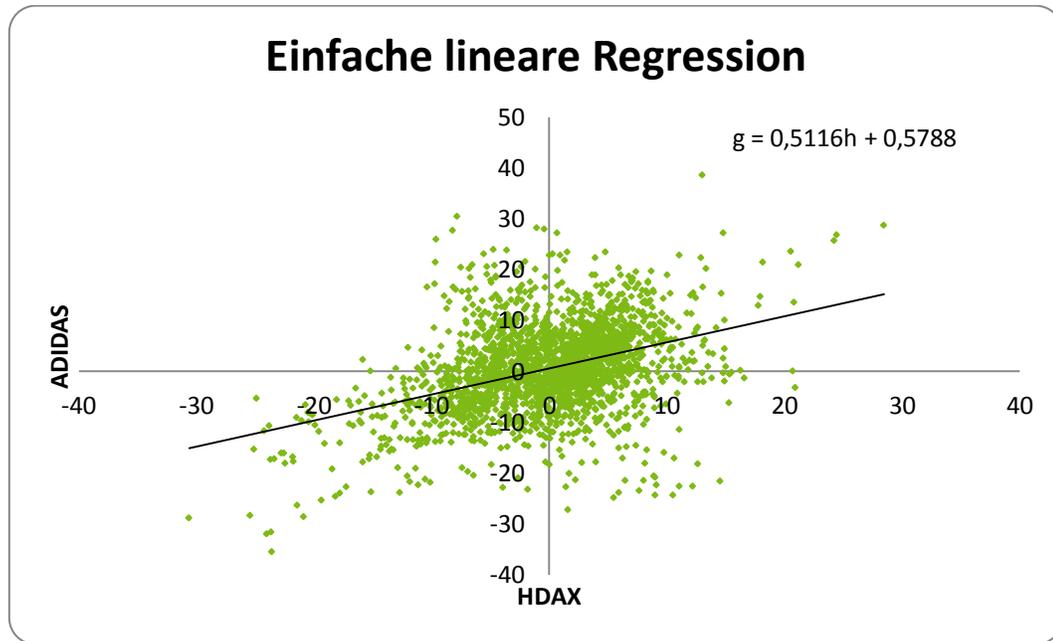


Abbildung 11 Einfache lineare Regression HDAX/ADIDAS

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,39156901							
Bestimmtheitsmaß	0,15332629							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,15296103							
Standardfehler	7,66791776							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	24681,3473	24681,3473	419,772487	7,05E-86			
Residue	2318	136291,36	58,7969621					
Gesamt	2319	160972,707						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	0,57875327	0,15924519	3,63435324	0,00028474	0,26647538	0,89103116	0,26647538	0,89103116
X Variable 1	0,51158372	0,02496949	20,48835	7,05E-86	0,46261884	0,56054859	0,46261884	0,56054859

Tabelle 4 Regressions-Statistik HDAX/ADIDAS

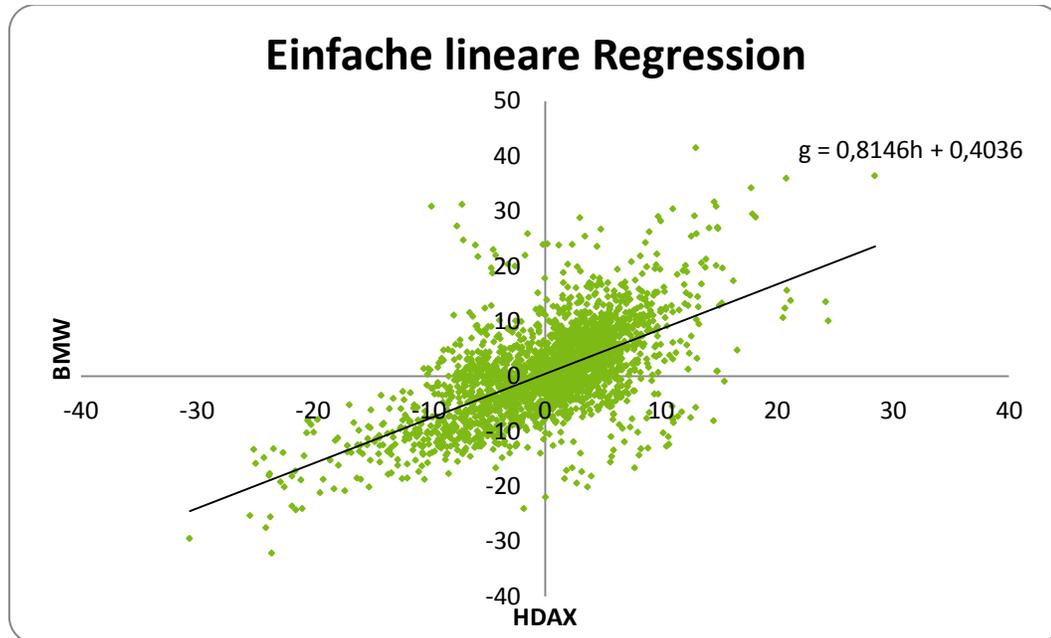


Abbildung 12 Einfache lineare Regression HDAX/BMW

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,62233649							
Bestimmtheitsmaß	0,38730271							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,38703838							
Standardfehler	6,53483513							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	62573,0424	62573,0424	1465,27116	6,97E-249			
Residue	2318	98988,0348	42,7040702					
Gesamt	2319	161561,077						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	0,40357051	0,13571364	2,97369154	0,00297276	0,1374377	0,66970333	0,13743770	0,66970333
X Variable 1	0,81456532	0,02127977	38,2788604	6,97E-249	0,77283595	0,85629469	0,772835950	0,85629469

