Übersicht

Friedberger Hochschulschriften Band 25

25 mathematische Probleme

25 mathematische Briefmarken

Vorwort

Auf dieser CD finden Sie 25 mathematische Probleme mit Lösungen und 25 mathematische Briefmarken. Sie sind dem 25-jährigen Bestehen des Studiengangs Mathematik an der Fachhochschule Gießen-Friedberg gewidmet. Sie erscheinen gleichzeitig in gedruckter Form als Doppelband Nr. 25 der *Friedberger Hochschulschriften*. Im Internet sind alle Probleme und Briefmarken auf meiner Homepage (www.fh-friedberg.de/users/boergens/main.htm) zwischen Oktober 2000 und Dezember 2002 erschienen; beide Reihen werden dort auch fortgesetzt.

Der Friedberger Studiengang Mathematik besteht seit einem Vierteljahrhundert und hat sich sehr erfolgreich entwickelt. Ich freue mich, dass ich an diesem Erfolgsweg mitarbeiten konnte. Mit dieser Publikation danke ich dem Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und Datenverarbeitung am Friedberger Standort der Fachhochschule, dem ich seit 1984 angehöre, für die langjährige, gute kollegiale Zusammenarbeit.

Für die Unterstützung bei der Erstellung dieser Publikation danke ich den Friedberger Mathematik-Studentinnen Frau Yvonne Sorgius und Frau Alexandra Medebach sowie der Lektorin Frau Maria Haines für das vorbildlich sorgfältige Lektorat und ihren Einsatz bei der Drucklegung. Herrn Daniel Werner, der in Friedberg Wirtschaftsinformatik studiert, danke ich für seine Pionierarbeit bei der Umsetzung der Beiträge auf der Homepage in eine publizierbare Form.

Bei der verwendeten Literatur ist an mehreren Stellen die Zeitschrift *Philamath* angegeben. Diese ist über die *Mathematical Study Unit* der *American Topical Association* erhältlich.

Manfred Börgens
im Mai 2003

---

zurück zur Übersicht

---

zurück zur Übersicht

1. Fermats Letzter Satz
2. Leonhard Euler
3. 1/4 Silbergroschen
4. Friedrich Wilhelm Bessel
5. Goldener Schnitt, Logarithmische Spirale
6. Tsu Ch'ung Chi
7. Edmond Halley
8. Trinity College, Cambridge
9. Chen Jing-run
10. Transit-Teleskop von George Biddell Airy
11. Luca Pacioli
12. Simon Stevin
13. Adam Riese
14. Die Mathematik im Baum der Wissenschaften
15. Isaac Newton
16. Beweis des Vierfarbensatzes 1977
17. René Descartes
18. Evangelista Torricelli
19. Nautische Winkelmesser: Quadrant und Sextant
20. Windrose, "Strich" als mathematische Einheit
21. Satz des Pythagoras
22. Rechenmaschine von Johann Christoph Schuster
23. Bertrand Russell
24. Mathematiker-Kongress 1998, Quadratische Pflasterung, Vierfarbensatz, Pi
25. Janos Bolyai, Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski

---

zurück zur Übersicht

Copyright

Friedberger Hochschulschriften

Herausgeber: / Editors:
Die Dekane der Fachbereiche des Bereichs Friedberg der FH Gießen-Friedberg
Wilhelm-Leuschner-Straße 13
61169 Friedberg
Deutschland / Germany
http://www.fh-friedberg.de

Friedberg 2003

ISSN 1439-1112

---

zurück zur Übersicht

Davids Wiese und Pauls Wiese

David H. und Paul E. besitzen benachbarte Wiesen. Beide Wiesen sind Vierecke, deren Grenzen exakt in Nord-Süd- bzw. West-Ost-Richtung verlaufen. Davids Wiese ist an der Nord- und Südgrenze jeweils 900 m lang, die West- und die Ostgrenze sind jeweils 500 m lang. Bei Paul ist es umgekehrt: 500 m Grenzlänge im Norden und Süden, 900 m im Westen und Osten. Jetzt das Problem:

a) Wer besitzt die größere Wiese?
b) Wann geht auf den Wiesen morgens die Sonne auf?

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

2

Das Erbe der Gebrüder B.

Wie beim vorigen Problem gibt es wieder eine Wiesenaufgabe.

Die Brüder Jakob B. und Johann B. bewirtschaften gemeinsam eine Anzahl von Wiesen, die sie in der Nähe von Basel geerbt haben. Sie streiten sich viel (meist darüber, wer der bessere Mathematiker ist) und beschließen daher eines Tages, die Wiesen aufzuteilen. Diese sind sehr unterschiedlich gelegen; deshalb soll von jeder Wiese genau die Hälfte an jeden Bruder fallen. Jakob und Johann stellen fest, dass sie alle notwendigen Halbierungen durchführen können, indem sie jeweils eine gerade Grenze von Rand zu Rand ziehen. Auf diesen neuen Grenzen sollen Zäune gezogen werden, die natürlich möglichst kurz sein sollen. Die beiden Brüder geraten ins Nachdenken. Jakob fordert seinen Bruder mit einer Aufgabe heraus:

Ist die kürzeste Grenze immer gerade?

Johann kann das beantworten! Sie auch?

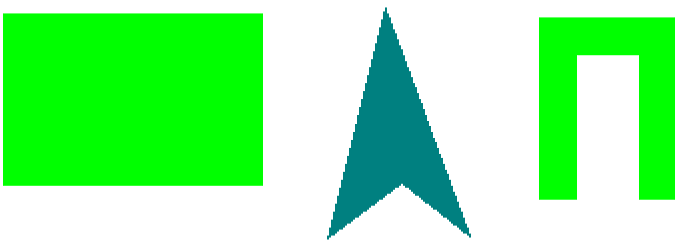
Johann nimmt Revanche und fragt seinen Bruder:

Kann es auch Wiesen geben, die sich durch keine gerade Strecke gerecht teilen lassen?

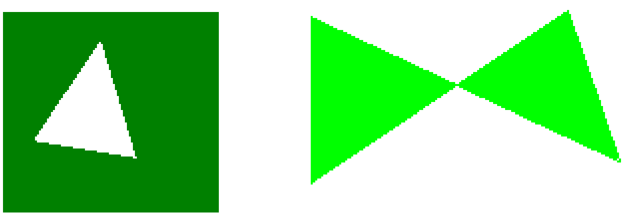
Mit Genugtuung präsentiert Jakob kurz darauf die Antwort. Wie lautet sie?

Bevor Sie anfangen, über die beiden Probleme nachzudenken, soll die Aufgabenstellung präziser formuliert werden. Unter einer Wiese soll eine ebene, endliche Fläche verstanden werden, die von einem geschlossenen Polygonzug (n-Eck) ohne Doppelpunkte (Berühr- oder Kreuzungspunkte) begrenzt wird. (Also bitte keine sphärische Geometrie wie beim Problem Nr. 1; hier ist nur ebene Geometrie verlangt.)

So könnten die Wiesen aussehen:



So dürfen die Wiesen nicht aussehen:



Die Teilungslinie soll in einem Stück von Rand zu Rand verlaufen und zwei gleich große zusammenhängende Wiesenstücke erzeugen, z.B. so:

Aber nicht so:

Wenn nun (im ersten Problem) gefragt wird, ob die kürzeste Teilungslinie immer gerade ist, so wird natürlich vorausgesetzt, dass die Wiese überhaupt (mindestens) eine gerade Strecke zur Teilung zulässt (so wie bei den Brüdern B.). Beim zweiten Problem ist dann von irgendwelchen anderen Wiesen die Rede, nicht von denen der Brüder B.

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 2

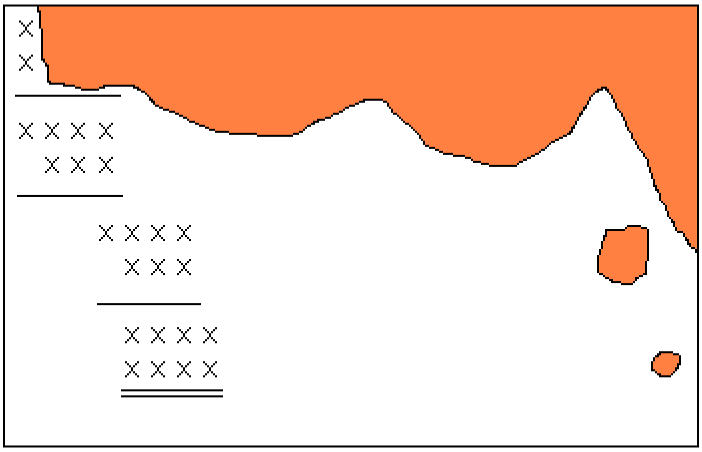
Als E-Dokument veröffentlicht im November 2000.

3

Die Division und der Tee

Herr F. vom DV-Servicezentrum in Friedberg soll herausfinden, wie viel Internet-Zeit die Studis aus dem Fachbereich ST *) auf den Rechnern der Hochschule in Anspruch nehmen. Er addiert die Dauer aller entsprechenden online-Sitzungen eines ganzen Jahres; das ergibt x Sekunden. Dann teilt er durch die Anzahl y der ST-Studis und erhält so den Durchschnittswert z pro Studi, der zufälligerweise glatt aufgeht.

Da es sich um sensible Daten handelt, hat Herr F. seine Division stark verschlüsselt aufgeschrieben. Als er fertig war, hat er leider auch noch etwas Tee über dem Blatt verschüttet. Mehr ist von seiner Rechnung nicht übrig geblieben:



Wie viele Studierende hat der Fachbereich ST ?

*) Surftechnologie

[Lösung](#)   [nächstes Problem](#)   [Inhaltsverzeichnis](#)

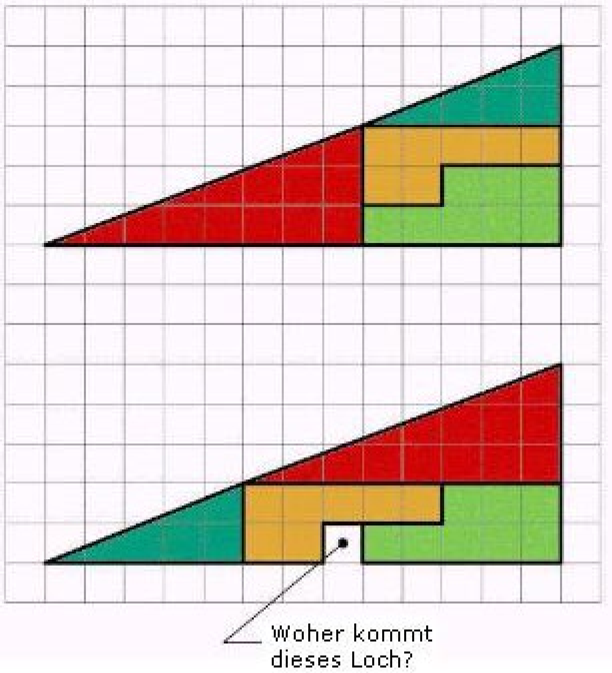
Manfred Börgens - Problem 3

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2000.

4

Das verschwundene Flächenstück

Mein gelehrter Kollege Professor Götz hat mich auf die folgende Aufgabe aufmerksam gemacht. Die vier farbigen Flächenstücke werden nur verschoben, ihre Größe bleibt dieselbe ... aber schauen Sie, was geschieht:



[Lösung](#)   [nächstes Problem](#)   [Inhaltsverzeichnis](#)

Manfred Börgens - Problem 4

Als E-Dokument veröffentlicht im Januar 2001.

5

Die Leiter an der Hauswand

Meister zum Lehrling:

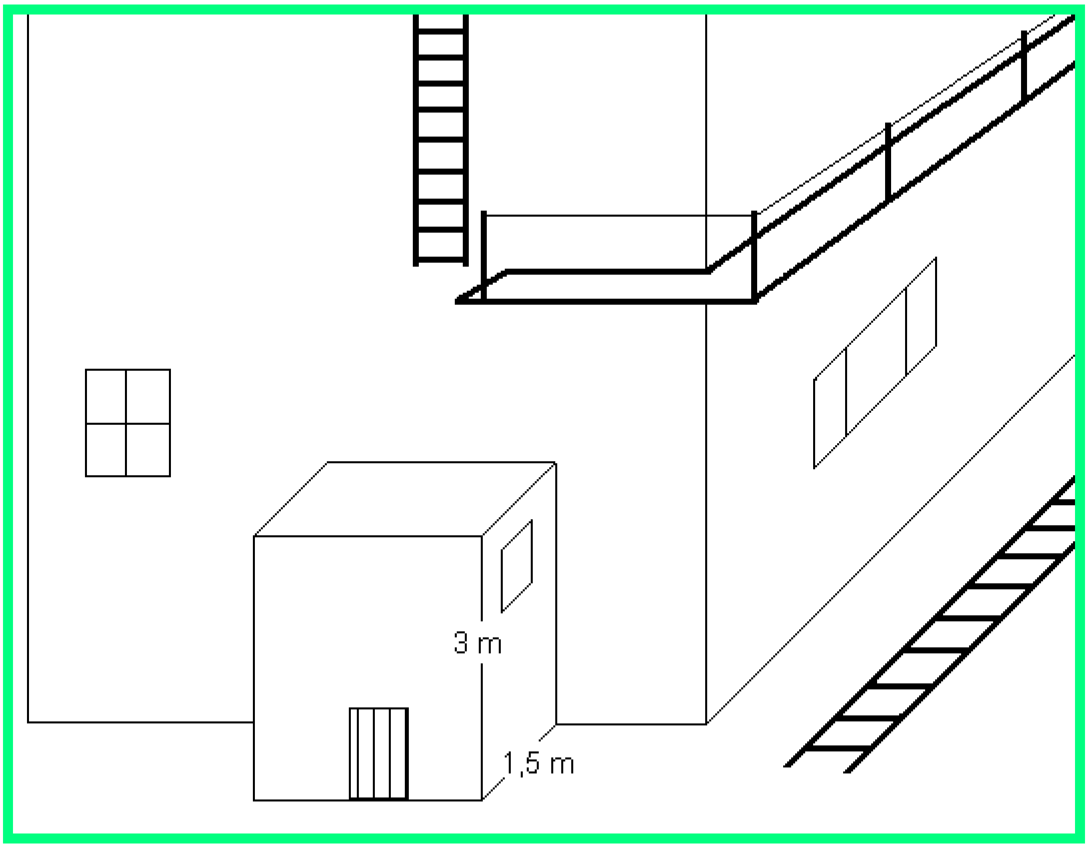
"Nimm Dir die Leiter, die da drüben liegt. Sie ist 7 m lang. Du kannst sie an die Vorderkante des Vorbaus und gleichzeitig an die Hauswand lehnen. Dann steigst Du dort auf die Feuerleiter um."

Lehrling (etwas später, weinerlich):

"Meister, es geht nicht, unsere Leiter kommt so nicht bis an die Feuerleiter heran."

Was hat der Meister nicht bedacht?

Als ihm das bald darauf selbst einfällt, denkt er sich: "Das soll mir kein zweites Mal passieren!" Er sägt ein Stück von der Leiter ab. Wieviel?



Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Februar 2001.

6

Summen aufeinander folgender Zahlen

Dies ist ein Problem aus der Zahlentheorie. Die Lösung kann man durch Probieren mit kleinen Zahlen herausfinden. Es ist mit Elementarmathematik auch ein Beweis möglich.

Wir wollen natürliche Zahlen als Summe aufeinander folgender Zahlen darstellen, z.B.:

9 = 4 + 5

10 = 1 + 2 + 3 + 4

100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22

3000 = 999 + 1000 + 1001

Für welche natürlichen Zahlen geht das und für welche nicht?

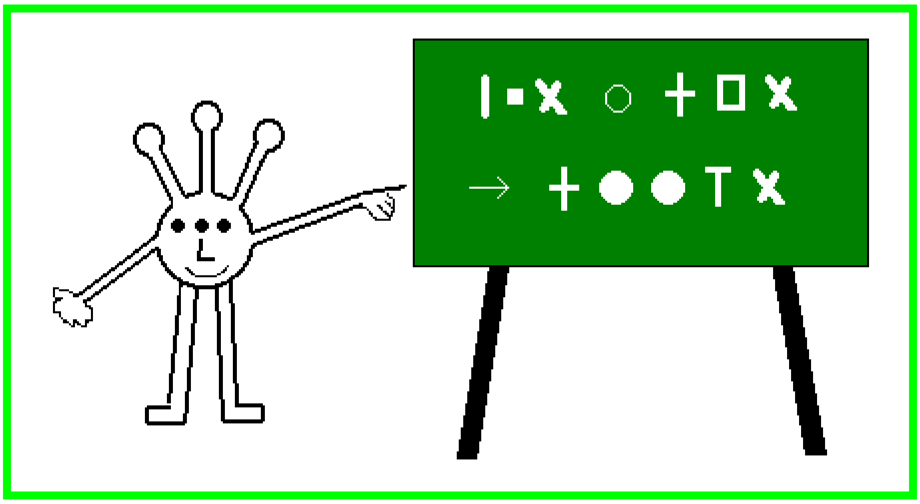
Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im März 2001.

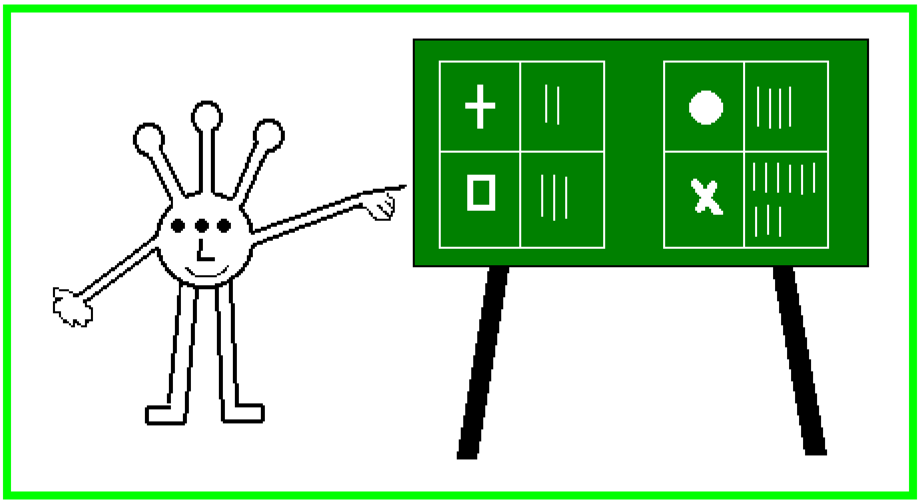
7

Extraterrestrische Multiplikation

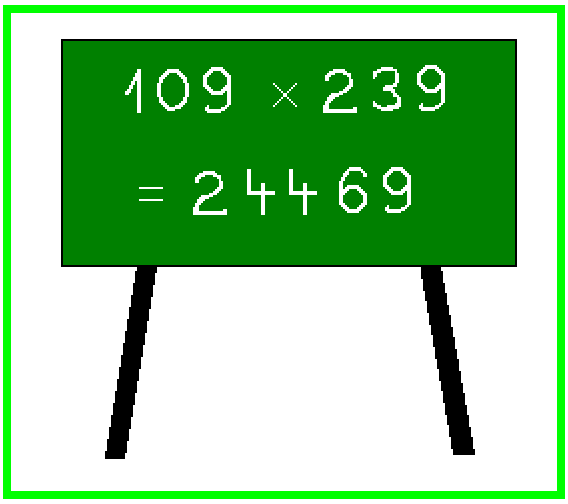
Professor O. macht einen Raumflug. Er landet auf einem fernen Planeten und wird dort von den Bewohnern freundlich aufgenommen. Schon bald gelingt eine Verständigung, und O. besucht in einer Schule eine Mathematikstunde. Der Lehrer hat gerade eine Rechnung an die Tafel geschrieben:



O. bittet den Lehrer, ihm zu erklären, was die einzelnen Symbole in der Rechnung bedeuten. Striche zu zählen erweist sich dafür als die beste intergalaktische Verständigungsmethode. Auf der nächsten Tafel sieht man ein paar Beispiele dafür:



Als O. alle Symbole auf der Tafel verstanden hat, schreibt er die Rechnung in den ihm am besten vertrauten arabischen Ziffern hin:



Professor O. versteht diese Rechnung nicht, und er bittet seinen Kollegen Professor S., der sich gut in Zahlentheorie auskennt, per Funk um Hilfe. S. ist ein bisschen gemein und verrät O. nicht die Lösung, sondern gibt ihm nur einen Ratschlag: "Zählen Sie doch mal die Finger Ihrer Gastgeber!" O. folgt diesem Rat. Was stellt er fest?

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 7

Als E-Dokument veröffentlicht im April 2001.

8

Das Professorenrennen auf dem Schottenring

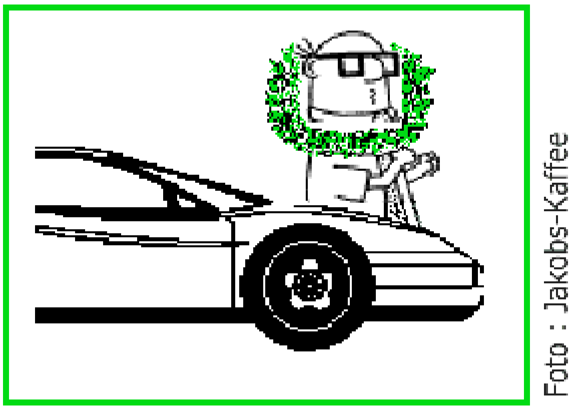
In hellen Scharen strömten am vergangenen Samstag die Automobilsport-Fans der Fachhochschule in Friedberg zum Schottenring. Dort fiel um 10 Uhr der Startschuss zum mit Spannung erwarteten "Professorenrennen".

Als Konkurrenten standen sich der Kollege L. (Rennstall Mercedes-SK) und der emeritierte Kollege T. (Rennstall BMW-GW) gegenüber. Das Rennen ging über eine Distanz von 145 km (9 Runden). Zahlreiche Studenten arbeiteten als Streckenposten. Sie bewiesen ihre gute mathematische Ausbildung durch wiederholte Messung der Geschwindigkeiten der beiden Boliden. Übermittelt an die Rennleitung (besetzt von MND wegen erwiesener Neutralität) wurden dabei nicht Momentangeschwindigkeiten, sondern "Etappengeschwindigkeiten" v auf wechselnden Streckenabschnitten.

Für die ersten 10 km benötigten beide Fahrer genau 4 Minuten (v=150 km/h). Gleich lautende Meldungen wurden während des gesamten Rennens übermittelt, bis zum Zieleinlauf: Auch die letzten 10 km wurden von beiden Autos in 4 Minuten bewältigt. Das gesamte Rennen wurde gefilmt, und die Auswertung des Videos zeigte, dass tatsächlich auf *allen* (beliebig gelegenen) Streckenabschnitten der Länge 10 km sowohl von L. als auch von T. die Etappengeschwindigkeit $v = {}^{10\text{ km}}/_{4\text{ Min.}} = 150$ km/h gefahren wurde.

Gab es also ein totes Rennen?

Nein, es gab einen klaren Sieger. Hier ist er:



Der Sieger

Können Sie erklären, wie es möglich sein kann, dass das Siegauto im Ziel 10 Sekunden Vorsprung hatte?

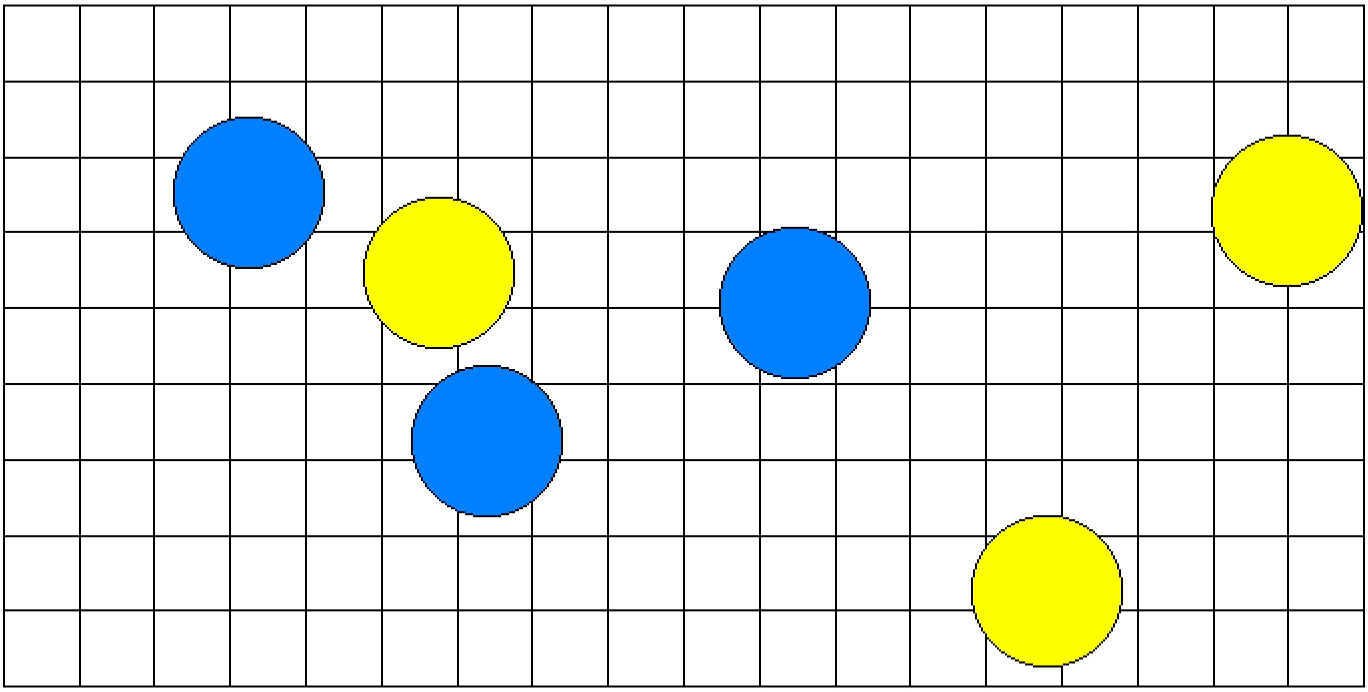
Lösung   nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 8

Als E-Dokument veröffentlicht im Mai 2001.

Das Münzspiel

Die Vorlesung bei Professor X. ist mal wieder sehr langweilig. Die Klausur ist noch fern, und so wollen sich die Studis A. und B. in der letzten Reihe die Zeit mit einem Spielchen vertreiben. Beide setzen abwechselnd Münzen auf ein Blatt mit Rechenkästchen.
Wer als erster keine Münze mehr setzen kann, hat verloren.



Die Münzen müssen alle gleich groß sein. Sie dürfen nicht über den Rand des Rechtecks hinausragen. Sie dürfen sich nicht (teilweise oder ganz) überdecken. Das Bild zeigt einen möglichen Spielstand, nachdem beide Spieler je dreimal gesetzt haben.

Die Maße des Rechtecks sind unerheblich und können von Spiel zu Spiel variieren. Die Rasterung des Spielfeldes ist nicht unbedingt erforderlich, soll aber den Spielern die Orientierung erleichtern. Zur Unterscheidung (im Bild durch Farben) könnten die Spieler Vorder- bzw. Rückseite der Münzen nach oben legen, aber die Unterscheidung ist für dieses Spiel nicht wichtig.

Nach ein paar Spielrunden hat A. eine Idee. Ab dann gewinnt er jedes Spiel, in dem er anfangen darf. B. schaut ihm schnell seine Strategie ab und gewinnt auch, wenn er anfängt.

Also ist dies leider (für Eingeweihte) ein langweiliges Spiel, denn **es gibt eine einfache Gewinnstrategie für den *beginnenden* Spieler. Welche Idee hatte A.?**

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Juni 2001.

10

Das Tennismatch

Anke und Barbara sind die Spitzenspielerinnen in ihrem Tennisverein und spielen oft gegeneinander. Anke spielt etwas schwächer. Aufgrund der bisherigen Spielresultate geht sie davon aus, dass sie einen Satz gegen Barbara in vier von neun Fällen gewinnt.

Anke gehört auch dem Organisationskommittee für die nächste Vereinsmeisterschaft an. Sie rechnet damit, im Finale gegen Barbara antreten zu müssen. Als darüber diskutiert wird, ob das Finale über drei Sätze (zwei Gewinnsätze zum Sieg nötig) oder über fünf Sätze (drei Gewinnsätze nötig) gehen soll, ahnt Anke, dass sie ihre Chancen ein wenig beeinflussen kann.

Sollte sie für ein Dreisatzmatch oder für ein Fünfsatzmatch stimmen?

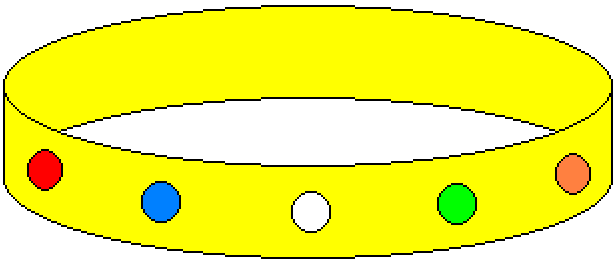
Lösung   nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Juli 2001.

11

Armreif mit Perlen

Ein Versandhaus macht eine Werbeaktion. Es bietet 25.000 Armreife mit eingelassenen farbigen Perlen zu einem Sonderpreis an. Jede Kundin soll in den Besitz eines Unikats kommen: Obwohl bei jedem Armreif die gleichen Perlenfarben verwendet werden, ist die Anordung (Reihenfolge) der Farben bei jedem Reif garantiert einzigartig.



Ansonsten sind alle Armreife in jeder Hinsicht symmetrisch und von gleicher Machart - insbesondere kommen bei allen genau die gleichen Perlenfarben vor. Keine Perlenfarbe kommt auf einem Reif mehr als einmal vor.

Wie viele Perlen muss ein solcher Armreif mindestens haben?

Lösung   nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im September 2001.

12

Der Wandspiegel

Sie möchten sich in einem Wandspiegel vollständig sehen.

(1) Welche Maße (Höhe/Breite) muss der Spiegel mindestens haben?

(2) Wie hoch muss er aufgehängt werden?

(3) Wie hängen die Antworten auf die Fragen (1) und (2) von Ihrer Entfernung vom Spiegel ab?

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Oktober 2001.

13

Wie viele Lügner?

Alle lügen.
Unsere Zahlen sind ein einziges Chaos.
Unsere Statistiken sind weniger zuverlässig als die Horoskope in der Boulevardpresse.

Authentisches Zitat aus dem Brief, den der Direktor der obersten italienischen Statistik-Behörde schrieb, bevor er im Amtszimmer seinem Leben ein Ende setzte.

Einen wichtigen Teil des folgenden Problems verdanke ich einer Anregung von Herrn Dipl.-Math. Georg Arends, der sein Mathematik-Studium 1988 - 1992 an der Fachhochschule Gießen-Friedberg absolvierte.

Auch das Wahrheitsministerium des Staates Veritanien hat Schwierigkeiten mit den Untertanen. Insbesondere ein bestimmtes Wohnviertel in der Hauptstadt fällt immer wieder auf: Von hier kommen besonders viele falsche Steuererklärungen, betrügerische Versicherungsmeldungen, erlogene Angaben bei Volkszählungen usw. Der Minister will ein Exempel an den 210 Bewohnern des Viertels statuieren und weist seine Beamten an, dort N Häuser und in jedem dieser Häuser N Stockwerke auszuwählen, und aus jedem Stockwerk N Personen zum Verhör vorzuführen.

Die Festnahme findet statt, aber die Befragung lässt etwas auf sich warten. Die Häftlinge kennen sich alle gut und sprechen über das bevorstehende Verhör. Es bilden sich zwei Gruppen: Die eine Gruppe will klein beigeben und im Verhör die Wahrheit sagen, die andere Gruppe verabredet, den Beamten des Wahrheitsministeriums Widerstand zu leisten und nur falsche Angaben zu machen.

Beim Verhör wird diese Gruppenbildung von den Beamten schnell erkannt. Man beschließt, jeden einzeln zu fragen, wieviele "Widerständler" unter ihnen sind. Hier sind die ersten Antworten:

"Mindestens vier."
"Mehr als sieben."
"Nicht nur einer."
"Mindestens sechs."
"Alle."
...
...

Nach dieser Befragung stellen die Beamten entnervt fest, dass alle Aussagen verschieden waren; keine zwei unter ihnen bedeuteten dasselbe. Nach Sortierung ergibt sich, dass sie sich (salopp) in folgender Gestalt schreiben lassen (L sei die Anzahl der Widerständler):

$L > 0$
$L > 1$
$L > 2$
...
...
L = "alle"

Wie viele Personen wurden verhört? Wie viele davon haben gelogen?

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 13

Als E-Dokument veröffentlicht im November 2001.

14

Kryptogramm

In der folgenden Addition stehen verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern:

```
K I N D E R
    L E I N
-----------
K O M M E T
```

Wie viele Kinderlein kommen denn? Anders gefragt: Wie viele Lösungen hat diese Additionsaufgabe?

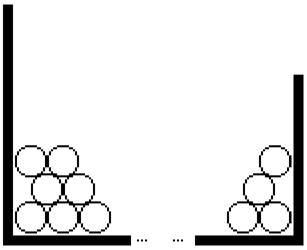
Lösung   nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2001.

15

Eine Kiste voller Münzen

Bei einem der ersten Banküberfälle nach Einführung des Euro war die Beute sehr bescheiden: Lediglich 880 1-Euro-Münzen fielen in die Hände der Bankräuber. Immerhin stand die Sache groß in allen Zeitungen, und so beschloss der Anführer, die Münzen zur Erinnerung aufzubewahren. Er zimmerte ein Kistchen, in das die Münzen genau hineinpassten. Er baute sie in Säulen zu je 10 Münzen auf und stellte diese Säulen Platz sparend nach diesem Muster in die Kiste:



Die vorderste Reihe nahm also genau die Breite der Kiste ein, alle weiteren Reihen wurden "auf Lücke" aufgestellt. Schließlich wurde der Deckel zugemacht.

Jeden Abend schüttelte der Anführer die Kiste, um zu prüfen, ob jemand Münzen entnommen hatte. Da er rundum nur 0,5 mm "Luft" gelassen hatte, war er sicher, dass er auf diese Weise fehlende Münzen sofort bemerken würde. Als er jedoch nach einiger Zeit die Kiste öffnete, fehlten etliche Münzen, obwohl es vorher beim Schütteln nicht gerappelt hatte. Der Anführer sah auch mit einem Blick, wie ihn einer seiner Komplizen reingelegt hatte.

Nämlich wie?

Finden Sie einen Weg, so viele Münzen wie möglich aus der Kiste zu nehmen und den Rest so zurückzulassen, dass der Anführer nichts merkt.

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Januar 2002 zur Euro-Einführung.

16

Perlenketten

Das Versandhaus hat mit den Armreifen großen Erfolg gehabt (siehe Problem 11) und will für das Frühjahrsgeschäft eine ähnliche Aktion starten. Diesmal werden Halsketten angeboten, die wieder alle verschieden sein sollen. Sie bestehen aus einer Schnur ohne Verschluss, auf der im oberen Teil 80 kleine, gleichartige weiße Perlen und im unteren Teil 7 große, verschiedenfarbige sowie 5 große, gleichartige weiße Perlen aufgefädelt sind. Die großen weißen Perlen sollen nicht benachbart sein, sondern jeweils durch mindestens eine farbige Perle getrennt werden.

Wieder soll jede Kundin in den Besitz eines Unikats kommen. Obwohl für jede Kette die gleichen Perlenfarben verwendet werden, ist die Anordnung der Perlen bei jeder Kette garantiert einzigartig.

Wie viele solcher Ketten kann das Versandhaus maximal anbieten?

Manfred Börgens - Problem 16

Als E-Dokument veröffentlicht im Februar 2002.

17

Verschlüsselte Division

Füllen Sie alle Stellen dieser Divisionsaufgabe aus, so dass ein korrektes Ergebnis entsteht:

```
x x x x x x  :  x x x  = ?
x x x
-----
    x x x
    x x x
    -----
      x x x
      x x x
      -----
        x x x
        x x x
        -----
            x x x x
            x x x x
            -------
                  0
```

Lösung   nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 17

Als E-Dokument veröffentlicht im März 2002.