Tabelle 5 Regressions-Statistik HDAX/BMW

DAIMLER

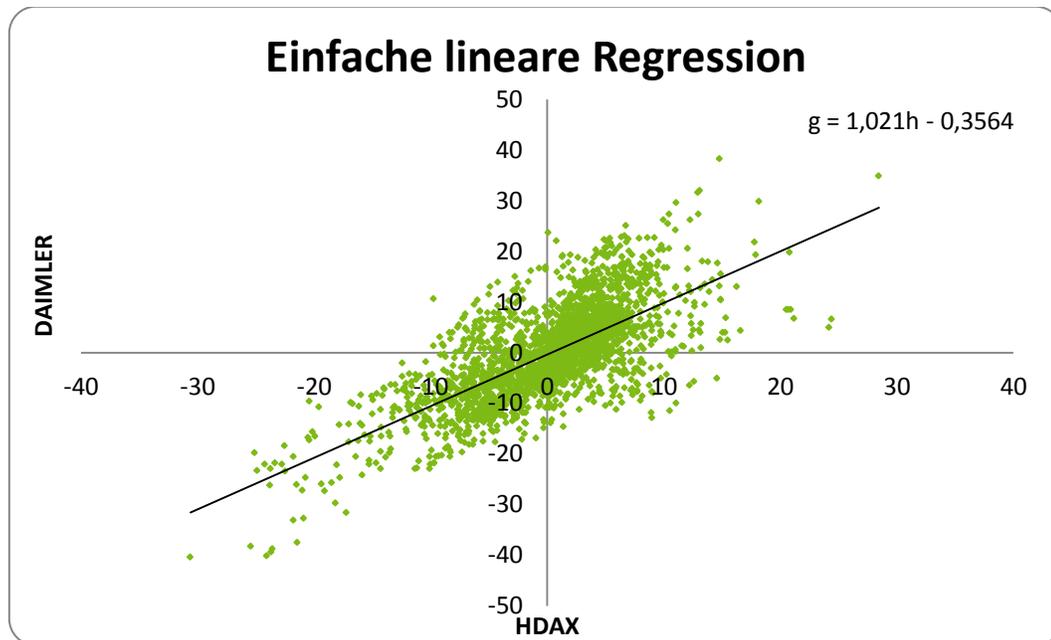


Abbildung 13 Einfache lineare Regression HDAX/DAIMLER

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,7057585							
Bestimmtheitsmaß	0,49809505							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,49787843							
Standardfehler	6,53946252							
Beobachtungen	2319							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	98333,3639	98333,3639	2299,41196	0			
Residue	2317	99085,5087	42,76457					
Gesamt	2318	197418,873						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	-0,35639198	0,13583911	-2,62363308	0,00875682	-0,62277088	-0,09001307	-0,62277088	-0,09001307
X Variable 1	1,02100665	0,02129218	47,9521841	0	0,97925292	1,06276037	0,97925292	1,06276037

Tabelle 6 Regressions-Statistik HDAX/DAIMLER

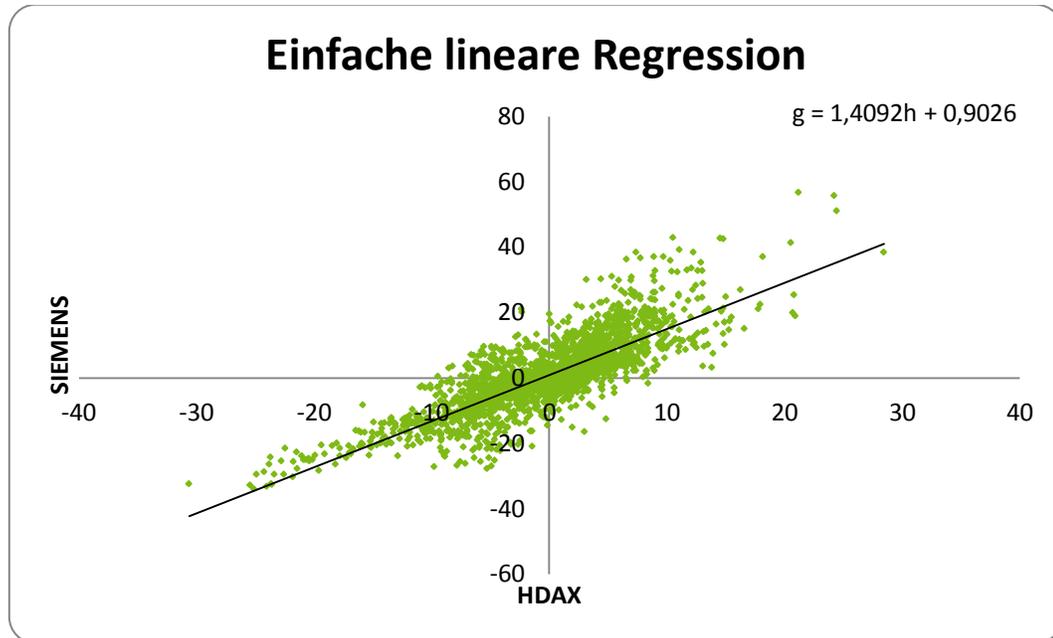


Abbildung 14 Einfache lineare Regression HDAX/SIEMENS

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,81653876							
Bestimmtheitsmaß	0,66673555							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,66659177							
Standardfehler	6,35487899							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	187280,524	187280,524	4637,43726	0,00E+00			
Residue	2318	93611,2407	40,3844869					
Gesamt	2319	280891,765						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	0,90262816	0,13197636	6,83931678	1,0143E-11	0,6438241	1,16143222	0,6438241	1,16143222
X Variable 1	1,40921932	0,02069377	68,0987317	0,00E+00	1,3686391	1,44979955	1,3686391	1,44979955

Tabelle 7 Regressions-Statistik HDAX/SIEMENS

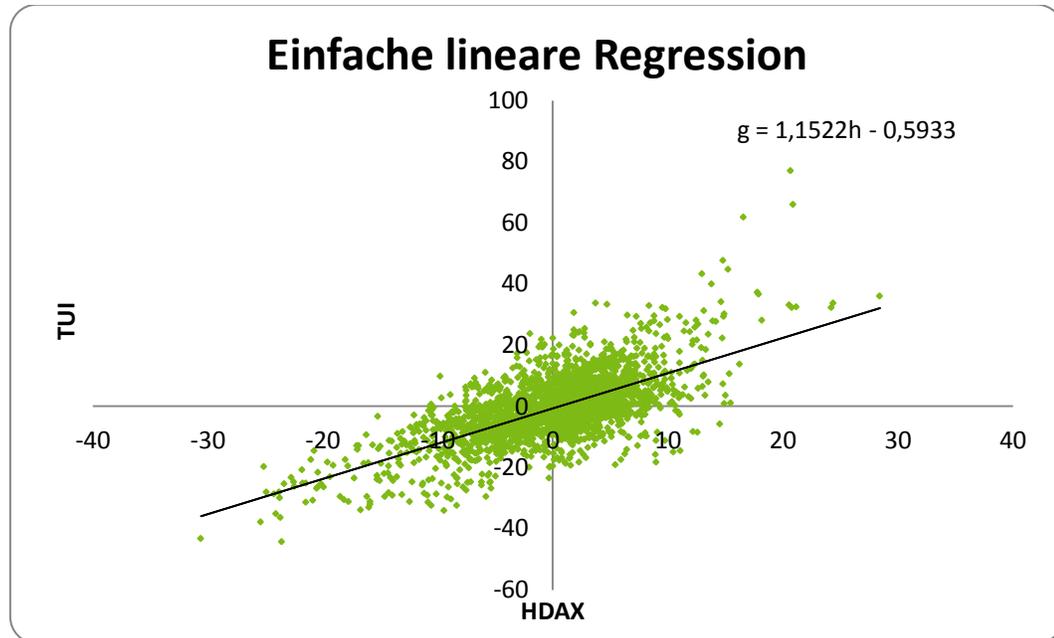


Abbildung 15 Einfache lineare Regression HDAX/TUI

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,66837261							
Bestimmtheitsmaß	0,44672195							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,44648326							
Standardfehler	8,17898293							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	125200,448	125200,448	1871,57519	2,921E-300			
Residue	2318	155064,376	66,8957618					
Gesamt	2319	280264,824						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	-0,59326678	0,16985885	-3,49270459	0,00048711	-0,92635793	-0,26017563	-0,92635793	-0,26017563
X Variable 1	1,15221951	0,0266337	43,2617058	2,921E-300	1,09999113	1,20444788	1,09999113	1,20444788