18

Fahrradspeichen

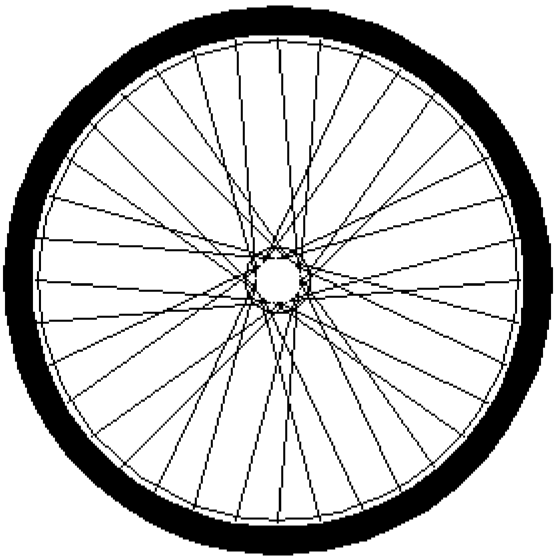
In Filmen scheint es oft so, dass sich bei vorwärts fahrenden Fahrzeugen die Räder rückwärts bewegen oder still stehen. Dies liegt daran, dass der Film keine kontinuierliche Bewegung zeigt, sondern eine diskrete Abfolge von Einzelbildern. Man kann sich das für ein Fahrrad gut veranschaulichen.

Ein Rad eines Fahrrades hat (in vielen Fällen) 36 Speichen, die aber nicht radial angebracht sind, d.h. sie liegen nicht entlang von Kreisradien. Wenn man genau hinschaut, erkennt man, dass sich das Speichenmuster nach der Drehung des Rades um einen bestimmten Winkel zur Deckung bringen lässt (also sich wiederholt); bei vielen gängigen Fahrrädern ist dies ein Winkel von 40°.

Wenn die Filmkamera 24 Bilder pro Sekunde macht, lässt sich ausrechnen, bei welcher Geschwindigkeit eines solchen Fahrrads die Räder im Film stillzustehen scheinen (eine etwas geringere Geschwindigkeit würde dann eine rückläufige Bewegung zeigen).

Berechnen Sie diese Geschwindigkeit für ein 28"-Fahrrad (Raddurchmesser 28 Zoll).

Zusatzfrage: **Wie lässt sich die Geometrie der Speichen beschreiben?** Das Bild zeigt ein typisches Rad mit 36 Speichen und einer 40°-Drehsymmetrie. Auf den ersten Blick ist das Bild verwirrend, aber beachten Sie bitte, dass die Speichen immer abwechselnd auf der Ihnen zugewandten und der abgewandten Seite von Felge und Nabe befestigt sind.



Lösung   nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im April 2002.

19

Zahlenfolge

Das folgende Problem lässt sich wohl nur lösen, indem man ein kleines Programm schreibt. Es soll eine Zahlenfolge mit dem folgenden Anfang berechnet werden:

223, 17, 50, 25, 29, 85, 89, ...

Denken Sie erst nach, ehe Sie weiterlesen, vielleicht erkennen Sie das Bildungsgesetz der Folge.

Die eigentliche Aufgabe besteht aber nicht darin, das Bildungsgesetz herauszufinden, deshalb wird es hier sofort verraten: Der Startwert ist beliebig (wir wollen uns aber auf natürliche Zahlen unter 1000 beschränken); *jede weitere Zahl ist dann die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern ihres Vorgängers*.

Durch diese Regel bleibt die Folge immer im Bereich der maximal dreistelligen natürlichen Zahlen. Deshalb ist klar, dass bei jedem Startwert nach der Berechnung einiger (evtl. vieler) Folgenglieder eine Zahl erscheinen muss, die schon einmal vorgekommen ist, und dann kann man aufhören, weil sich eine zyklische Wiederholung von Folgengliedern einstellt.

Hobby-Programmierer (möglicherweise auch Profis) haben jetzt vielleicht Spaß daran, etwas über die Eigenschaften dieser merkwürdigen Folge herauszufinden:

1.
Falls eine Folge bei der 1 angelangt ist, folgen nur noch Einsen nach, z.B.
973, 139, 91, 82, 68, 100, 1, 1, 1, ...
Gibt es außer der 1 noch weitere Zahlen, die auf sich selbst folgen?

2.
Welche anderen Wiederholungsmuster treten noch auf außer
1, 1, 1, ...
..., 10, 1, 1, 1, ...
..., 100, 1, 1, 1, ... **?**

3.
Wegen $9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$ sind alle Folgenglieder außer dem Startwert kleiner als 244. **Welches ist die höchste Zahl, die mehr als einmal in der Folge vorkommen kann?**

4.
Einige Folgen münden sehr schnell in eine Wiederholung:
13, 10, 1, 1, 1, ...
Andere brauchen viel länger; probieren Sie z.B. den Startwert 121.
Wie lang ist der längste "Weg" einer Folge, bis eine Wiederholung auftritt?

5.
Welche "Wiederholungszahl" wird am häufigsten erreicht?

6.
Stellen Sie die möglichen Wiederholungsmuster zusammen mit den auftretenden Weglängen bis zur ersten Wiederholung übersichtlich dar.

7.
Was ändert sich, wenn beliebig große Startwerte zugelassen werden?

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

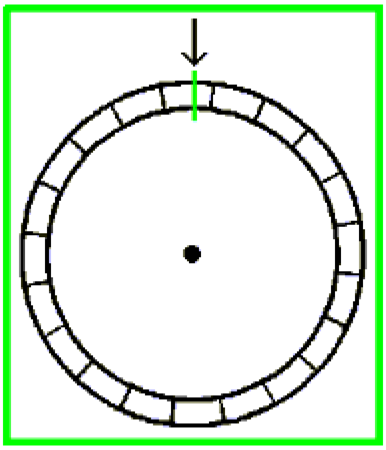
Manfred Börgens - Problem 19

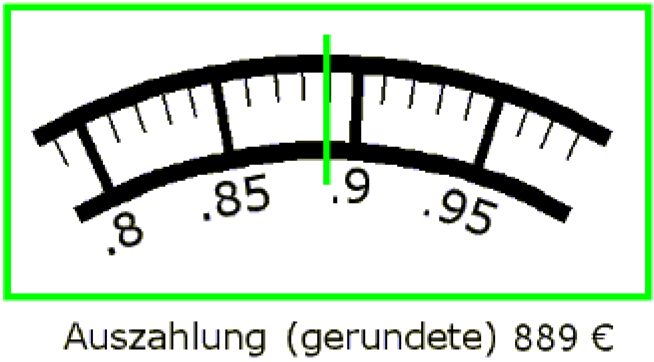
Als E-Dokument veröffentlicht im Mai 2002.

20

Das Glücksrad

Auf dem Rand dieses Glücksrads lassen sich Zahlen zwischen 0 und 1 ablesen. Wenn das Rad zum Stillstand kommt, wird die Zahl am Zeiger oben abgelesen, und der Spieler erhält den entsprechenden Anteil von 1000 Euro. Der faire Einsatz für ein solches Spiel ist dann 500 Euro.





Wir wollen nun zwei Spielvarianten betrachten:

1. Das Maximumspiel

Der Spieler darf n-mal das Glücksrad drehen und erhält den maximalen Betrag der n Einzelspiele. Wie groß ist hier der faire Einsatz?

2. Das Risiko-Spiel

Der Spieler darf maximal n-mal das Glücksrad drehen. Er kann selbst bestimmen, welches sein letztes Einzelspiel ist; er erhält nur die Auszahlung aus diesem Spiel. Welches ist die optimale Strategie für das Risiko-Spiel? Wie groß ist hier der faire Einsatz?

Ein paar Anmerkungen, die Ihnen nützlich sein könnten - lesen Sie nicht weiter, wenn Sie glauben, auch alleine zurecht zu kommen.

Das **Maximum-Spiel** lässt sich leicht mit einem Programm simulieren. Aber auch die mathematische Behandlung ist nicht schwer, wenn man statt der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$, wo x das Maximum aus den n Spielen ist, zunächst die Verteilungsfunktion $F(x) =$ Wahrscheinlichkeit(Maximum $< x$) ausrechnet. Aus der Stochastik ist der Zusammenhang zwischen P und F bekannt. Aus P ergibt sich dann der gesuchte Erwartungswert (fairer Einsatz).

Das **Risiko-Spiel** ist noch interessanter. Für $n = 2$ stellt sich lediglich die Frage, ob der Spieler beim ersten Mal zugreifen oder auf das letzte Spiel hoffen soll. Da der Erwartungswert für das letzte Spiel 500 Euro beträgt, lautet die optimale Strategie: Zugreifen beim ersten Einzelspiel, falls das Glücksrad einen Wert > 0.5 anzeigt. Diesen "Schwellenwert" nennen wir $s_2 = 0.5$.

Für $n = 3$ geht man genauso vor. Was hat der Spieler im Mittel zu erwarten, falls er die erste Chance vorübergehen lässt? Aus dem Fall $n = 2$ wissen wir, dass er die zweite Chance mit Wahrscheinlichkeit $1 - s_2 = 0.5$ nutzt; in diesem Fall kann er im Mittel mit 750 Euro rechnen. Nutzt er die zweite Chance nicht (Wahrscheinlichkeit s_2), erhält er im Mittel $s_2 \cdot 1000$ Euro = 500 Euro. Somit lautet jetzt der Schwellenwert $s_3 = 0.625$.

Man erkennt, dass man zur Berechnung von s_3 nur s_2 benötigt. So fährt man induktiv fort, berechnet s_4 aus s_3 usw. bis s_n. Die optimale Strategie lautet also: Hat man noch k Einzelspiele vor sich, so höre man beim nächsten Einzelspiel auf, wenn das Glücksrad dann mehr als s_k anzeigt.

Nach welcher allgemeinen Formel ergibt sich s_{k+1} aus s_k? Für große k finden Sie (evtl. mit Computerhilfe) eine einfache und gute Näherungsformel für s_k.

Die optimale Strategie liefert den fairen Einsatz gleich mit.

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Juni 2002.

21

Idealer Treffpunkt

Zwei Jahre nach dem Schulabschluss wohnen die meisten der Absolventen des Jahrgangs noch in ihrem Heimatort A, während die anderen in die Stadt B verzogen sind, 40 km entfernt. Ein Jahrgangstreffen soll in einem Ort an der Straße von A nach B stattfinden. Wo liegt der ideale Ort für das Treffen, wenn die Gesamtfahrstrecke aller Absolventen möglichst gering sein soll?

Bevor Sie über diese allgemeine Fragestellung nachdenken, können Sie sich auch zuerst dem konkreten Beispiel mit 20 Absolventen in A und 10 in B widmen.

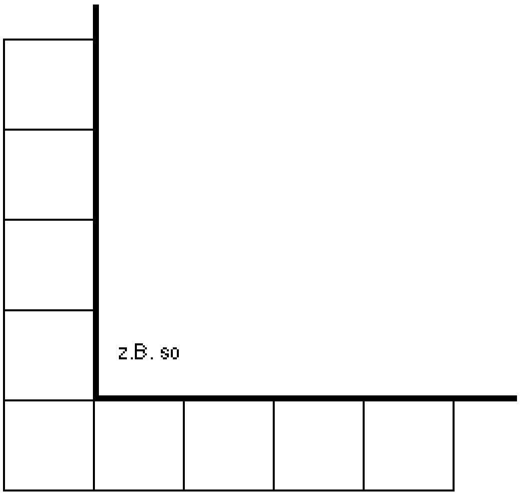
Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

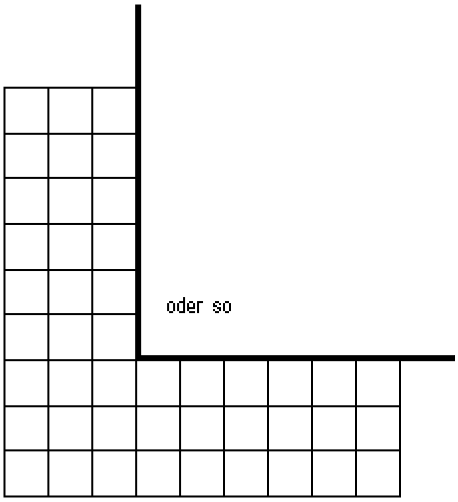
Als E-Dokument veröffentlicht im Juli 2002.

22

Herr L. verlegt Platten

Herr L. will an einer Hausecke den Boden mit quadratischen Platten belegen. Sie sollen ein "L" mit gleich langen "Armen" bilden:





Die Platten sind in 20er-Paketen geliefert worden. Herr L. hat schon mehrere davon ausgepackt, als sein Nachbar, Professor S. (den kennen wir schon aus Problem 7), vorbei kommt und zuschaut.

"Wie wollen Sie die Platten verlegen, Herr L.?"

"Am liebsten würde ich alle verlegen und keine übrig lassen. Wie viele Reihen ich legen soll, weiß ich noch nicht so recht."

"Wie viele Platten haben Sie denn?"

"Bisher habe ich 5 zerbrochene gezählt. Ich hoffe, es bleibt dabei."

"Dann haben Sie verschiedene Möglichkeiten für die Verlegung."

Herr L. ist erstaunt über diese Aussage, denn Professor S. hatte noch nicht einmal die Pakete gezählt. Offenbar genügte es für ihn zu wissen, dass jedes Paket 20 Platten enthält.

Herr L. packt auch den Rest aus und findet eine weitere zerbrochene Platte.

"Das ist Pech, Herr L. Jetzt können Sie Ihre Platten nicht mehr vollständig verlegen."

Woher konnte Professor S. das so schnell wissen?

Wenn Sie darüber nachdenken, kommen Sie schnell auf das allgemeine Problem, für welche Plattenzahlen es keine oder genau eine oder mehrere Lösungen gibt.

Welches ist die geringste Anzahl von Platten, die Herrn L. 2 (3, 4, 5) Verlegungsmöglichkeiten erlauben würde?

Etwas *Probieren* mit kleinen Plattenzahlen kann hier schon weiterhelfen; man erkennt schnell, wann es keine Lösung gibt.

Lösung nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

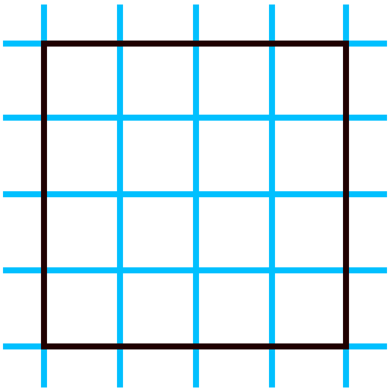
Als E-Dokument veröffentlicht im September 2002.

23

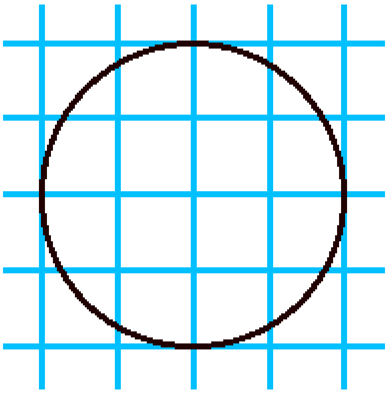
Drahtkonstruktionen

Gezeigt werden drei Drahtkonstruktionen aus jeweils zwei Perspektiven. In den Bildern dienen die blauen Rasterlinien nur der besseren Orientierung, die Drähte sind schwarz.

So sieht es von vorne aus:

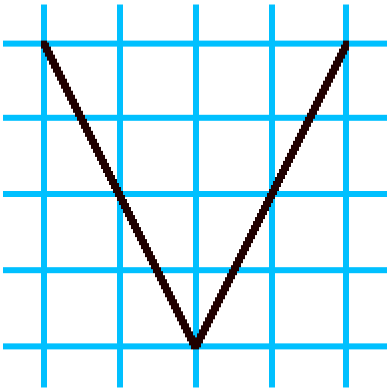


So sieht es von oben aus:

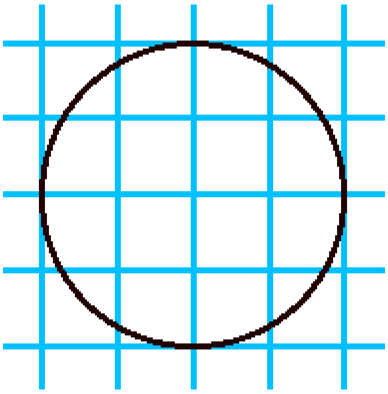


Wie sieht es von der Seite aus?

So sieht es von vorne aus:

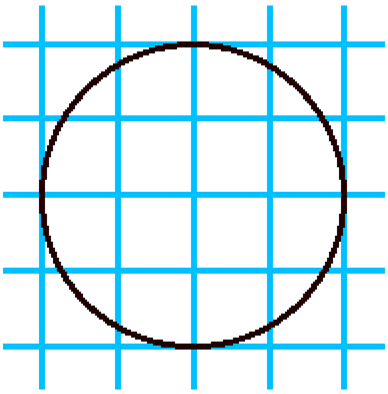


So sieht es von oben aus:

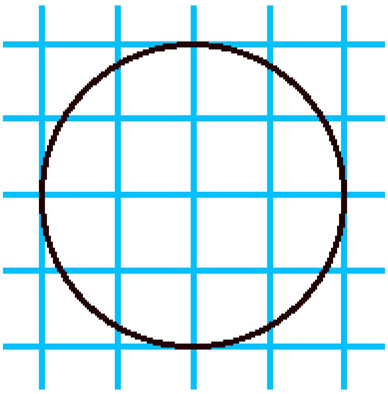


Wie sieht es von der Seite aus?

So sieht es von vorne aus:



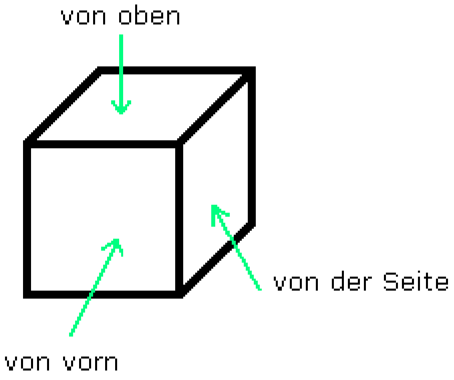
So sieht es von oben aus:



Wie sieht es von der Seite aus?

Sie können sich alle drei Gebilde als zusammenhängende Drahtkonstruktionen ohne freie Enden vorstellen, die innerhalb eines Würfels liegen. Legt man in den Bildern oben eine Einheit durch eine Kästchenseite fest, dann hat der Würfel die Kantenlänge 4.

Die Perspektiven soll man sich so vorstellen:



Lösung   nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 23

Als E-Dokument veröffentlicht im Oktober 2002.

24

17 Kamele

Die folgende kleine mathematische Erzählung ist sehr bekannt und sehr alt.

Es lebte in Arabien ein alter Vater, der drei Söhne und 17 Kamele hatte. Als der Greis sein Ende nahen fühlte, versammelte er die Söhne um sich und sprach zu ihnen: "Alles, was ich euch hinterlasse, sind meine Kamele. Teilt sie so, dass der Älteste die Hälfte, der Mittlere ein Drittel und der Jüngste ein Neuntel erhält." Kaum war dies verkündet, da schloss er die Augen, und die Söhne konnten ihn nicht mehr darauf aufmerksam machen, dass sein letzter Wille offenbar unvollstreckbar sei. Siebzehn ist doch eine störrische Zahl und lässt sich weder durch zwei noch durch drei und schon gar nicht durch neun teilen! Doch der letzte Wille des Vaters ist jedem braven Araber heilig. Da kam zum Glück ein weiser Pilger auf seinem Kamel daher geritten, der sah die Ratlosigkeit der drei Erben und bot ihnen seine Hilfe an. Sie trugen ihm den verzwickten Fall vor, und der Weise riet lächelnd, sein eigenes Kamel zu den hinterlassenen zu stellen und die gesamte Herde nach dem letzten Willen des Vaters zu teilen, und siehe da - der Älteste bekam neun der Tiere, der Mittlere sechs, der Jüngste zwei, das waren eben die Hälfte, ein Drittel und ein Neuntel, und auf dem Kamel, das übrig blieb, ritt der Weise - denn es war das seine - lächelnd davon.

In den Überlieferungen wechseln manchmal die Zahlen, z.B. funktioniert die Sache auch mit 11 Kamelen und den Anteilen $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_6$ oder mit 23 Kamelen und den Anteilen $^3/_8$, $^1/_3$, $^1/_4$.

Es stellen sich zwei Fragen:

1.
Nach der Aufteilung des Erbes sind offenbar alle zufrieden. **Aber ist die Aufteilung auch gerecht?**

2.
Warum klappt der Trick des Pilgers eigentlich so gut? Man findet leicht ähnliche Beispiele, bei denen selbst nach der Zugabe von mehreren Kamelen eine ganzzahlige und vollständige Aufteilung des Erbes nicht möglich ist, etwa mit 27 Kamelen und den Anteilen $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_7$. Deshalb lautet die Verallgemeinerung des Problems:

Der Vater vererbt n Kamele auf m Erben, deren Erbanteile rational sind und in der Summe weniger als 1 ergeben. Der Pilger darf k Kamele hinzu geben und erhält sie nach der Erbaufteilung wieder zurück.

Wann geht unter diesen Umständen die Teilung des Erbes glatt auf?

Lösung   nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

25

Make 24

Alle, die ungeduldig auf Weihnachten warten, können sich die Zeit mit einem Zahlenspiel vertreiben, das passenderweise "MAKE 24" heißt. Es ist ganz einfach: Man lost vier Zahlen zwischen 1 und 9 aus und muss sie durch die Grundrechenarten zum Ergebnis 24 verbinden.

Ein Beispiel: Gegeben sind 6, 3, 6, 4 .
Dann ist $6 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 24$.

Nun versuchen Sie es selbst mit:

6, 8, 9, 9

1, 3, 4, 6

3, 3, 7, 7

Keine Tricks! Nicht erlaubt sind Fakultäten, Potenzen, Wurzeln usw. Auch dürfen zwei oder drei der vorgegebenen Zahlen nicht zu einer mehrstelligen Zahl zusammengesetzt werden, also wäre etwa 38 - 14 keine korrekte Lösung, wenn 1, 3, 4, 8 vorgegeben sind. Erlaubt sind nur die vier Grundrechenarten und das Setzen von Klammern.

Lösung Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2002.

1

Fermats Letzter Satz

Weltjahr der Mathematik 2000

Tschechien 2000

Diese tschechische Briefmarke begeistert sicherlich alle Mathematiker. Die Marke würdigte das Jahr 2000 als das "Weltjahr der Mathematik", in der verbreiteten englischen Abkürzung **WMY2000**. Die deutsche Gruppe für das WMY2000 hat die Themen *Popularisierung der Mathematik* und *Erhöhung der Akzeptanz der Mathematik in den Schulen* als Schwerpunkte ihrer Aktivitäten gewählt. Der Fachbereich MND der Fachhochschule Gießen-Friedberg hat sich daran mit mehreren eigenen Beiträgen beteiligt.

Das Motiv der Marke ist *Fermats Letzter Satz*: $x^n + y^n = z^n$ für natürliche Zahlen ist nur für $n = 2$ erfüllbar. Pierre de Fermat hat dies 1670 behauptet (der angeblich von ihm gefundene Beweis fand sich aber nicht in seinem Nachlass) und damit ein offenes Problem in die Welt gesetzt, das viele Mathematiker-Generationen fasziniert hat. Auch zahllose Laien haben sich an diesem Problem versucht, denn im Gegensatz zu den meisten mathematischen Fragestellungen ist der Fermatsche Satz (fast) jedem verständlich. 1908 wurde eine großzügige Belohnung für den Beweis des Satzes ausgesetzt: Der Industrielle Paul Wolfskehl, selbst studierter Mathematiker, stiftete zum Entsetzen seiner Familie 100.000 Goldmark ("Wolfskehl-Preis"); allerdings sollte dieser Preis am 13.9.2007 verfallen. Gerade noch rechtzeitig und 325 Jahre nach Fermat hat Andrew Wiles 1995 den Satz nach siebenjähriger Arbeit beweisen können. Das war in der mathematischen Welt eine Sensation, die bis heute Wellen wirft, so dass die Würdigung dieses Ereignisses auf der Briefmarke zum WMY2000 sehr gerechtfertigt ist.


Andrew Wiles

Leider ist der Beweis nicht so einfach wie der Satz, deshalb möchte ich ihn hier nicht angeben **;-)** .

Übrigens: Der Wolfskehl-Preis, der bei seiner Stiftung nach heutiger Währung mehr als 1.500.000 Euro betrug, war nur noch etwa 50.000 Euro wert, als Andrew Wiles ihn 1997 in Empfang nahm.

Es gibt noch viele weitere Briefmarken zum WMY2000. Ein Beispiel: Die belgische Marke versammelt mehrere mathematische Motive, u.a. die Gauß'sche Normalverteilung.

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

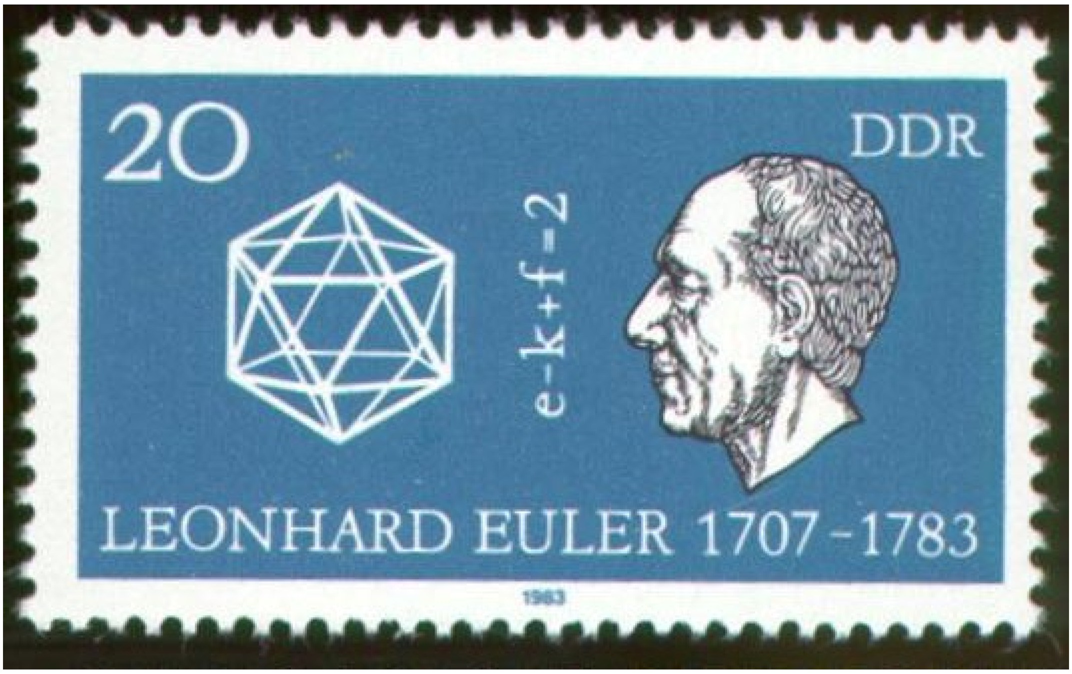
Als E-Dokument veröffentlicht im Oktober 2000.

2

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Ikosaeder

Euler'sche Polyederformel



DDR 1983

Michel 2825
Scott 2371

Leonhard Euler ist zweifellos einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten. Er lebte und arbeitete in Basel, Berlin und St. Petersburg.

Auf der abgebildeten Briefmarke (herausgegeben zum 200. Todestag Eulers) ist ein **Ikosaeder** zu sehen, also einer der fünf **Platonischen Körper**. Ein Platonischer Körper ist ein konvexes Polyeder, dessen sämtliche Begrenzungsflächen kongruente regelmäßige n-Ecke sind, an jeder Ecke stoßen gleich viele Flächen zusammen. Die anderen Platonischen Körper sind Tetraeder, Würfel, Oktaeder und Dodekaeder. Ein Ikosaeder besteht aus 20 gleichseitigen kongruenten Dreiecken. In mehrfacher Hinsicht ist es der größte Platonische Körper: Es hat die meisten Flächen (20), die meisten Kanten (30, gemeinsam mit dem Dodekaeder) und an seinen Ecken stoßen die maximal möglichen 5 Flächen aneinander. Bekannt ist auch der Zusammenhang des Ikosaeders mit dem Fußball: Schneidet man alle Ecken ab, so entstehen dort 12 fünfeckige Schnittflächen (beim Fußball oft schwarz gefärbt); aus den ursprünglichen Dreiecken werden durch das Eckenabschneiden 20 Sechsecke (beim Fußball oft weiß).

Auf der Briefmarke ist außerdem die **Euler'sche Polyederformel** abgebildet:

$e - k + f = 2$

e steht dabei für die Anzahl der Ecken, k für die Anzahl der Kanten und f für die Anzahl der Flächen. Diese Formel gilt für **alle konvexen Polyeder**, also alle konvexen Körper, die durch n-Ecke begrenzt werden. Beim **Ikosaeder** ergibt sich

$12 - 30 + 20 = 2$

Für den **Fußball** ergibt sich:

60 - 90 + 32 = 2

Gegen Ende 1988 wurde unter Mathematikern eine weltweite Umfrage zu den "schönsten" Sätzen der Mathematik durchgeführt. Die Euler'sche Polyederformel **$e - k + f = 2$** landete dabei auf dem zweiten Platz. Die Aussage "Es gibt genau fünf Platonische Körper" belegte den vierten Platz.

---

nächste Briefmarke Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im November 2000.

3

1/4 Silbergroschen

Thurn und Taxis 1863

Michel 26

Ein Spezialgebiet der mathematischen Philatelie ist die Darstellung von **Zahlen** auf Briefmarken. Sammler interessieren sich dabei natürlich vorwiegend für Marken, deren *Hauptmotiv* eine Zahl ist, meist eine natürliche Zahl oder ein Bruch wie bei der oben dargestellten Briefmarke. Die größte Zahl als Hauptmotiv auf einer Briefmarke könnte **100000** (Deutsches Reich 1923, Michel 257) sein. Ein Aufdruck wie z.B. "50 Milliarden" (Deutsches Reich 1923, Michel 330B) zählt hier wegen der Buchstabendarstellung nicht mit. Die größte derartige Zahl, die an letzter Stelle nicht 0 oder 5 hat, ist möglicherweise **84** (Deutsche Post 1946, Michel 936).

Bruchzahlen als zentrales Motiv auf Briefmarken sind seltener. Meist findet man Stammbrüche wie $^1/_2$ oder $^1/_8$, manchmal auch gemischte Brüche wie $1^3/_4$.

Die abgebildete Marke ist ein besonders schönes Exemplar. Bis 1867 hatte das Fürstenhaus **Thurn und Taxis** die Posthoheit in den meisten Kleinstaaten des Deutschen Bundes, auch in Hessen-Kassel, Hessen-Darmstadt, Nassau, Hessen-Homburg und in der Stadt Frankfurt am Main. In fast allen diesen hessischen Ländern galt die *Kreuzer-Währung*; die einzige Ausnahme bildete Hessen-Kassel, wo die *Groschen-Währung* galt (wie auch in Sachsen und in den Hansestädten). Somit hätte diese Briefmarke, die ja den Wert $^1/_4$ Silbergroschen aufweist, auf heutigem hessischen Gebiet nur im Kurfürstentum Hessen-Kassel verwendet werden können. Am linken Rand der Marke steht (schwer lesbar) *Deutsch-Oester. Postverein*, am rechten Rand *Thurn und Taxis*.

Die Briefmarke hat keine Zähnung, sondern wurde geschnitten.

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Briefmarke 3

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2000.

4

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846)

Besselfunktionen

Bundesrepublik Deutschland 1984

Michel 1219
Scott 1422

Die Deutsche Bundespost gab diese Briefmarke zum 200. Geburtstag Bessels heraus. Neben seinem Porträt sieht man die Graphen der Besselfunktionen (Zylinderfunktionen) 1. Art der Ordnungen 0 und 1.

Die Beschriftungen in der Graphik sind schwer lesbar. In starker Vergrößerung erkennt man mit Mühe:

An den Achsenenden steht **x** (ganz rechts) und $\mathbf{J_0(x), J_1(x)}$ (ganz oben). Die Skalierung auf der waagerechten Achse läuft in 2-er Schritten von -12 bis 14, auf der senkrechten Achse in 0.2-er Schritten von -0.6 bis 1.0, wobei alle Minuszeichen und Dezimalpunkte fortgelassen wurden, ebenso die Null. An der Kurve durch (0,1) steht $\mathbf{J_0(x)}$, an der Kurve durch (0,0) steht $\mathbf{J_1(x)}$.

Bei $\mathbf{J_0(x)}$ und $\mathbf{J_1(x)}$ handelt es sich jeweils um eine Basislösung (von je zweien) der Bessel'schen Differentialgleichung

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \alpha^2) y = 0$$

(hier für die "Ordnungen" $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 1$).

$\mathbf{J_0(x)}$ und $\mathbf{J_1(x)}$ heißen Basislösungen "1. Art" (die von "2. Art" sind $\mathbf{Y_0(x)}, \mathbf{Y_1(x)}$ und hier nicht dargestellt).

Die Bessel'sche Differentialgleichung hat zahlreiche physikalische Anwendungen, z.B. bei Membranschwingungen

(Trommelfell).

Wie die Briefmarke zeigt, stellen **$J_0(x)$** und **$J_1(x)$** schwach gedämpfte Schwingungen dar. Beide Funktionen lassen sich als Potenzreihen angeben:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot (k+1)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Januar 2001.

5

Goldener Schnitt

Logarithmische Spirale

Schweiz 1987

Michel 1337
Scott 805

Diese Briefmarke wurde zum 150-jährigen Bestehen des Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins SIA herausgegeben und enthält eine interessante mathematische Konstruktion.

Die Marke zeigt den **Zusammenhang des Goldenen Schnitts mit der Logarithmischen Spirale**.

Im Einzelnen ist auf der Marke zu sehen:

- Die Koordinatenachsen als gestrichelte Linien.
- Eine nach dem Goldenen Schnitt konstruierte Folge von sieben Rechtecken und sechs Quadraten (Bild 1).
- Eine Spirale.
- Spiraliger Polygonzug (rote Linie in Bild 2).

Die Konstruktion soll nun erläutert werden.