Tabelle 8 Regressions-Statistik HDAX/TUI

Anhang C: Ergebnisse der rekursiven KQ-Schätzung

ADIDAS

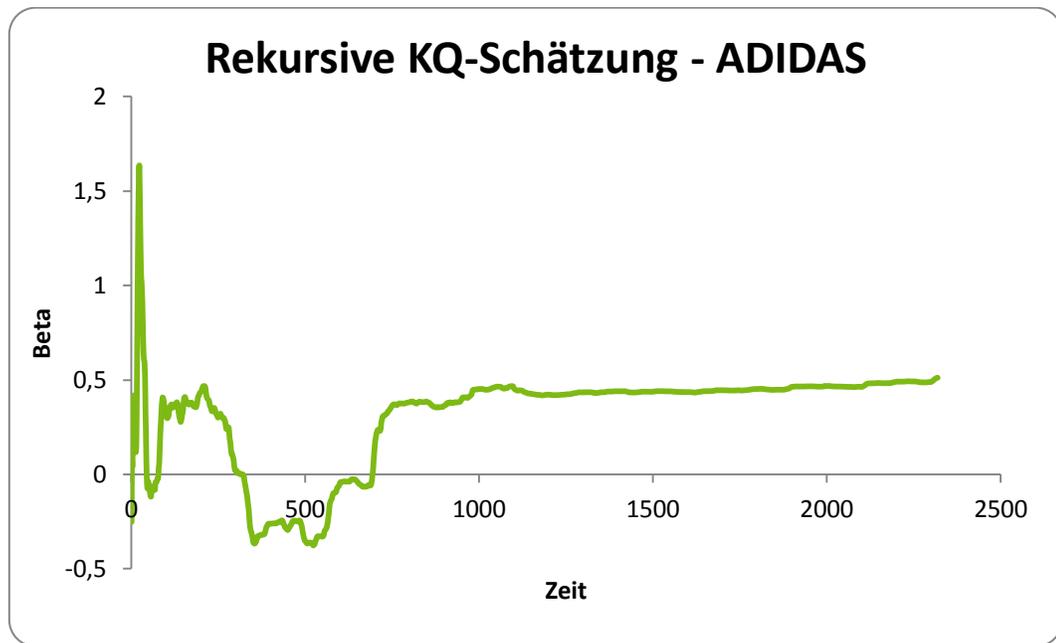


Abbildung 16 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/ADIDAS

BMW

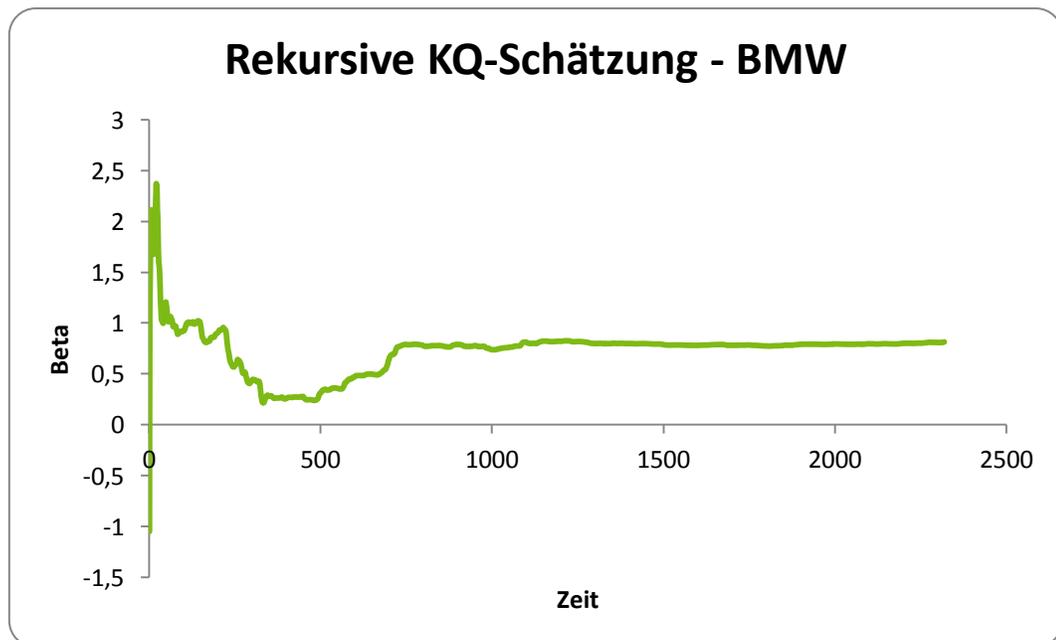


Abbildung 17 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/BMW

DAIMLER

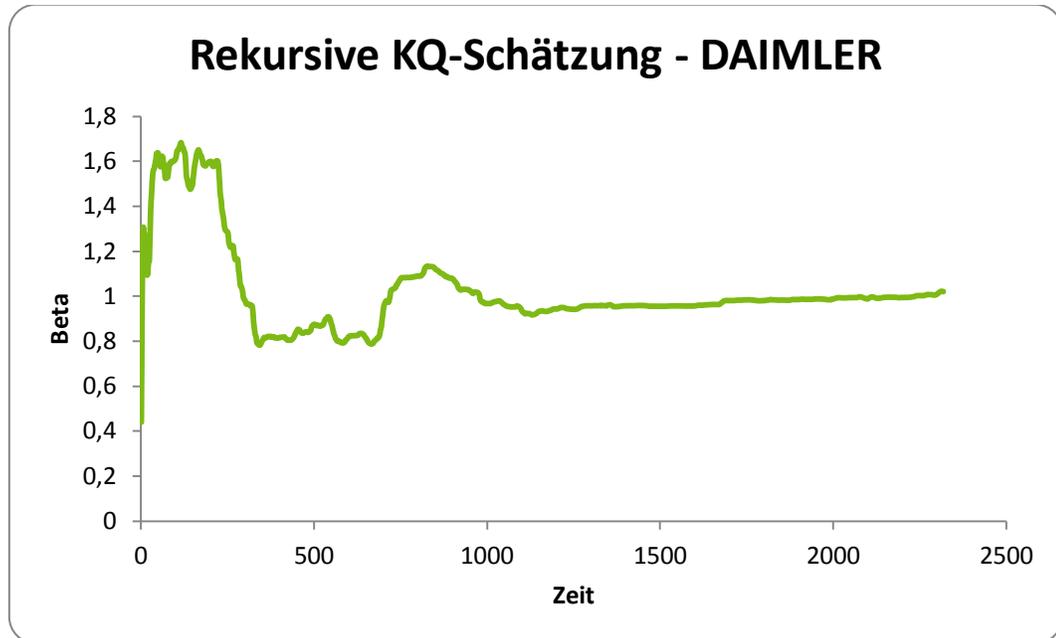


Abbildung 18 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/DAIMLER

SIEMENS

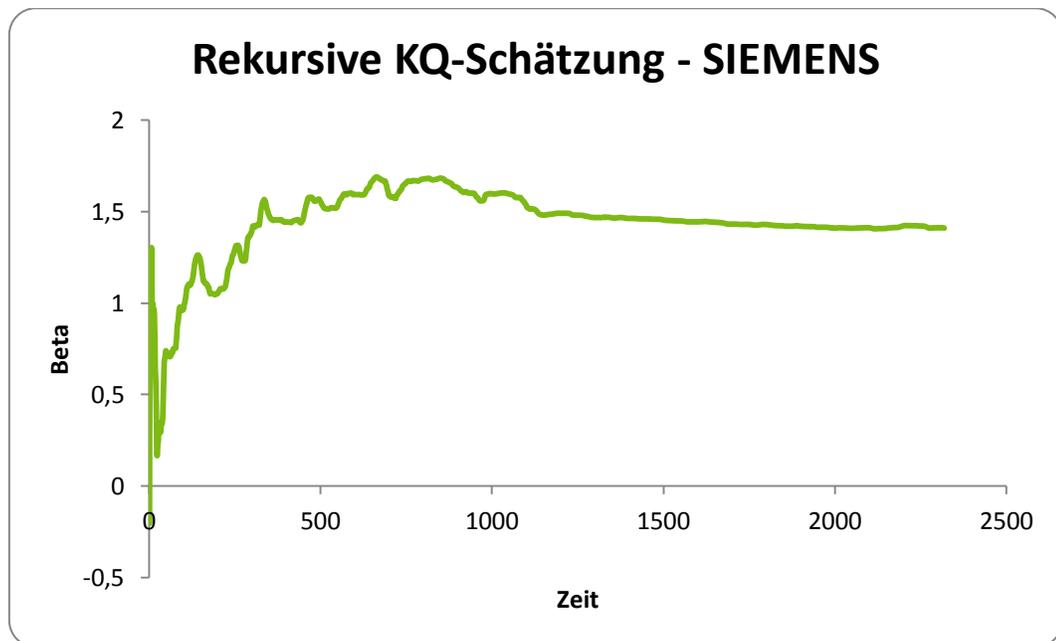


Abbildung 19 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/SIEMENS

TUI

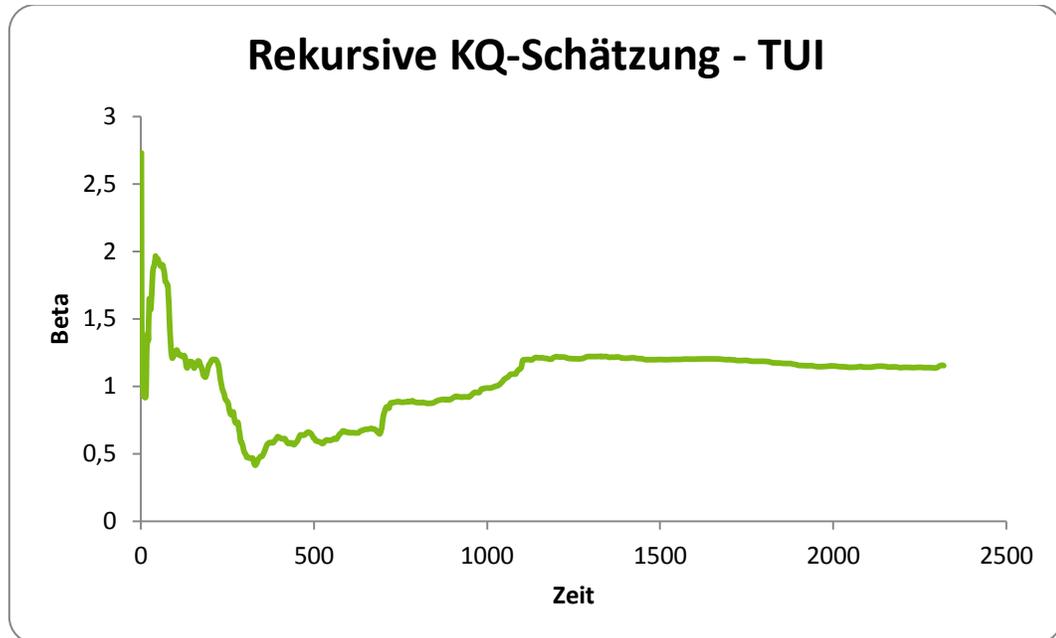


Abbildung 20 Rekursive KQ-Schätzung HDAX/TUI

Anhang D: Ergebnisse der RDLS-Schätzung

ADIDAS

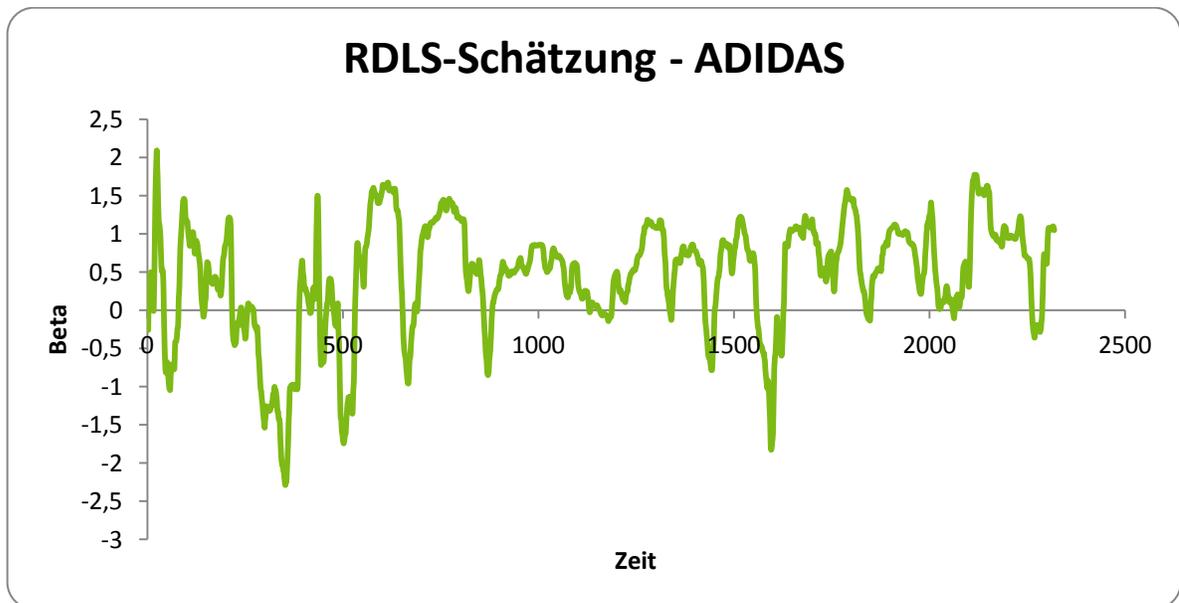


Abbildung 21 RDLS-Schätzung HDAX/ADIDAS

BMW

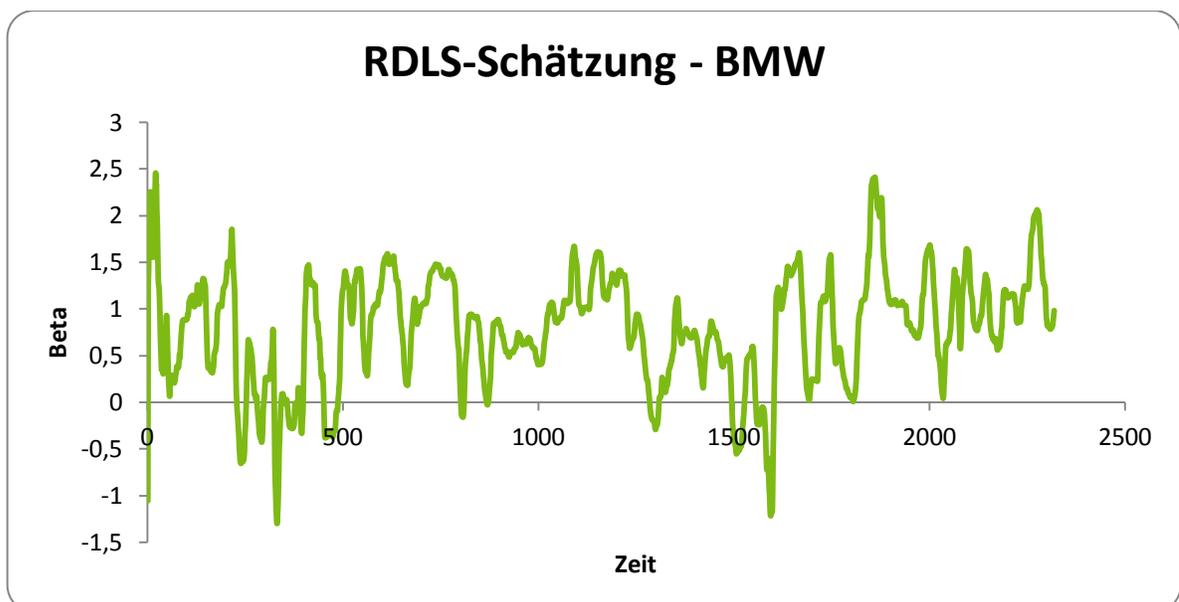


Abbildung 22 RDLS-Schätzung HDAX/BMW

DAIMLER

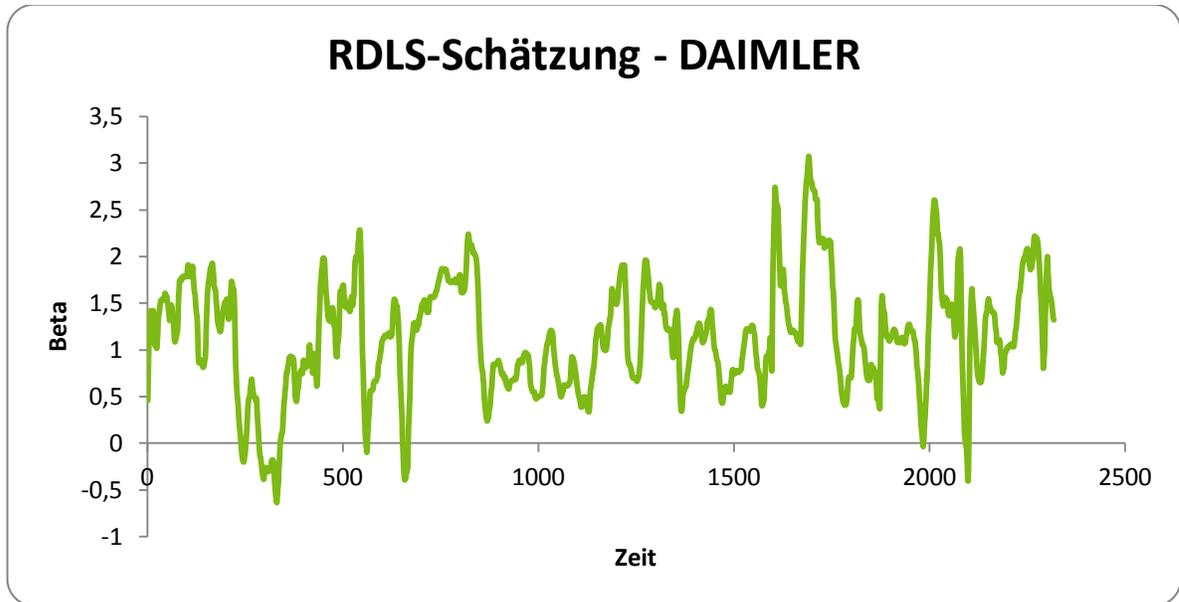


Abbildung 23 RDLS-Schätzung HDAX/DAIMLER

SIEMENS

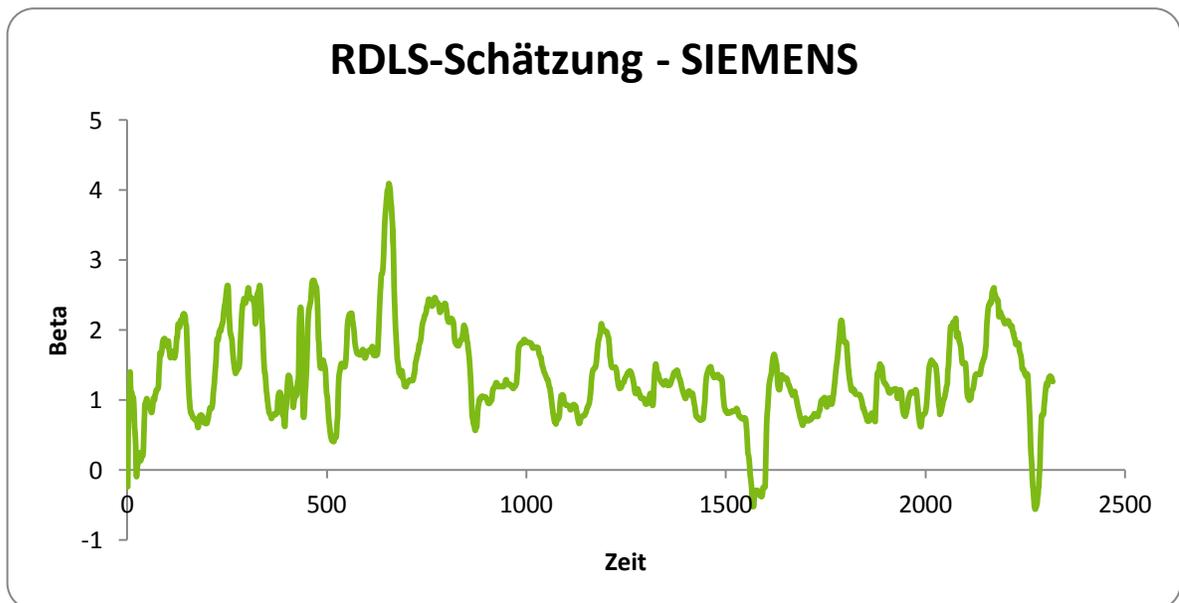


Abbildung 24 RDLS-Schätzung HDAX/SIEMENS

TUI

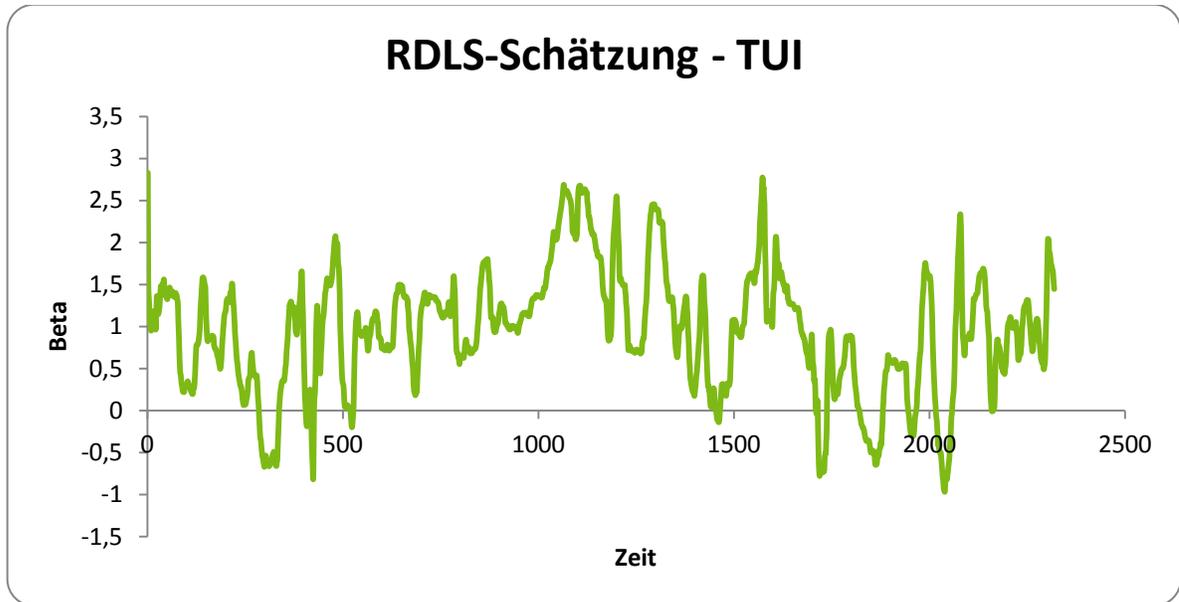


Abbildung 25 RDLS-Schätzung HDAX/TUI

Anhang E: Vergleich RDLS-Schätzung mit einfacher KQ-Schätzung

RDLS-Schätzungen					
	ADIDAS	BMW	DAIMLER	SIEMENS	TUI
Minimum	-2,28953898	-1,29633287	-0,63673833	-0,56069651	-0,96736263