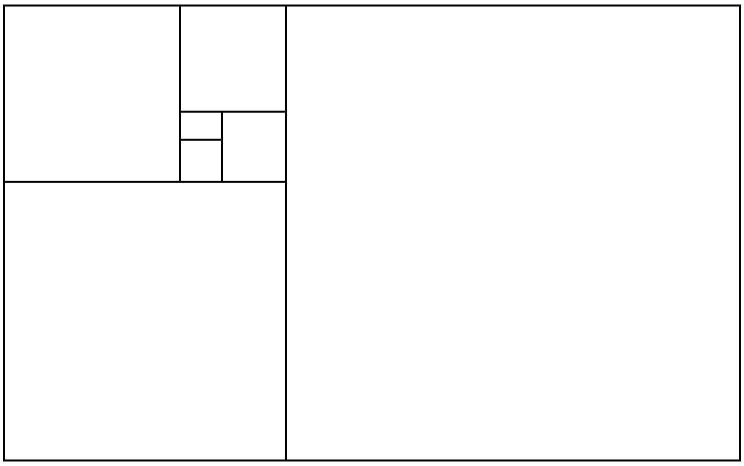


Bild 1

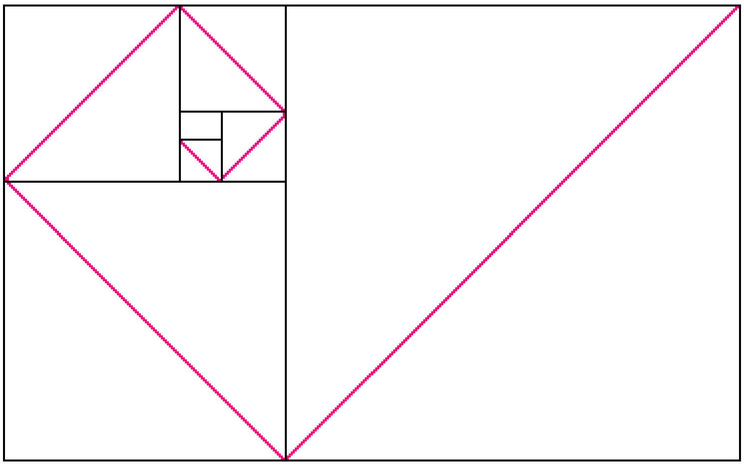


Bild 2

Folge von sieben Rechtecken und sechs Quadraten

In Bild 3 ist ein Rechteck dargestellt, dessen Proportionen dem Goldenen Schnitt entsprechen. Die Seitenlängen stehen im Verhältnis

$$\tau = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5}+1\right) \approx 1.618$$

("Goldene Zahl")

bzw.

$$\sigma = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right) \approx 0.618 \qquad\qquad \sigma = \frac{1}{\tau} = \tau - 1$$

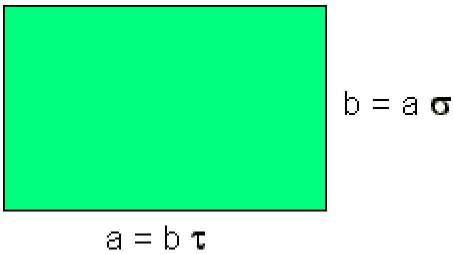


Bild 3

Teilt man in einem Goldenen Rechteck ein Quadrat ab oder setzt ein Quadrat an die längere Rechteckseite an, so erhält man wieder Rechtecke nach dem Goldenen Schnitt (Bilder 4 und 5).

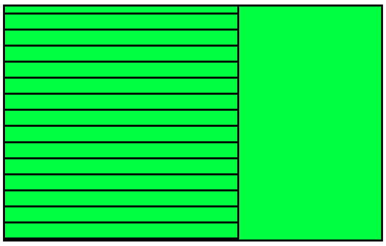


Bild 4

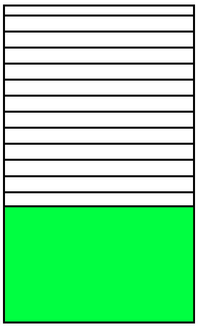


Bild 5

Diese Konstruktion von immer größeren Rechtecken durch Ansetzen von Quadraten beginnt auf der Briefmarke mit dem kleinen Rechteck, das den Koordinatenursprung enthält. Durch sechsmaliges Ansetzen von Quadraten im Gegenuhrzeigersinn erhält man die sieben Rechtecke mit dem Seitenverhältnis des Goldenen Schnitts (Bild 1). Der Graphiker hat allerdings beim rechten großen Quadrat mit den Seitenlängen etwas geschummelt.

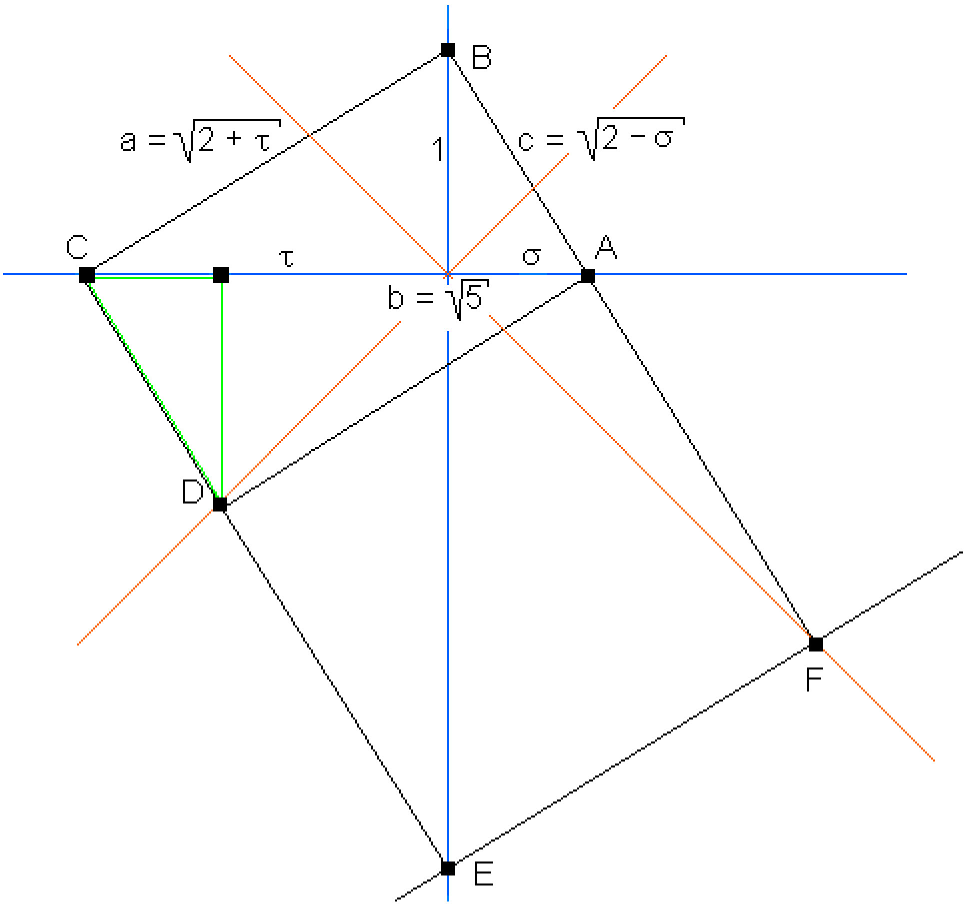


Bild 6

Wie liegen die Rechtecke und Quadrate zu den Koordinatenachsen und Diagonalen? Diese Frage kann vollständig mit der Konstruktion eines einzigen Rechtecks und des angrenzenden Quadrates beantwortet werden, z.B. indem man mit dem kleinsten Rechteck beginnt. Man legt ein Rechteck mit den Proportionen des Goldenen Schnitts mit drei Ecken A, B, C auf die Koordinatenachsen (blau in Bild 6). Es sollen nun die Abstände von A, B, C vom Koordinatenursprung O und die Lage von D berechnet werden. Da die Graphik auf der Briefmarke keinen Maßstab aufweist, kann eine Strecke beliebig vorgegeben werden; dies ist in Bild 6 die Höhe (= 1) des Dreiecks ABC; wenn hier eine andere Höhe gesetzt wird, muss man nur alle in der folgenden Konstruktion vorkommenden Längen mit dieser Höhe multiplizieren.

a berechnet man aus

$$a \cdot c = b\,,\quad c = \sigma \cdot a\,,\quad b^2 = a^2 + c^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{2+\tau}$$

(beachte $\tau^2 = 1 + \tau$, $\sigma^2 = 1 - \sigma$)

Mit a berechnet man b und c :

$$c = \sqrt{2-\sigma}\quad , \quad b = \sqrt{5}$$

Mit a und c ergibt sich:

$$OA = \sigma\quad , \quad OC = \tau\quad .$$

Das grün eingezeichnete Dreieck hat die gleichen Maße wie OAB, also hat D jeweils den Abstand 1 von den Achsen und

$$OD = \sqrt{2}\quad .$$

Wir erhalten also für A, B, C, D die folgenden Abstände von O (im Gegenuhrzeigersinn):

$\sigma, 1, \tau$ (auf den Achsen)
$\sqrt{2}$ (auf der Diagonalen)

Ansetzen eines Quadrats ADEF :

Aus der Lage von A und D folgt, dass E auf der Koordinatenachse zwischen A und D liegt und dass gilt:

$$OE = \tau^2\quad , \quad OF = \sqrt{2}\cdot\tau$$

Das Rechteck BCEF genügt auch dem Goldenen Schnitt; es wiederholen sich alle Überlegungen zu ABCD, denn es liegen wieder drei Ecken auf den Achsen. Die Höhe des Dreiecks BCE ist die Goldene Zahl, also sind alle oben berechneten Längen damit zu multiplizieren.

Dieses Verfahren lässt sich iterieren. Ausgehend vom innersten Rechteck erhält man durch sukzessives Ansetzen von Quadraten weitere Rechtecke nach dem Goldenen Schnitt. Es wurde gezeigt, dass dann jeweils drei Ecken auf den Achsen liegen, die vierte auf einer Diagonalen. Die Abstände dieser Ecken von O sind beim (n+1)-ten Rechteck im Gegenuhrzeigersinn:

$$\sigma\cdot\tau^n\,,\ \tau^n\,,\ \tau\cdot\tau^n\,,\ \sqrt{2}\cdot\tau^n$$

Bei jedem Schritt wandert die Lage dieser Ecken um 90° im Gegenuhrzeigersinn weiter.

Logarithmische Spirale

Logarithmische Spiralen haben die Parametergleichung

$$r = d \cdot e^{p \cdot \varphi}$$

(d>0, p>0, siehe Bild 7).

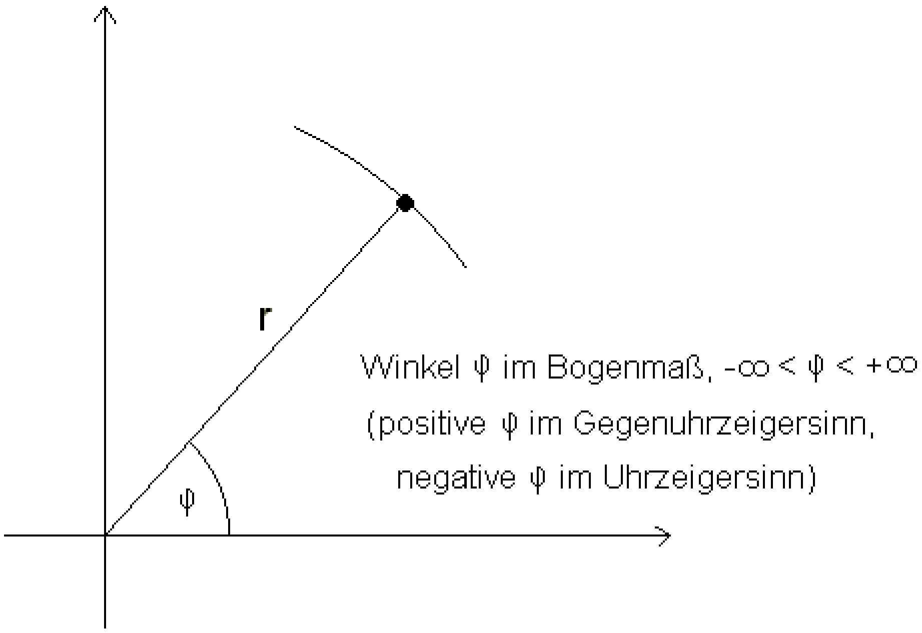


Bild 7

In der Graphik der Briefmarke erhält man alle Berührpunkte der Spirale mit den Rechtecken bzw. Quadraten, wenn man diejenigen Ecken der Rechtecke auswählt, die auf den Winkelhalbierenden liegen. Die Folge der zugehörigen Abstände von O ist

$$\sqrt{2}\ ,\ \tau \cdot \sqrt{2}\ ,\ \tau^2 \cdot \sqrt{2}\ ,\ \ldots$$

und die Berührpunkte wandern im Gegenuhrzeigersinn jeweils um 90°. Sie liegen somit auf einer Logarithmischen Spirale, und wir können den Parameter p berechnen:

$$r \cdot \tau = d \cdot e^{p \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = d \cdot e^{p \cdot \varphi} \cdot e^{p \cdot \frac{\pi}{2}} = r \cdot e^{p \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{2 \cdot \ln \tau}{\pi} \approx 0.30635$$

Setzt man für den Anfang der Spirale auf der Marke

$$\varphi = -135^{\circ} = -\frac{3}{4} \cdot \pi\ ,$$

so kann man auch d berechnen, denn für diesen Winkel ist

$$\sqrt{2} = r = d \cdot e^{p\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} \quad \Rightarrow \quad d \approx 2.91$$

Damit ist geklärt, wie der Goldene Schnitt mit einer Logarithmischen Spirale zusammenhängt und wie die Konstruktion auf der Briefmarke durchgeführt wurde.

Wissen wir nun, dass die Kurve auf der Briefmarke eine Logarithmische Spirale ist? Leider nein, denn es wurde nur *nachgewiesen, dass die oben mit Hilfe des Goldenen Schnitts konstruierten Berührpunkte auf einer Logarithmischen Spirale liegen. Ist die vom Graphiker gezeichnete Kurve diese Logarithmische Spirale?*

In der philatelistischen Fachliteratur findet man unterschiedliche Angaben. Wichtig ist natürlich die Intention der Urheber. Die Schweizerische Postverwaltung geht in [2] davon aus, dass der Graphiker eine Logarithmische Spirale gezeichnet hat. Dies ist nach dem oben dargestellten mathematischen Hintergrund auch plausibel. Es ist auch anzunehmen, dass der Graphiker sich in der mathematischen Fachliteratur kundig gemacht hat, z.B. in [1]. Auch M. Tanoff [4] und R. Wilson [6] bezeichnen die Spirale als logarithmisch. R. Vandevoorde [5] dagegen hat genau hingeschaut und meint, dass der Graphiker es sich leicht gemacht hat und die Berührpunkte durch ***Viertelkreise*** verbunden hat. Ich denke, Vandevoorde hat Recht, wenn man vom rechten, größten Quadrat absieht, dessen Maße - wie erwähnt - nicht stimmen.

Wie stark unterscheiden sich diese Viertelkreise von der Logarithmischen Spirale? M. Tanoff hat eine Reihe von Beiträgen zu der Briefmarke verfasst (u.a. [3], [4]) und meint, dass die Abweichung der Viertelkreise von der Logarithmischen Spirale im Rahmen der künstlerischen Freiheit liegt. Sie ist immerhin so stark, dass man den Unterschied auch auf der kleinen Briefmarke erkennen könnte. Die Logarithmische Spirale würde übrigens gar nicht vollständig innerhalb der Quadrate verlaufen, denn ihre Tangente in einem Berührpunkt ist keineswegs die Rechteckseite. Vielmehr verläuft sie etwa zwischen D und E in Bild 6 zunächst ein kleines Stück außerhalb des Rechtecks und schneidet dann DE, siehe [5]. Dieser Effekt wäre allerdings auf der Marke wohl nur beim größten Quadrat erkennbar, wenn die Spirale richtig gezeichnet worden wäre.

Spiraliger Polygonzug

Zieht man durch die oben beschriebenen Quadrate Diagonalen wie in Bild 2, so erhält man einen Polygonzug, der eine Folge von "Sehnen" für die Logarithmische Spirale bildet; diese Sehnen verlaufen jeweils zwischen den Berührpunkten der Spirale mit den Rechtecken. Da die Quadrate in den Knickpunkten des Polygonzugs aneinander stoßen, sind alle Winkel im Polygonzug 90°. Da die Seitenlängen der Quadrate eine geometrische Folge mit dem Faktor der Goldenen Zahl bilden, gilt dies auch für die Längen der Diagonalen, also für den Polygonzug.

Historische Anmerkung

Der Goldene Schnitt heißt auch "Göttliches Verhältnis" oder "Göttliche Proportion". Fra Luca Pacioli (ca. 1445 - 1517) hat 1509 dazu das Buch *De Divina Proportione* veröffentlicht. Die Goldene Zahl taucht in zahlreichen mathematischen Anwendungen auf, so z.B. als Verhältnis Diagonale/Seite im gleichseitigen Fünfeck oder als Grenzwert der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen.

Literatur

[1] M. Gardner
The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions
New York 1961

[2] PTT (Schweizerische Postgesellschaft *Post, Telegraf und Telefon* bis 1997), Wertzeichenverkaufsstelle
Sonderpostmarken I
PTT 108.06 No. 63 XI86 (1986), S. 4

[3] M. Tanoff
Comment on the Swiss Engineers' and Architects' Stamp
Philamath 14/1 (1992), S. 7

[4] M. Tanoff
Math Class

Philamath 14/4 (1993), S. 5-8

[5] R. Vandevoorde
Comment on the Swiss Engineers' and Architects' Stamp
Philamath 11/4 (1990), S. 4-5

[6] R. Wilson
Stamp Corner
Mathematical Intelligencer 16/4 (1994), S. 78

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Februar 2001.

6

Tsu Ch'ung Chi (Zu Chong Zhi) (ca. 429 - ca. 500)

π

China 1955

Scott 246

Der Herr auf der Briefmarke mit der interessanten Frisur lebte vor über 1500 Jahren in China. Tsu wurde als Mathematiker und Astronom bekannt. Die Wissenschaftshistoriker wissen nicht sehr viel über ihn. Insbesondere ist rätselhaft, wie Tsu seine erstaunliche Approximation der Kreiszahl Pi berechnet hat. Man kann sie auf der Marke sehen!

Die Zahl auf der Briefmarke ist in arabischen Ziffern dargestellt, nicht in den altchinesischen Ziffern aus Tsus Epoche. Aber dies ist - mathematisch gesehen - keine Verfälschung, denn in China war das Dezimalsystem schon vor unserer Zeitrechnung gebräuchlich. Zu Zeiten Tsus benutzte man auch schon lange das dezimale Stellenwertsystem, auch für Dezimalbrüche (also für "Nachkommastellen").

Die Übersetzung der mathematisch relevanten chinesischen Schriftzeichen auf der Marke gibt G. Bonte in [1] an; mein Kollege Professor Mann hat noch Ergänzungen beigetragen. "Mathematiker" erstreckt sich über drei Schriftzeichen.

祖沖之(公元429-500)數學家.精確

Tsu Ch'ung Chi   Lebenszeit   Mathematiker

算出圓周率爲3.14159265.

Rechnen   Kreis   Maß

erzeugt   Umfang

Weltrekord im π-Wettstreit

Tsu Ch'ung Chi war fast ein Jahrtausend lang der "Weltrekordhalter" in der Präzision der Darstellung von Pi. Er hielt diesen Rekord gleich in zwei "Disziplinen", nämlich für dezimale Nachkommastellen

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

(den Mittelwert der beiden Grenzen sieht man auf der Briefmarke)

und für den Bruch

$$\pi \approx \frac{355}{113}$$

Wie genau sind diese Näherungen?

Hier ist der richtige Wert, gerundet auf 11 Nachkommastellen:

$$\pi \approx 3.14159265359$$

Der auf der Briefmarke abgedruckte Mittelwert ist also eine korrekte Rundung auf 8 Nachkommastellen.

Wegen 355/113 = 3.14159292035... ist der von Tsu angegebene Bruch auf 6 Nachkommastellen korrekt.

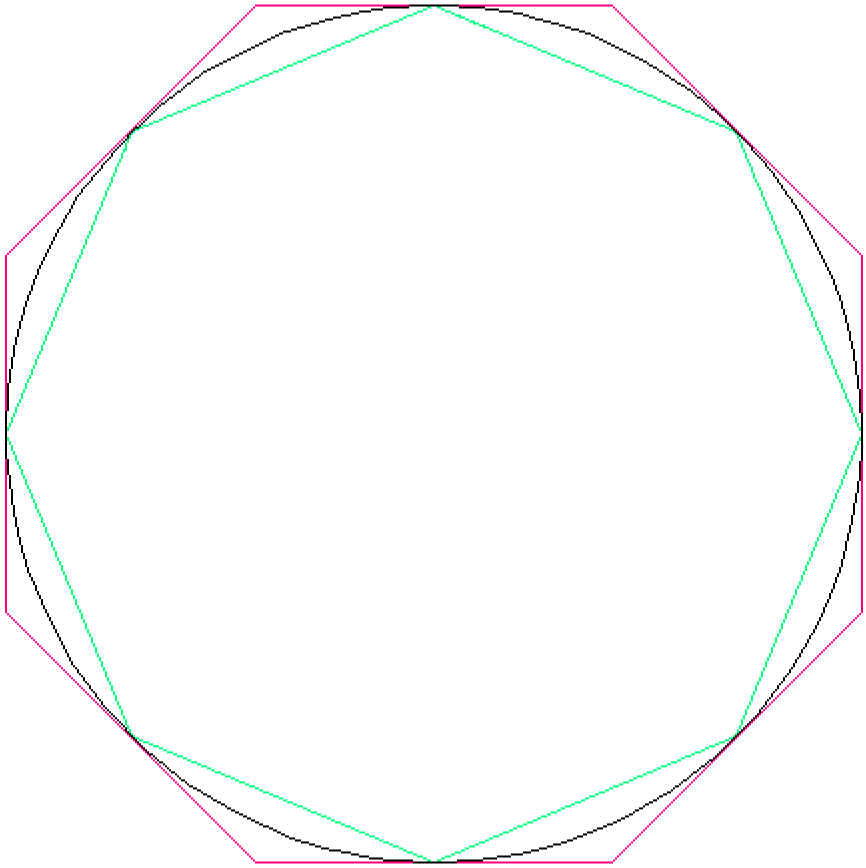
Tsu Ch'ung Chi verbesserte damit die Ergebnisse seiner Vorgänger erheblich. Sein Landsmann Liu Hui kannte ca. 200 Jahre vor Tsu die Näherung 3.14159, im Mittelmeerraum hatte Ptolemäus um das Jahr 150 die Näherung 3.141666... angegeben. Sehr verbreitet war die Näherung 22/7 = 3.142857..., die schon von Archimedes um 250 v. Chr. benutzt wurde.

Vermutlich erreichten Tsus Zahlen das Abendland erst viele Jahrhunderte später, denn noch Fibonacci konnte 1220 lediglich die Näherung 3.141818 angeben. Verbessert wurde Tsus Abschätzung erst durch den Inder Mahdava (1400, 11 Nachkommastellen) und Al-Kashi aus Samarkand (1430, 14 Nachkommastellen). Auch deren Ergebnisse blieben wohl zunächst in Europa unbekannt, denn der erste europäische Mathematiker, der genauer als Tsu rechnete, war der Franzose François Viète, der 1579 eine Näherung mit (nur) 9 richtigen Nachkommastellen berechnete. Kurz danach wurde Tsus Bruch 355/113 erneut (aber 1100 Jahre später!) durch Adriaan Anthonisz gefunden. Danach gab es rasante Fortschritte: Bis 1596 kannte man 35 Nachkommastellen (Ludolph van Ceulen).

Und heute? Im September 1999 berechnete der Japaner Takahashi Kanada 206.158.430.000 Nachkommastellen mit einem Computer (klar!), und das Wettrennen wird sicherlich noch weitergehen.

Wie berechnet man π?

Die klassische Methode, die schon Archimedes anwandte, ist die Umfangsberechnung von dem Kreis einbeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen n-Ecken, um so eine untere und eine obere Abschätzung für den Kreisumfang zu erhalten. Das Bild zeigt dies für $n=8$.



In moderner Schreibweise ist für einen Kreis mit Radius 1:

$$\text{Innenumfang } U_1: \quad \pi \approx \frac{1}{2} \cdot U_1 = n \cdot \sin \pi/n$$

$$\text{Außenumfang } U_2: \quad \pi \approx \frac{1}{2} \cdot U_2 = n \cdot \tan \pi/n$$

Die Sinus- und Tangens-Werte lassen sich für viele n elementar berechnen, was allerdings für große n mühsam wird. Für die Achtecke ergibt sich auf diese Weise:

$$3{,}061 < \pi < 3{,}314$$

Archimedes verwendete das 96-Eck, das die folgende Näherung bringt:

$3{,}14103 < \pi < 3{,}14272$

Liu Hui, der uns schon als Pi-Rekordler vor Tsu begegnete, berechnete den Umfang des (regelmäßigen) 192-Ecks. Al-Kashi nahm für die oben erwähnten 14 Nachkommastellen $n = 3 \cdot 2^{28} = 805.306.368$. Der Hildesheimer Mathematiker und Ingenieur Ludolph van Ceulen verbrachte die meiste Zeit seines Lebens mit $n = 2^{62} = 4.611.686.018.427.387.904$ und ereichte damit, wie erwähnt, 35 Nachkommastellen. Nach ihm heißt Pi auch die Ludolph'sche Zahl.

Man kennt modernere, nicht-geometrische Methoden, um Pi zu berechnen, etwa mit Reihenentwicklungen oder Kettenbrüchen. Der Inder Madhava (der Tsus Rekord brach) scheint der erste gewesen zu sein, der solche Methoden angewendet hat.

Wie hat es Tsu Ch'ung Chi gemacht? Wir wissen es nicht.

Literatur

[1] G. Bonte
Yuan Zhou Shuai
Philamath 3/2 (1981), S. 5-6

[2] R. Williams
Tsu Ch'ung-Chih
Philamath 16/3 (1995), S. 4-6

[3] J. Arndt, C. Haenel
Pi - Algorithmen, Computer, Arithmetik
Berlin [u.a.]: 2., überarb. und erw. Aufl. (2000)

---

nächste Briefmarke Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im März 2001.

7

Edmond Halley (1656 - 1742)

Nasir al-Din al-Tusi (1201 - 1274)

Observatorium Jantal Mantar

Dominica 1986

Michel 959

Der Halley'sche Komet

Die Länder des Commonwealth gaben anlässlich des Erscheinens des Halley'schen Kometen (Ende 1985 bis Anfang 1986) über 200 (!) Briefmarken heraus, von denen eine hier gezeigt wird (Dominica ist ein winziger Inselstaat in der Karibik und nicht zu verwechseln mit der Dominikanischen Republik). Diese vielen Marken waren weitgehend thematisch und künstlerisch länderübergreifend abgestimmt und zeigten nicht nur Edmond Halley und "seinen" Kometen, sondern dokumentierten fast alles, was in engerem oder weiterem Zusammenhang mit diesem Kometen oder der Geschichte der Astronomie im Allgemeinen steht.

Der Halley'sche Komet umrundet die Sonne in etwas mehr als 76 Jahren (leicht unregelmäßig) in einer elliptischen, stark exzentrischen Bahn und kommt ebenso oft der Erde recht nahe, am 11.4.1986 bis auf 60 Mio. km. Dies war das 30. Erscheinen des Kometen seit der ersten historisch belegten Sichtung 240 v. Chr. in China.

Der Komet wurde 1985/86 von einer breiten Öffentlichkeit mit Spannung erwartet und von großer Publizität begleitet. Leider war sein Erscheinen enttäuschend. Seine Helligkeit war deutlich geringer als etwa im Jahre 1910. Ein eindrucksvolles Bild des Kometen konnte man nur im Fernrohr sehen. Wie prächtig ein Komet leuchten kann, sah man dann einige Jahre später, als im Frühjahr 1997 der Komet Hale-Bopp erschien. Ich wünsche den jüngeren Lesern dieser Schrift, dass sie die nächste Wiederkehr des Halley'schen Kometen erleben werden, die für etwa 2061 erwartet wird.

Edmond Halley

Halleys lange Lebensspanne fiel in eine wissenschaftlich außerordentlich interessante Zeit. Er war Zeitgenosse von

Huygens, Newton, Leibniz, der Bernoulli-Sippe und Euler.

Edmond Halley ist heute berühmt durch den nach ihm benannten Kometen. Allerdings wurden zu seinen Lebzeiten andere seiner wissenschaftlichen Beiträge höher eingeschätzt. Halley studierte in Oxford, wo er 1704 auch Professor für Geometrie wurde. Ab 1720 bekleidete er das renommierte Amt des "Astronomer Royal" an der Sternwarte in Greenwich. Seine Neigung galt in erster Linie der Astronomie, aber Halleys Werk umfasst auch Arbeiten zur Physik, Geophysik und Mathematik (u.a. Lösung von Polynomgleichungen).

1682 beobachtete Halley einen Kometen. Isaac Newton neigte zu der Auffassung, dass Kometen parabolische Bahnen beschreiben und somit nur einmal von der Erde aus gesehen werden können. Halley hinterfragte diese Position. Präzise Bahnmessungen, historische Studien zu früheren Kometensichtungen und die erst wenige Jahrzehnte vorher formulierten Kepler'schen Gesetze führten Halley zu der Einsicht, dass der 1682 beobachtete Komet auf einer elliptischen Bahn um die Sonne läuft und schon wiederholt von Menschen gesehen worden war. Er sagte die Wiederkehr des Kometen zutreffend für Dezember 1758 voraus.

Vor Halley war dieser Komet schon mindestens 25 mal von orientalischen und europäischen Astronomen registriert worden, aber niemand hatte gewusst, dass es sich dabei immer um denselben Himmelskörper handelte. Er trägt daher zu Recht Halleys Namen.

Nasir al-Din al-Tusi

Der Perser al-Tusi war einer der bedeutendsten orientalischen Gelehrten des 13. Jahrhunderts. In seine Lebensspanne fiel die Invasion der Mongolen in die islamische Welt. Er schloss sich 1256 den Mongolen unter Hulegu an, einem Enkel Dschingis-Khans. Dieser machte ihn zu seinem Hofgelehrten und finanzierte ihm ein exzellent ausgestattetes Observatorium in Maragheh im Nordwesten Persiens. 1258 nahm al-Tusi an der Seite Hulegus an der Erstürmung Bagdads teil.

Al-Tusi gilt als einer der Begründer der ebenen und sphärischen Trigonometrie und verfasste zahlreiche weitere mathematische Werke, u.a. zur Logik und Geometrie. In seinem Observatorium schuf er Tafeln der Planetenbahnen und astronomische Instrumente.

1222, als al-Tusi 21 Jahre alt war, erschien der Halley'sche Komet. Er muss in diesem Jahr hell gestrahlt haben, denn Dschingis-Khan nahm ihn als Zeichen für die Aussendung seiner Reitertruppen nach Westen.

Astronomisches Observatorium Jantal Mantar

Der Bau des Jantal Mantar wurde im Jahr 1728 begonnen. Es steht in der Stadt Jaipur, Hauptstadt der indischen Provinz Rajasthan. Jantal Mantar ist das größte aus Stein gebaute Observatorium der Welt. Bis heute erlaubt es präzise Messungen der Ortszeit, des Laufes von Sonne, Mond und ausgewählter Planeten und Sterne sowie von Sonnenfinsternissen. *Der Halley'sche Komet ist bisher vier Mal über Jantal Mantar erschienen*.

Jantal Mantar war erst vor wenigen Jahren ein Zentrum der Feiern zur Jahrtausendwende.

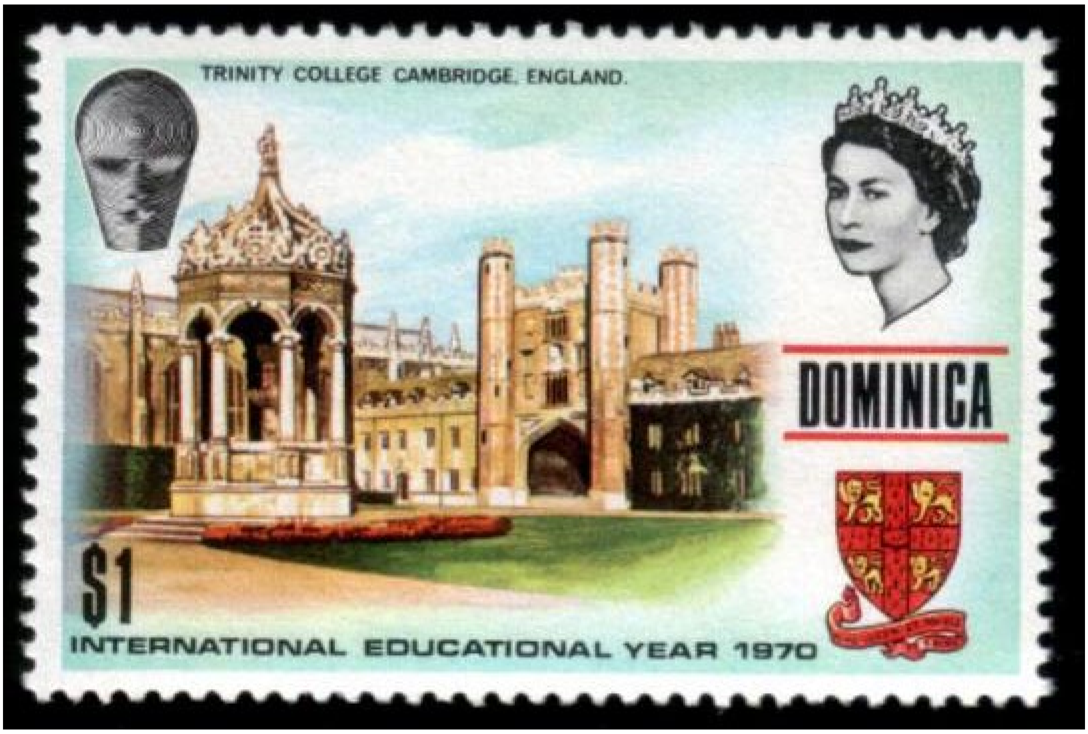
---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im April 2001.

8

Trinity College, Cambridge



Dominica 1971

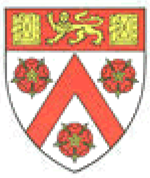
Michel 314

Trinity und Mathematik

Trinity College ist das größte College der Universitätsstadt Cambridge in England. Nur wenige Orte in der Welt dürften eine ähnlich große mathematische Reputation aufweisen wie Trinity ("Dreifaltigkeit").

Auf der Briefmarke sieht man den Innenhof ("Great Court") des College. Das Tor auf der rechten Seite ("Great Gate") führt hinaus zur Stadt. Links im Vordergrund steht der Brunnen, dahinter sieht man die Kapelle. Links neben dem Tor, im ersten Stock, liegen die Räume, in denen Isaac Newton lebte und arbeitete.

Das Wappen auf der Marke ist nicht das von Trinity, sondern das Universitätswappen.



Wappen des Trinity College

Was ist ein College? In Cambridge, wie auch in anderen englischen Universitätsstädten, ist dies eine Hausgemeinschaft von Wissenschaftlern und Studierenden unterschiedlichster Fachrichtungen. (Etwas ganz anderes versteht man in Amerika unter einem College, nämlich eine Hochschule oder ein Institut, das eine akademische Grundausbildung anbietet, meist bis zum Bachelor-Abschluss.)

Im Trinity College gibt es einen Master (Leiter des College), 160 Fellows (bezahlte Angehörige des College, die meist in Forschung, Lehre und Verwaltung arbeiten), 320 Master-Studierende ("postgraduates") und 650 Bachelor-

Studierende ("undergraduates"). Die Lehrveranstaltungen finden nicht im College selbst statt, sondern an der Universität.

Seit der Gründung des College 1546 durch Heinrich VIII. arbeiteten viele Fellows und Studenten in Trinity, die zu großer Bekanntheit gelangt sind (unter ihnen 31 Nobelpreisträger). Hier eine kleine Auswahl: Die Könige Edward VII. (Urgroßvater von Königin Elizabeth II.) und George VI. (Vater von Königin Elizabeth II.), Mahatma Gandhi, die Physiker James Clerk Maxwell und Niels Bohr, der Philosoph Ludwig Wittgenstein, der Dichter Lord Byron, die Schriftsteller A. A. Milne ("Pu der Bär") und Nabokov ("Lolita"), der kommunistische Doppelagent Kim Philby.

Die Liste hervorragender Mathematiker des Trinity College ist lang. Der berühmteste von allen ist sicherlich **Isaac Newton** (1642 - 1727). Die Erstausgabe seiner *Principia Mathematica* von 1687 kann man in der College-Bibliothek (erbaut von Christopher Wren) ansehen.

Apfelbaum in Newtons College-Garten

Der Apfelbaum auf dem Foto wurde 1954 gepflanzt. Er steht auf der Außenseite des College, zur Trinity Street hin, dort, wo Newton ein Gärtchen unterhielt. Die Fenster im ersten Stock gehörten zu seiner Wohnung. Der Baum ist ein direkter Nachkomme des berühmten Apfelbaums von Woolsthorpe Manor, Newtons Heimat bei Grantham, Lincolnshire. 1665 bis 1667 kehrte Newton aus Cambridge nach Woolsthorpe zurück, weil die Universität wegen der Pest geschlossen wurde. Zwar ist ihm dort wohl kein Apfel auf den Kopf gefallen und hat ihn so zur Gravitationstheorie angeregt, wie gern erzählt wird; aber immerhin hat die Beobachtung eines von diesem Baum fallenden Apfels seine Erkenntnisse zur Gravitation reifen lassen, wie er selbst seinem Biographen Stukeley erzählt hat.