Maximum	2,09144318	2,45676709	3,07334423	4,08991983	2,83054465
Mittelwert	0,4488599	0,78224054	1,14373554	1,34797682	0,94354998
einfache KQ-Schätzung					
Beta	0,51158372	0,81456532	1,02100665	1,40921932	1,15221951

Tabelle 9 Vergleich RDLS-Schätzungen - einfache KQ-Schätzungen

Anhang F: Beweis zu Satz 4.3

$$DSS(b_0, b_1) := \sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_0 \delta_t - b_1 \delta_t h_t)^2 \rightarrow \min$$

Es werden die partiellen Ableitungen gebildet. Für b_0 erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial b_0} \sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_0 \delta_t - b_1 \delta_t h_t)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & -2 \sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_0 \delta_t - b_1 \delta_t h_t) \delta_t = 0 \quad | : -2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{t=1}^T \delta_t^2 g_t - b_0 \delta_t^2 - b_1 \delta_t^2 h_t = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{t=1}^T \delta_t^2 g_t - b_0 \sum_{t=1}^T \delta_t^2 - b_1 \sum_{t=1}^T \delta_t^2 h_t = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{T} \right. \\ \Leftrightarrow & \overline{\delta^2 g} - b_0 \overline{\delta^2} - b_1 \overline{\delta^2 h} = 0 \quad \left| + b_0 \overline{\delta^2} \right. \\ \Leftrightarrow & \overline{\delta^2 g} - b_1 \overline{\delta^2 h} = b_0 \overline{\delta^2} \quad \left| : \overline{\delta^2} \right. \\ \Leftrightarrow & b_0 = \frac{\overline{\delta^2 g} - b_1 \overline{\delta^2 h}}{\overline{\delta^2}} \end{aligned}$$