Bertrand Russell (1872 - 1970) war einer der wenigen Mathematiker, die einen Nobelpreis erhalten haben (1950 für Literatur). Nach seinem Studium im Trinity College wurde er dort 1895 Fellow und später "Lecturer". 1916 wurde er wegen Pazifismus entlassen. 1944 wurde er - mit 72 Jahren - erneut zum Fellow gewählt (obwohl immer noch Pazifist).

Einige weitere Mathematiker des Trinity College:

Charles Babbage (1791 - 1871)

Augustus de Morgan (1806 - 1871)

George Gabriel Stokes (1819 - 1903)

Arthur Cayley (1821 - 1895)

Alfred North Whitehead (1861 - 1947)

Godfrey Harold Hardy (1877 - 1947)

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887 - 1920)

Vier Mathematiker des Trinity College haben eine **Fields-Medaille** erhalten, die höchste Auszeichnung in der Mathematik:

1966: **Michael Francis Atiyah** (*1929)

1970: **Alan Baker** (*1939)

1998: **Richard Ewen Borcherds** (*1959)

1998: **William Timothy Gowers** (*1963)

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Mai 2001.

9

Chen Jing-run (1933 - 1996)

China 1999

Zu dieser Briefmarke hat mein Kollege Professor Dr. Hartmut Siebert *den folgenden Gastkommentar geschrieben, wofür ich ihm herzlich danke.*

Auf der ganz in Blautönen gehaltenen Marke sieht man ein Porträt des chinesischen Mathematikers Chen Jing-run, eine Reihe chinesischer Schriftzeichen und die Ungleichung

$$P_x(1{,}2) \geq \frac{0{,}67xC_x}{(\log x)^2}$$

deren Bedeutung sich auf den ersten Blick nur demjenigen erschließt, der sich schon intensiv mit der "**Goldbach'schen Vermutung**" beschäftigt hat.

Sie ist benannt nach Christian Goldbach (1690 - 1764), der als Sekretär der Akademie in St. Petersburg einen regen Schriftwechsel mit vielen europäischen Wissenschaftlern führte. In der Fußnote zu einem Brief an Leonhard Euler (1707 - 1783) am 7. Juni 1742 sprach er die Vermutung aus, dass sich **jede gerade Zahl größer als 2 als Summe von zwei Primzahlen** schreiben lässt.

Diese mehr als 250 Jahre alte Vermutung ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt. Noch 1912 bezeichnete sie Edmund Landau (1877 - 1938), der zu seiner Zeit eine Art "Zahlentheorie-Papst" war, als "unangreifbar beim heutigen Stande der Wissenschaften". Schon 3 Jahre später gab es einen ersten Beweisversuch durch Jean Merlin. Sein Beweis war zwar fehlerhaft, seine Grundidee, das Sieb des Eratosthenes weiterzuentwickeln und mit Methoden aus Kombinatorik und Analysis zu kombinieren, hat sich aber als sehr fruchtbar erwiesen. 1920 konnte Viggo Brun (1885 - 1978) mit solchen Methoden zeigen:

> Jede genügend große gerade Zahl $2n$ lässt sich in der Form $2n = r + s$ schreiben, wobei r und s jeweils aus höchstens 9 Primfaktoren (mit Vielfachheit gezählt) bestehen.

Jetzt musste man "nur noch" den Beweis so verbessern, dass man die Zahl 9 durch 1 ersetzen kann und hätte wenigstens für alle genügend großen $2n$ die Vermutung bewiesen. Den Rest könnte dann ein Computer erledigen.

Es hat auch andere methodische Ansätze und Teilergebnisse gegeben, von denen wir in diesem kurzen Artikel nicht sprechen werden, um ihn nicht zu überfrachten.

Um die Verbesserungen der Brun'schen Aussage knapp darstellen zu können, benutzen wir das "Stenogramm" (a, b) für die Aussage:

> Jede genügend große gerade Zahl $2n$ lässt sich in der Form $2n = r + s$ schreiben, wobei r aus höchstens a und s aus höchstens b Primfaktoren besteht.

So abgekürzt wäre das Brun'sche Ergebnis : (9, 9) . In den nächsten Jahrzehnten wurden folgende Verbesserungen erzielt:

1924 : H. Rademacher	(7, 7)
1932 : Th. Estermann	(6, 6)
1936 : G. Ricci	(5, 7) , (4, 9) , (3, 15) , (2, 336)
1940 : A. A. Buchstab	(4, 4)
1950 : A. Selberg (ohne Beweis)	(2, 3)
1959 : Wang Yuan (mit Beweis)	(2, 3)
1965 : A. A. Buchstab	(1, 3)
1971 : H.-E. Richert : einfacherer Beweis für	(1, 3)

1948 hatte A. Rényi gezeigt, dass es überhaupt eine Zahl b gibt mit (1, b). Die Methode schien Anfang der 70er Jahre mit dem Buchstab'schen Ergebnis (1, 3) ausgereizt, und eine weitere Verbesserung auf diesem Wege galt als unvorstellbar. 1965 hatte Chen zwar in einer chinesischen Fachzeitschrift angekündigt, er habe einen Beweis für (1, 2) , was aber in der Fachwelt stark bezweifelt wurde. Wegen der Folgen der Kulturrevolution konnte auch kein westlicher Mathematiker mit ihm Kontakt aufnehmen. Nach der vorsichtigen Öffnung Chinas gegen Ende der Kulturrevolution erschien 1973 der komplette Beweis in "Scientia Sinica". Ich erinnere mich noch gut daran, wie mein damaliger Chef Prof. H.-E. Richert mir eine Kopie dieses Aufsatzes auf den Schreibtisch legte mit dem Auftrag "Suchen Sie mal den Fehler!"

Einen Fehler habe ich nicht gefunden und viele andere, die sehr genau hingesehen haben, auch nicht. Die Arbeit von Chen ist bis heute nicht übertroffen worden.

Wir können jetzt auch die merkwürdige Ungleichung auf der Briefmarke erklären: Sie ist eine quantitative Form des Satzes von Chen:

$$P_x(1,2) = |\{p :\ p \le x,\ x - p = P_2\}|$$

steht für die Anzahl der Darstellungen der geraden Zahl x als Summe einer Primzahl (p) und einer Zahl mit höchstens 2 Primfaktoren (P_2) , C_x für das Produkt

$$C_x = \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{2<p|x} \frac{p-1}{p-2}$$

aus einem konvergenten unendlichen Produkt, erstreckt über alle ungeraden Primzahlen und einem Produkt, erstreckt über alle ungeraden Primteiler von x.

Die Aussage auf der Briefmarke heißt also ausführlich so: Für jede genügend große gerade Zahl x ist

$$P_x(1,2) \;\geq\; 0{,}67 \cdot \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{2<p|x}\frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{x}{\log^2 x} \; .$$

Einen Ansporn, die Goldbach'sche Vermutung vollständig zu beweisen, hat der Verlag Faber & Faber gegeben, indem er 1 Million US$ für diesen Beweis ausgesetzt hat, allerdings unter engen Rahmenbedingungen. Es darf bezweifelt werden, ob es wirklich nötig war, dass der Verlag sich sogar für den Fall der Auszahlung versichert hat.

Zur Bedeutung der Schriftzeichen auf der Briefmarke:

Die Zeichen oben

	哥德巴赫	猜想	的	最佳	结果
(gelesen:	gē dé bā hè	cài xiǎng	dè	zuì jiā	jié guǒ)
bedeuten	" Goldbach	Vermutung	davon	Optimierungs-	Ergebnis "

Die Zeichen unten

	中国	邮政
(gelesen:	zhòng gúo	yóu zhèng)
bedeuten (wer hätt´s gedacht ?)	" Chinesische	Post "

Zum Schluss eine Spekulation über die Farbe: In China steht die Farbe Blau u.a. für "hohe Stellung, aber ein Aufstieg mit Sorgen". Beides trifft auf Chen zu.

Für diesen Hinweis und für Informationen über die Hintergründe der chinesischen Kulturrevolution bedanke ich mich bei meinem Kollegen Professor Dr. Reinhard Mann. Er hat mir auch Übersetzungen der chinesischen Schriftzeichen am oberen und unteren Rand der Briefmarke angefertigt. Die Zeichen in der Mitte sind zu klein, als dass man sie entziffern könnte.

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Juni 2001.

Das Transit-Teleskop auf dem 0. Meridian, gebaut von George Biddell Airy (1801 - 1892)

Großbritannien 1984

Michel 996
Scott 1061

Die Briefmarke entstammt einem Satz mit vier Werten, der zur 100-Jahr-Feier der internationalen Anerkennung des **Greenwich Meridian** ausgegeben wurde.

Im Jahre 1880 erhielt Großbritannien eine einheitliche gesetzliche Zeit: **Greenwich Mean Time** (GMT). Sie wurde festgelegt als die Ortszeit des Londoner Vororts Greenwich, genauer gesagt als die mittlere Sonnenzeit für einen genau festgelegten Längengrad (Meridian) durch diesen Ort (die "Mittelung" ist notwendig, da nach echter Sonnenzeit nicht alle Tage im Jahr gleich lang sind). Dieser Längengrad wurde in der Greenwicher Sternwarte, dem *Royal Observatory*, markiert und vier Jahre später durch eine internationale Übereinkunft als **0. Längengrad** standardisiert. Seither sind alle Längengrade auf Greenwich bezogen, und alle Zeitzonen sind durch ihre Abweichung von der GMT definiert.

George Biddell Airy (1801 - 1892)

G. B. Airy wurde am 27. Juli 1801 geboren. Diese "Briefmarke des Monats" wurde zu seinem 200. Geburtstag ausgewählt. Sein Name ist auf der Marke zusammen mit dem von ihm in Greenwich gebauten Teleskop zu sehen.

Airy war in Cambridge Student und später Fellow am Trinity College. Er wurde als bester Mathematiker seines Jahrgangs ausgezeichnet und erhielt schon mit 25 Jahren den *Lucasian Chair*, den Lehrstuhl, den einst Isaac Newton innehatte und auf dem heute Stephen Hawking arbeitet. Von 1835-1881 bekleidete Airy die Position des *Astronomer Royal*. Sein umfangreiches Werk umfasst Bücher und Artikel zur Mathematik, Astronomie, Physik und Geowissenschaft. Ihm zu Ehren gibt es auf dem Mars den **Krater Airy**, der genau auf dem **0. Marsmeridian** liegt.

George Biddell Airy

Mathematiker und Physiker kennen die **Airy'sche Differentialgleichung**

$$\boxed{y'' - xy = 0}$$

mit der Lösung

$$y(x) = y(0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{\prod_{m=1}^{k} (3m-1) \cdot 3m} + y'(0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{\prod_{m=1}^{k} 3m \cdot (3m+1)}$$

Airys Teleskop

Airy baute 1850 an der Sternwarte in Greenwich das *Transit Telescope*, dessen Bauplan man auf der Briefmarke sieht. Es diente der exakten Bestimmung der Durchgangszeitpunkte von Planeten und Sternen über dem 0. Meridian - er wird durch den roten Strich auf der Marke symbolisiert. Airys Teleskop ist noch heute funktionsfähig und kann im Royal Observatory besichtigt werden, das jetzt ein Teil des *National Maritime Museum* ist.

Airy und Babbage

Ein Schatten auf Airys Vita fiel durch seine Haltung gegenüber Charles Babbage. Airy sprach sich erfolgreich gegen eine Weiterfinanzierung von Babbages *Difference Engine* durch die Regierung aus und behinderte so den Fortschritt der Informatik in England.

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Juli 2001.

11

Luca Pacioli (1445 - 1517)

Italien 1994

Michel 2319

Der Franziskanermönch Luca Pacioli wurde vor allem durch zwei seiner zahlreichen Bücher bekannt: Die **Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita** ist ein Kompendium des mathematischen Wissens zu der Zeit, als Kolumbus Amerika entdeckte; zum 500. Jahrestag ihres Erscheinens hat die italienische Post diese Briefmarke herausgegeben. Das andere Werk ist **De Divina proportione**, das dem Goldenen Schnitt gewidmet ist und von Paciolis engem Freund Leonardo da Vinci illustriert wurde.

De Divina proportione ist weitgehend und die *Summa* ist teilweise eine Übersetzung von zeitweise verschollenen Schriften des **Piero della Francesca (ca. 1412 - 1492)** vom Lateinischen ins Italienische, was erst vor etwa 100 Jahren bewiesen werden konnte.

Luca Pacioli war sein Leben lang auf Reisen. Er lehrte Mathematik in ständigem Wechsel an fast allen italienischen Universitäten (Bologna, Perugia, Rom, Florenz, Neapel ...)

Die Briefmarke zeigt Pacioli in Ordenstracht, umgeben von vielen schönen mathematischen Objekten wie Zirkel, Rechtwinkeleisen und Armillarsphäre. Besonders auffällig ist ein Platonischer Körper auf dem Tisch, ein **Dodekaeder**. Dieser wird in *De Divina proportione* untersucht: Im regelmäßigen Fünfeck, das die Seiten des Dodekaeders bildet, stehen Diagonale und Seite im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Dieser findet sich auch in anderen Maßverhältnissen der Platonischen Körper Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder wieder.

Zum Dodekaeder: Briefmarke 2

Zum Goldenen Schnitt: Briefmarke 5

Manfred Börgens - Briefmarke 11

Als E-Dokument veröffentlicht im September 2001.

12

Simon Stevin (1548 - 1620)

Belgien 1942

Michel 602
Scott B321

Diesem Mann verdankt Europa die dezimalen Nachkommastellen.

Simon Stevin stammt aus Brügge in Belgien. Erst mit über 30 Jahren begann er ein Mathematikstudium in Leiden (Niederlande) und verfasste mehrere Bücher zur Mathematik und Physik. Stevin stellte sich in den Dienst des Prinzen Moritz von Nassau-Oranien und wirkte dort u.a. als Ingenieur im erfolgreichen Kampf der Niederlande gegen die spanische Besatzungsmacht.

Die arabischen Zahlen waren in Europa seit etwa 350 Jahren verbreitet, als Simon Stevin 1585 das Buch **De Thiende** (*Das Zehntel*) veröffentlichte, das der bis heute üblichen Zahldarstellung mit Vorkomma- und Nachkommastellen zum Durchbruch verhalf. Stevin hat diese Darstellung nicht erfunden, die im Orient seit Jahrhunderten gebräuchlich war und auch in Europa in den Werken einiger Gelehrter aufgetaucht war, sich jedoch nicht durchgesetzt hatte (stattdessen wurde mit Brüchen gearbeitet). In Stevins Buch wurden zwar die Dezimalstellen in einer etwas umständlichen Form geschrieben, nämlich so:

$$2\textcircled{0}\ 6\textcircled{1}\ 3\textcircled{2}\ 2\textcircled{3} \qquad (= 2{,}632)$$

aber die grundlegende Idee verbreitete sich rasch und erleichterte fortan die arithmetischen Operationen erheblich. Stevin gab auch die Anregung, langfristig alle Maße, Gewichte und Währungen auf das Dezimalsystem umzustellen.

Dezimalkomma und Dezimalpunkt wurden ab 1592 von G. Magini, C. Clavius und J. Napier eingeführt.

Gegen Ende seines Lebens - immer noch im Dienst der nassauischen Truppen - lernte Stevin den jungen René Descartes kennen, der in den Niederlanden militärische Erfahrungen sammeln wollte.

---

nächste Briefmarke Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Oktober 2001.

13

Adam Riese (1492 - 1559)

Neunerprobe

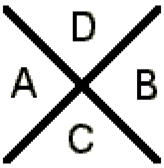
Deutschland 1959 und 1992

Michel 308 und 1612
Scott 799 und 1748

Adam Riese (richtiger: Ries) ist als "Rechenmeister" den meisten Menschen hierzulande geradezu sprichwörtlich bekannt. Zu seinen Lebzeiten war er berühmt als "Hofarithmeticus" des sächsischen Kurfürsten und durch seine Rechenbücher, die durch den kurz zuvor erfundenen Buchdruck weite Verbreitung fanden. Adam Riese besuchte nie eine Universität, aber konnte den Kaufleuten u.a. die schriftliche Division erklären, was seinerzeit an den meisten Hochschulen als zu schwierig galt.

Auf beiden Briefmarken (zum 400. Todestag und zum 500. Geburtstag) sieht man ein "Markenzeichen" Adam Rieses, ein Kreuz mit vier Zahlen. Die Bedeutung dieser Darstellung ist nicht allgemein bekannt und soll hier erklärt werden. Leider sind auf den Briefmarken die Zahlen paarweise gleich, was nicht sein muss; dadurch wird es erschwert, die Regel hinter diesen Zahlenkreuzen zu erkennen.

Das Riese'sche Zahlenkreuz stellt die **Neunerprobe beim Addieren** dar. Für eine Rechnung **a + b = c** stellt Riese zur Probe das Zahlenkreuz mit den "Neunerresten" auf:



Dabei ist:

A = a mod 9

B = b mod 9

C = c mod 9

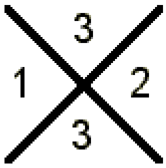
D = A + B

Die Probe stimmt, wenn **C = D** oder **C + 9 = D** .

1. Beispiel:

```
1495
3107
----
4602
```

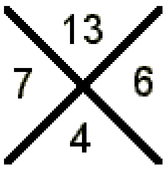
Dafür lautet die Probe:



2. Beispiel:

```
 826
4308
----
5134
```

Probe:



[nächste Briefmarke]   [Inhaltsverzeichnis]

Manfred Börgens - Briefmarke 13

Als E-Dokument veröffentlicht im November 2001.

14

Die Mathematik im Baum der Wissenschaften

Spanien 1964

Michel 1466
Scott 1236

Ein Weihnachtsbaum der besonderen Art aus Spanien: *Arbor Scientiae* (lat.; "Baum der Wissenschaften"). Am unteren Rand der Marke steht *Investigaciones Cientificas* (span.; "Wissenschaftliche Untersuchungen").