Für b_1 erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial b_1} \sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_0 \delta_t - b_1 \delta_t h_t)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & -2 \sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_0 \delta_t - b_1 \delta_t h_t) \delta_t h_t = 0 \quad | : -2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{t=1}^T \delta_t^2 g_t h_t - b_0 \delta_t^2 h_t - b_1 \delta_t^2 h_t^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^T \delta_t^2 g_t h_t - b_0 \sum_{t=1}^T \delta_t^2 h_t - b_1 \sum_{t=1}^T \delta_t^2 h_t^2 = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{T} \right.$$

$$\Leftrightarrow \overline{\delta^2 g h} - b_0 \overline{\delta^2 h} - b_1 \overline{\delta^2 h^2} = 0$$

Im nächsten Schritt wird b_0 eingesetzt:

$$\Leftrightarrow \overline{\delta^2 g h} - \frac{\overline{\delta^2 g} - b_1 \overline{\delta^2 h}}{\overline{\delta^2}} \overline{\delta^2 h} - b_1 \overline{\delta^2 h^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{\delta^2 g h} - \frac{\overline{\delta^2 g} \overline{\delta^2 h} - b_1 (\overline{\delta^2 h})^2}{\overline{\delta^2}} - b_1 \overline{\delta^2 h^2} = 0 \quad \left| -\overline{\delta^2 g h} + b_1 \overline{\delta^2 h^2} \right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\overline{\delta^2 g} \overline{\delta^2 h} - b_1 (\overline{\delta^2 h})^2}{\overline{\delta^2}} = b_1 \overline{\delta^2 h^2} - \overline{\delta^2 g h} \quad \left| \cdot \overline{\delta^2} \right.$$

$$\Leftrightarrow -\overline{\delta^2 g} \overline{\delta^2 h} + b_1 (\overline{\delta^2 h})^2 = b_1 \overline{\delta^2 h^2} \overline{\delta^2} - \overline{\delta^2 g h} \overline{\delta^2} \quad \left| +\overline{\delta^2 g h} \overline{\delta^2} - b_1 (\overline{\delta^2 h})^2 \right.$$

$$\Leftrightarrow -\overline{\delta^2 g} \overline{\delta^2 h} + \overline{\delta^2 g h} \overline{\delta^2} = b_1 \overline{\delta^2 h^2} \overline{\delta^2} - b_1 (\overline{\delta^2 h})^2$$

$$\Leftrightarrow -\overline{\delta^2 g} \overline{\delta^2 h} + \overline{\delta^2 g h} \overline{\delta^2} = b_1 (\overline{\delta^2 h^2} \overline{\delta^2} - (\overline{\delta^2 h})^2) \quad \left| : (\overline{\delta^2 h^2} \overline{\delta^2} - (\overline{\delta^2 h})^2) \right.$$

$$\Leftrightarrow b_1 = \frac{\overline{\delta^2 g h} \overline{\delta^2} - \overline{\delta^2 g} \overline{\delta^2 h}}{\overline{\delta^2 h^2} \overline{\delta^2} - (\overline{\delta^2 h})^2}$$

Das Ergebnis sind die DSS-Schätzer. Aufgrund der Übersichtlichkeit wird in dem Beweis auf den Index DSS verzichtet (b_0^{DSS} und b_1^{DSS}).

Anhang G: Beweis zu Proposition 4.1

Ist $\beta_0 = 0$, so ist die nachstehende Gleichung zu minimieren:

$$\sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_1 \delta_t h_t)^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1} \sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_1 \delta_t h_t)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sum_{t=1}^T (\delta_t g_t - b_1 \delta_t h_t) \delta_t h_t = 0 \quad | : -2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^T \delta_t^2 g_t h_t - b_1 \delta_t^2 h_t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^T \delta_t^2 g_t h_t - b_1 \sum_{t=1}^T \delta_t^2 h_t^2 = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{T} \right.$$

$$\Leftrightarrow \overline{\delta^2 g h} - b_1 \overline{\delta^2 h^2} = 0 \quad \left| + b_1 \overline{\delta^2 h^2} \right.$$

$$\Leftrightarrow \overline{\delta^2 g h} = b_1 \overline{\delta^2 h^2} \quad \left| : \overline{\delta^2 h^2} \right.$$

$$\Leftrightarrow b_1 = \frac{\overline{\delta^2 g h}}{\overline{\delta^2 h^2}}$$

Ist $\gamma_0 = 0$ ist die nachstehende Gleichung zu minimieren:

$$\sum_{t=1}^T (v_t - c_1 u_t)^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \sum_{t=1}^T (v_t - c_1 u_t)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sum_{t=1}^T (v_t - c_1 u_t) u_t = 0 \quad | : -2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^T v_t u_t - c_1 u_t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^T v_t u_t - c_1 \sum_{t=1}^T u_t^2 = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{T} \right.$$

$$\Leftrightarrow \overline{v u} - c_1 \overline{u^2} = 0 \quad \left| + c_1 \overline{u^2} \right.$$

$$\Leftrightarrow \overline{v u} = c_1 \overline{u^2} \quad \left| : \overline{u^2} \right.$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{\overline{v u}}{\overline{u^2}}$$

Zu zeigen: $b_1 = c_1$ für $\beta_1 = \gamma_1 = 0$

$$c_1 = \frac{\overline{v u}}{\overline{u^2}} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T v_t u_t}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t^2} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_t^2 g_t h_t}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_t^2 h_t^2} = \frac{\overline{\delta^2 g h}}{\overline{\delta^2 h^2}} = b_1$$

mit $u_t = \delta_t h_t$ und $v_t = \delta_t g_t$.

Anhang H: Ergebnisse der Regression mit falscher Berechnung der Einmonatsrenditen

Siehe hierzu Kapitel 3 (3.2).

SIEMENS

Erste Regression:

<i>Regressions-Statistik</i>								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,83291332							
Bestimmtheitsmaß	0,6937446							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,69361248							
Standardfehler	6,20275527							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	<i>Freiheitsgrade (df)</i>	<i>Quadratsummen (SS)</i>	<i>Mittlere Quadratsumme (MS)</i>	<i>Prüfgröße (F)</i>	<i>F krit</i>			
Regression	1	202021,966	202021,966	5250,84623	0			
Residue	2318	89183,1329	38,474173					
Gesamt	2319	291205,099						
	<i>Koeffizienten</i>	<i>Standardfehler</i>	<i>t-Statistik</i>	<i>P-Wert</i>	<i>Untere 95%</i>	<i>Obere 95%</i>	<i>Untere 95,0%</i>	<i>Obere 95,0%</i>
Schnittpunkt	0,28368779	0,12887848	2,20120368	0,02781985	0,03095864	0,53641694	0,03095864	0,53641694
X Variable 1	1,3842632	0,01910311	72,4627231	0	1,34680224	1,42172417	1,34680224	1,42172417

Tabelle 10 Regressions-Statistik - erste Regression SIEMENS

Zweite Regression:

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,83295125							
Bestimmtheitsmaß	0,69380779							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,69367569							
Standardfehler	6,20211539							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	202040,366	202040,366	5252,4081	0			
Residue	2318	89164,7334	38,4662353					
Gesamt	2319	291205,099						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	-0,08042306	0,12876443	-0,6245751	0,53231143	-0,33292855	0,17208244	-0,33292855	0,17208244
X Variable 1	1,38744876	0,01914422	72,4734993	0	1,34990717	1,42499034	1,34990717	1,42499034

Tabelle 11 Regressions-Statistik - zweite Regression SIEMENS

Dritte Regression:

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,8325353							
Bestimmtheitsmaß	0,69311503							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,69298263							
Standardfehler	6,2024051							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	201401,813	201401,813	5235,31864	0			
Residue	2318	89173,0637	38,469829					
Gesamt	2319	290574,877						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	0,18261319	0,12877045	1,41812967	0,15628733	-0,0699041	0,43513048	-0,0699041	0,43513048
X Variable 1	1,38525449	0,01914512	72,3555018	0	1,34771115	1,42279783	1,34771115	1,42279783

Tabelle 12 Regressions-Statistik - dritte Regression SIEMENS

Vierte Regression:

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,83242366							
Bestimmtheitsmaß	0,69292916							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,69279668							
Standardfehler	6,2042831							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	201347,804	201347,804	5230,74663	0			
Residue	2318	89227,0726	38,4931288					
Gesamt	2319	290574,877						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	0,54611555	0,12891023	4,23640198	2,3601E-05	0,29332415	0,79890695	0,29332415	0,79890695
X Variable 1	1,38195158	0,01910781	72,3239008	0	1,34448139	1,41942177	1,34448139	1,41942177

Tabelle 13 Regressions-Statistik - vierte Regression SIEMENS

ADIDAS

Regressions-Statistik								
Multipler Korrelationskoeffizient	0,42329258							
Bestimmtheitsmaß	0,17917661							
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0,1788225							
Standardfehler	7,77988935							
Beobachtungen	2320							
ANOVA								
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgröße (F)	F krit			
Regression	1	30626,1115	30626,1115	505,993594	1,612E-101			
Residue	2318	140300,84	60,5266782					
Gesamt	2319	170926,952						
	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%	Untere 95,0%	Obere 95,0%
Schnittpunkt	0,09554245	0,16164757	0,59105405	0,55454183	-0,22144649	0,41253139	-0,22144649	0,41253139
X Variable 1	0,53897089	0,02396033	22,4943014	1,612E-101	0,49198497	0,58595681	0,49198497	0,58595681

Tabelle 14 Regressions-Statistik - erste Regression ADIDAS

Datenverzeichnis

Alle Daten, die in dieser Arbeit verwendet werden, sind historische Zeitreihen/Kurse. Es handelt sich um tägliche Daten. Dabei ist zu beachten, dass hierbei Börsenhandelstage gemeint sind.

- Tagesschlusskurse und Handelsvolumen von YAHOO vom 02.01.2008 bis 08.02.2008, unter <http://de.finance.yahoo.com/q/hp?a=00&b=2&c=2008&d=01&e=8&f=2008&g=d&s=YHOO%2C+&q|1>
(Abruf am 03.09.2013)
- Tagesschlusskurse und Handelsvolumen von MICROSOFT vom 02.01.2008 bis 08.02.2008, unter <http://de.finance.yahoo.com/q/hp?a=00&b=2&c=2008&d=01&e=8&f=2008&g=d&s=MSFT%2C+&q|1>
(Abruf am 03.09.2013)
- Tagesschlusskurse des HDAX vom 27.11.1998 bis 21.06.1999, unter <http://www.wallstreet-online.de/indizes/18289/historische-kurse>
(Abruf am 28.05.2013)
Tagesschlusskurse des HDAX vom 22.06.1999 bis 11.02.2008, unter http://www.ariva.de/hdax_%28kurs%29-index
(Abruf am 28.05.2013)
- Tägliche Zinssätze (p.a.) des Einmonats-EURIBOR vom 27.11.1998 bis 11.02.2008 unter http://www.ariva.de/euribor_1_monat/historische_kurse
(Abruf am 28.05.2013)
- Tagesschlusskurse von SIEMENS vom 27.11.1998 bis 11.02.2008, unter http://www.ariva.de/siemens-aktie/historische_kurse
(Abruf am 28.05.2013)

- Tagesschlusskurse von ADIDAS vom 27.11.1998 bis 11.02.2008, unter http://www.ariva.de/adidas-aktie/historische_kurse
(Abruf am 29.05.2013)
- Tagesschlusskurse von TUI vom 27.11.1998 bis 31.08.1999, unter <http://www.wallstreet-online.de/aktien/tui-aktie/historische-kurse>
(Abruf am 13.06.2013)
Tagesschlusskurse von TUI vom 01.09.1999 bis 11.2008, unter http://www.ariva.de/tui-aktie/historische_kurse
(Abruf am 13.06.2013)
- Tagesschlusskurse von DAIMLER vom 27.11.1998 bis 11.02.2008, unter http://www.ariva.de/daimler-aktie/historische_kurse
(Abruf am 14.06.2013)
- Tagesschlusskurse von BMW vom 27.11.1998 bis 11.02.2008, unter http://www.ariva.de/bmw-aktie/historische_kurse
(Abruf am 13.06.2013)

Literaturverzeichnis

Wissenschaftliche Quellen

Becker, Steffen [2008]: Der Betafaktor im CAPM als variierender Regressionskoeffizient, Arbeitspapiere des Instituts für Statistik und Ökonometrie der Universität Mainz, 39, 2008

Büchter, Andreas/Henn, Hans-Wolfgang [2007]: Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls; mit 45 Tabellen, 2. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2007

Deutsche Börse AG [2013]: Leitfaden zu den Aktienindizes der Deutschen Börse, Januar 2013

Fahrmeir, Ludwig/Hamerle, Alfred/Tutz, Gerhard [1996]: Multivariate statistische Verfahren, 2. Aufl., Berlin: Walter de Gruyter, 1996

Fahrmeir, Ludwig u. a. [2004]: Statistik: Der Weg zur Datenanalyse, Fünfte, verbesserte Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004

Fischer, Bernd R. [2010]: Performanceanalyse in der Praxis: Performancemasse, Attributionsanalyse, Global-Investment-Performance-Standards, 3. Aufl., München: Oldenbourg, 2010

Gujarati, Damodar N. [1988]: Basic econometrics, 2. Aufl., New York: McGraw-Hill, 1988

Hanauer, Matthias/Kaserer, Christoph/Rapp, Marc S. [2013]: Risikofaktoren und Multifaktormodelle für den deutschen Aktienmarkt, Arbeitspapier, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Technische Universität München, 11.02.2013

Hartung, Joachim/Elpelt, Bärbel [1992]: Multivariate Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik, 4. Aufl., München, Wien: R. Oldenbourg, op. 1992

Hartung, Joachim/Elpelt, Bärbel/Klößener, Karl-Heinz [2009]: Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik ; [mit zahlreichen durchgerechneten Beispielen], 15. Aufl., München: Oldenbourg, 2009

- Hausmann, Wilfried* [2002]: *Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection: Stochastische Finanzmarktmodelle und ihre Anwendungen*, 1. Aufl., Braunschweig: Vieweg, 2002
- Knabe, Matthias* [2012]: *Die Berücksichtigung von Insolvenzrisiken in der Unternehmensbewertung*, Bd. 37, 1. Aufl., Lohmar, Rhein: Eul, J, 2012
- Kreyszig, Erwin* [1988]: *Statistische Methoden und ihre Anwendungen: Mit zahlr. Tab*, 3., unveränd. Nachdr. d. 7. Aufl., Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1988
- Lütkepohl, Helmut/Moryson, Martin/Wolters, Jürgen* [1995]: *Stabilitätsanalyse der bundesdeutschen Geldnachfrage anhand alternativer Ansätze zur Modellierung variierender Regressionskoeffizienten*, in: *Kredit und Kapital* Nr. 1 v. 1995, S. 107–132
- Lütkeschümer, Gerrit* [2012]: *Die Berücksichtigung von Finanzierungsrisiken bei der Ermittlung von Eigenkapitalkosten in der Unternehmensbewertung*, Bd. 39, 1. Aufl., Lohmar: Eul, 2012
- Neumann, Thorsten* [2003]: *Time-varying coefficient models: A comparison of alternative estimation strategies*, in: *Allgemeines Statistisches Archiv* v. 2003, S. 257–280
- Opfer, Heiko* [2004]: *Zeitvariable Asset-Pricing-Modelle für den deutschen Aktienmarkt: Empirische Untersuchung der Bedeutung makroökonomischer Einflussfaktoren*, 1. Aufl., Wiesbaden: Dt. Univ.-Verl., 2004
- Pestman, Wiebe R.* [2009]: *Mathematical statistics*, 2. Aufl., Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2009
- Pfennig, Michael* [1993]: *Zur fundamentalen Erklärung der Beta-Faktoren am deutschen Aktienmarkt*, Frankfurt am Main: Dorwi Verlag + Druck GmbH, 1993
- Schlittgen, Rainer* [2008]: *Multivariate Statistik*, 1. Aufl., München: Oldenbourg, R, 2008
- Schmid, Friedrich/Trede, Mark M.* [2005]: *Finanzmarktstatistik: Mit 35 Tabellen*, Berlin [u.a]: Springer, 2005
- Steiner, Manfred/Bruns, Christoph* [2007]: *Wertpapiermanagement: Professionelle Wertpapieranalyse und Portfoliostrukturierung*, 9. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel, 2007

Stellbrink, Jörn/Brückner, Carsten [2011]: Beta-Schätzung: Schätzzeitraum und Renditeintervall unter statistischen Gesichtspunkten, in: *Bewertungs Praktiker* 03/2011, S. 2–9

Walz, Guido/Grabowski, Barbara [2004]: *Lexikon der Statistik*, 1. Aufl., München: Elsevier, Spektrum Akademischer Verlag, 2004

Warfsmann, Jürgen [1993]: *Das Capital Asset Pricing Model in Deutschland: Univariate und multivariate Tests für den Kapitalmarkt*, Wiesbaden: Deutscher Universitäts Verlag, 1993

Internetquellen

1. *Springer Gabler Verlag (Hrsg.)*, *Gabler Wirtschaftslexikon: Capital Asset Pricing Model (CAPM)*, unter <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/119/capital-asset-pricing-model-capm-v8.html> (Abruf am 08.09.2013)
2. *Bert H Deiters (Hrsg.)*, *DeiFin – Die Finanzseite: Der Beta-Faktor (β) in Theorie und Anlagepraxis*, unter <http://www.deifin.de/thema010.htm> (Abruf am 17.08.2013)
3. *Technische Universität Dresden*, *FinanceWiki: Marktmodell*, unter <http://finance.wiwi.tu-dresden.de/Wiki-fi/index.php/Marktmodell> (Abruf am 27.07.2013)
4. *Triami Media*, *Euribor-rates.eu: Was ist Euribor?*, unter <http://de.euribor-rates.eu/was-ist-der-euribor.asp> (Abruf am 10.08.2013)



Technische Hochschule Mittelhessen

Campus Friedberg
Wilhelm-Leuschner-Str. 13
61169 Friedberg

www.thm.de