Am Baum sind außer der Mathematik die Physik, die Chemie, die Biologie, die Technik, die Philosophie, die Theologie und die Kunst vertreten.

Spanien hat diese Briefmarke zum 25. Jahrestag der Beendigung des Bürgerkrieges herausgegeben. General Francos Militärputsch 1936 führte zum spanischen Bürgerkrieg bis 1939, den die Franco-Truppen gewannen; Franco regierte danach Spanien bis zu seinem Tode 1975. Das Jubiläum *XXV Años de Paz* (span.; "25 Jahre Frieden") bezieht sich auf das Jahr 1939, da Spanien im 2. Weltkrieg neutral blieb.

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2001.

15

Isaac Newton (1642 oder 1643 - 1727)

(eine Fußnote zu Newtons Geburtsjahr findet sich am Ende dieses Beitrags)

Newton'sches Gravitationsgesetz

Nicaragua 1971 und **Frankreich 1957**

Michel 1614 und 1171
Scott 878 und 861

Die linke Marke ist einem bemerkenswerten Briefmarkensatz entnommen:
Las 10 formulas matematicas que cambiaron la faz de la tierra
(*Die 10 mathematischen Formeln, die das Gesicht der Erde verändert haben*).

Die als "Gesetz von Newton" dargestellte Formel ist das **Newton'sche Gravitationsgesetz**.

f ist die Gravitationskraft, also die Kraft, mit der sich zwei Körper anziehen.

$\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$ sind die Massen der beiden Körper.

r ist der Abstand ihrer Schwerpunkte.

G ist die **Gravitationskonstante**, sie wird meist mit Gamma bezeichnet:

$$\gamma \approx 6.672 \cdot 10^{-11} \ \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

Das Gesetz sagt aus, dass die Gravitation direkt proportional zu den beteiligten Massen ist und mit dem Quadrat ihres Abstands abnimmt.

Der Wert der Gravitationskonstanten zeigt, dass die Massenanziehung eine erstaunlich schwache Kraft ist. Dies soll an einem kleinen Beispiel gezeigt werden:

Man denke sich zwei Eisenkugeln im All, weit weg von anderen Massen. Beide sollen je die Masse **100.000 Tonnen** haben und sich berühren. Welche Kraft muss man ausüben, um ihre Massenanziehung zu überwinden und sie auseinanderzuschieben?

Dazu braucht man lediglich eine einzige starke Person! Das kann man mit Newtons Formel nachrechnen:

Eisen hat die Dichte 7.9, also ist nach der Formel für das Kugelvolumen

$$(m_1 = m_2 =)\ 100.000\ t = {}^4/_3 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot 7.9\ t\ ,$$

wenn R der Radius der Kugeln in Metern ist. So erhält man näherungsweise R = 14.46 und r = 28.92 m. Jetzt kann man f aus der Formel ausrechnen und erhält näherungsweise:

f = 797.9 kg m/s^2 = 797.9 N (= 81.39 kp)

Was macht der halbe Apfel auf der Marke aus Nicaragua? Er spielt an auf eine Episode aus Newtons Leben, die man im Text zur Briefmarke 8 nachlesen kann.

Wieso wird Newtons Geburtsjahr manchmal mit 1642 und manchmal mit 1643 angegeben? Newton wurde am ersten Weihnachtsfeiertag geboren, aber zu einer Zeit, als Großbritannien noch den Julianischen Kalender benutzte. Newton selbst gab den 25. Dezember 1642 als seinen Geburtstag an. In weiten Teilen des übrigen Europas schrieb man aber schon den 4. Januar 1643 und hatte Weihnachten bereits zehn Tage vorher gefeiert - nach dem Gregorianischen Kalender, der 1582 eingeführt worden war. Großbritannien lehnte auf Betreiben der Church of England den neuen Kalender ab, da dieser ein Werk der katholischen Kirche war (er wurde erst 1752 akzeptiert). Als Kuriosität am Rande ist noch zu bemerken, dass Newtons Geburt (nach dem in England verwendeten Kalender) auch dann im Jahr 1642 gelegen hätte, wenn er mehrere Wochen später zur Welt gekommen wäre (also etwa im Januar oder Februar), denn der Jahreswechsel lag dort bis 1752 nicht auf dem 1. Januar, sondern auf dem 25. März. Man muss sich klar machen, dass bis weit ins 20. Jahrhundert in Europa ein heilloses Durcheinander der Kalenderdaten herrschte.

---

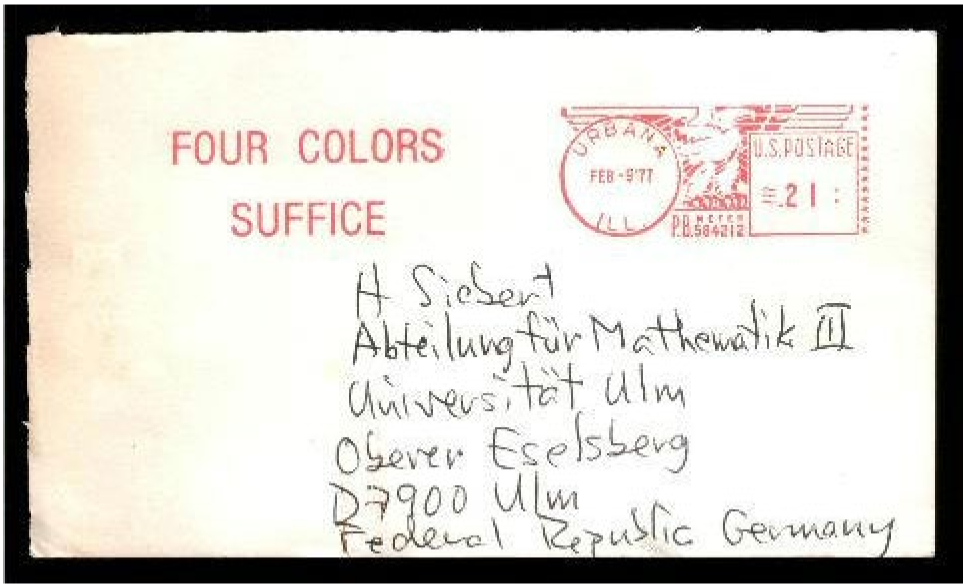
nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Briefmarke 15

Als E-Dokument veröffentlicht im Januar 2002.

16

Beweis des Vierfarbensatzes 1977



An der University of Illinois in Urbana war man Anfang 1977 mächtig stolz, denn an dieser Hochschule war Kenneth Appel, Wolfgang Haken (ein Deutscher aus Berlin) und John Koch ein sehr bemerkenswerter Beweis gelungen.

1852 machte Francis Guthrie die mathematische Welt auf seine (aus der Erfahrung gewonnene) Vermutung aufmerksam, dass man alle Landkarten mit nur vier Farben so einfärben kann, dass benachbarte Länder nicht die gleiche Farbe haben. Dieser "Vierfarbensatz" widerstand exakt 125 Jahre allen Beweisversuchen, bis Appel, Haken und Koch der Beweis gelang. Die University of Illinois feierte dieses Ereignis mit dem abgebildeten Stempel.

Mein Kollege Professor Dr. Hartmut Siebert hat die abgebildete Karte zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm herzlich danke. Er muss einer der Ersten gewesen sein, die diesen schönen Stempel erhalten haben, denn der Beweis war am 9. Februar 1977 (Poststempel) noch ganz jung.

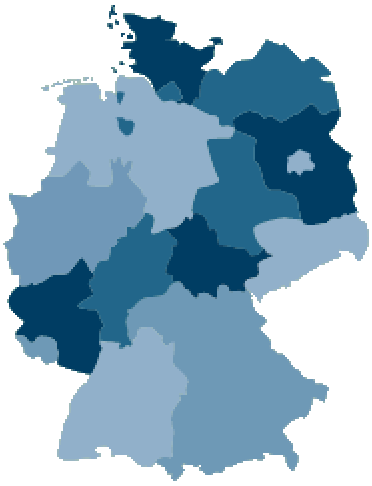
Was macht den Beweis so interessant?

- Wir haben es mit einem Theorem zu tun, das jeder sofort verstehen kann, das aber sehr schwer zu beweisen ist.

- Nur wenige prominente und leicht verständliche Probleme bleiben so lange ungelöst (wenn sie dann doch gelöst werden, gibt es großes Aufsehen, siehe etwa Fermats Letzter Satz auf der Briefmarke 1).

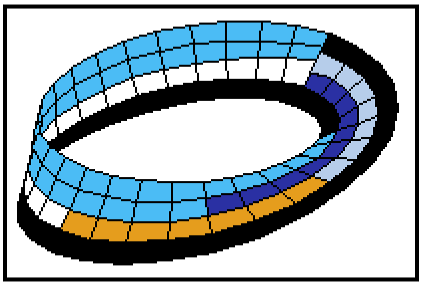
- Appel, Haken und Koch bewiesen den Vierfarbensatz *mit Hilfe des Computers*, und das war revolutionär (und schmeckt vielen Mathematikern bis heute nicht). Trotz mehrfacher Verbesserung der ursprünglichen Argumentation gibt es bislang keinen "klassischen" Beweis.

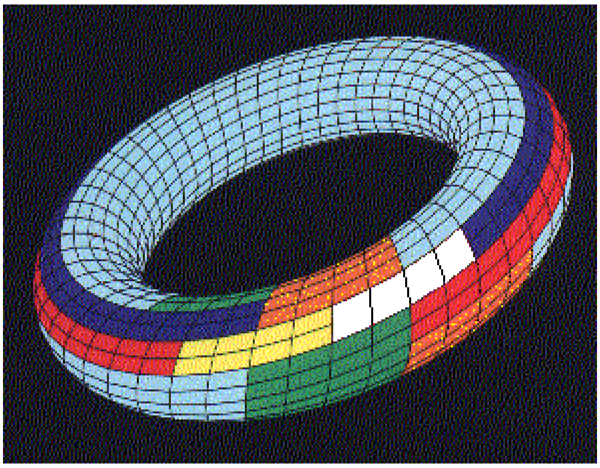
Hier ist eine 4-Färbung der deutschen Bundesländer, die zeigt, dass man mit drei Farben nicht auskommt (wegen Thüringen):



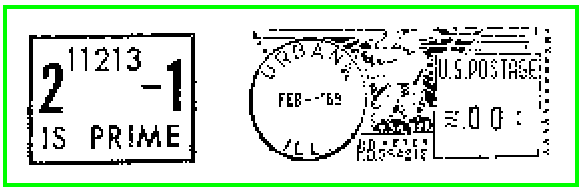
Man sollte sich klar machen, dass es keineswegs einfach ist, eine große Karte mit vier Farben einzufärben. Um dies einzusehen, können sich sportliche Leser dieser Seite z.B. an den französischen Departements versuchen:

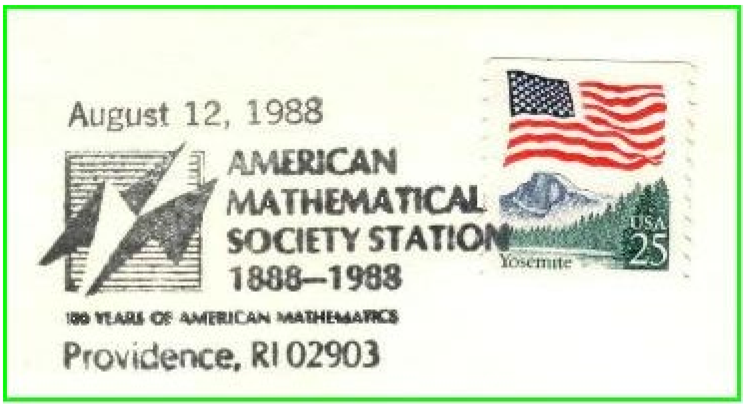
Der Vierfarbensatz gilt für alle Karten in der Ebene und auf dem Globus. Ein verblüffender Aspekt der Färbeprobleme ist, dass es analoge Sätze für das Möbiusband und den Torus gibt, die trotz der komplizierteren Form dieser Gebilde lange vorher bewiesen waren - und deren Beweise (vergleichsweise) mühelos anzugeben sind. Auf dem Möbiusband gilt der 6-Farben-Satz und auf dem Torus der 7-Farben-Satz. Die beiden folgenden Bilder zeigen, dass man tatsächlich nicht mit weniger Farben auskommt, da jeweils alle Farben gemeinsame Grenzen mit allen anderen haben:





Für Liebhaber der mathematischen Philatelie zeige ich noch einige andere Stempel. Der erste wurde mir freundlicherweise von meinem Kollegen Professor Dr. Ulrich Abel zur Verfügung gestellt.





[nächste Briefmarke] [Inhaltsverzeichnis]

Manfred Börgens - Briefmarke 16

Als E-Dokument veröffentlicht im Februar 2002.

17

René Descartes (Cartesius) (1596 - 1650)

Kartesisches Blatt

Albanien 1996

Scott 2516

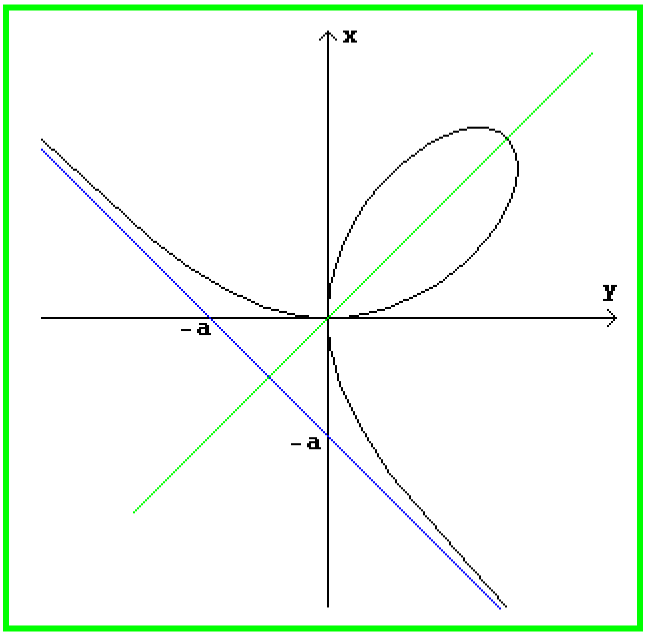
René Descartes war eine der bedeutendsten Persönlichkeiten der Wissenschaftsgeschichte und wurde berühmt als Mathematiker, Philosoph und Physiker. Descartes war Franzose, lebte aber in seiner zweiten Lebenshälfte überwiegend in den Niederlanden. Sein lateinischer Name Cartesius ist auf der Briefmarke falsch abgedruckt worden.

Descartes gilt als Wegbereiter der analytischen Geometrie; auf ihn geht das kartesische Koordinatensystem zurück.

Die Briefmarke zeigt auch das **Kartesische Blatt** (engl.: **Folium of Descartes**), eine algebraische Kurve 3. Ordnung. Auf der Marke sind die Gleichungen für die Kurve und die Asymptote teilweise verdeckt:

Kurve: $\mathbf{x^3 + y^3 = 3axy}$

Asymptote: $\mathbf{x + y + a = 0}$ (blaue Gerade in der folgenden Graphik)



Symmetrieachse des Kartesischen Blatts: **y = x** (grüne Gerade in der Graphik)

---

nächste Briefmarke Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im März 2002.

18

Evangelista Torricelli (1608 - 1647)

UdSSR 1959

Michel 2194
Scott 2165

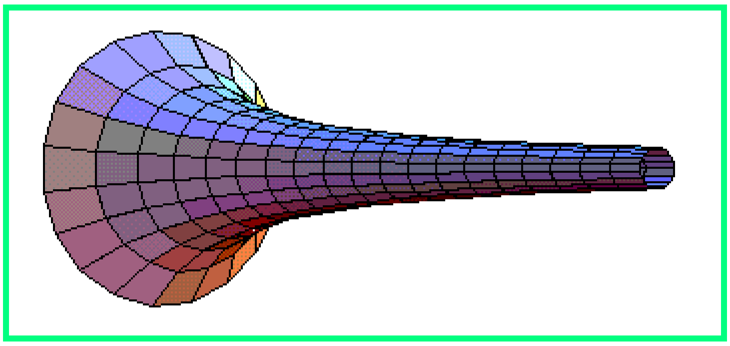
Das Porträt auf der Marke trägt als Unterschrift Torricellis Namen in Russisch; oberhalb des Kopfes steht "Hervorragender italienischer Physiker und Mathematiker".

Torricelli ist als bedeutender Physiker bekannt, dessen Erforschung des Luftdrucks zur Erfindung des Barometers führte, der grundlegende Arbeiten u.a. zur Hydraulik und zum Vakuum durchführte, und der als versierter Linsenschleifer beim Bau besserer Teleskope und Mikroskope eine wichtige Rolle spielte. Weniger bekannt ist, dass Torricelli einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit war, die er wissenschaftlich gemeinsam mit seinen Zeitgenossen Galilei, Descartes, Cavalieri, Fermat und Pascal prägte.

Die meisten Portraits aus dem 17. Jahrhundert zeigen ältere Männer. Torricelli ist hier als junger Mann abgebildet, denn er starb im Alter von 39 Jahren. Da war er seit fünf Jahren Nachfolger Galileo Galileis als Hofmathematiker des Großherzogs der Toskana. In dieser Zeit hat er sein Buch *Opera geometrica* veröffentlicht. Zuvor war er Galileis Schüler und Sekretär gewesen.

Zu Torricellis Zeit lag die Infinitesimalrechnung "in der Luft". Er war einer der Pioniere, die den Durchbruch vorbereitet haben, der Newton und Leibniz wenige Jahrzehnte später gelang.

Torricelli verblüffte die akademische Welt mit einer Berechnung, die man heute ein "uneigentliches Integral" nennt. Er zeigte, dass der Körper, der aus der Rotation der Hyperbel $y=1/x$ um die x-Achse für $x>1$ entsteht, endliches Volumen hat (und zwar Pi).



Aber dieser Rotationskörper ist unendlich lang und hat eine unendlich große Oberfläche. Das schien vielen Zeitgenossen Torricellis paradox und ließ sogar Zweifel an der Mathematik aufkommen.

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Briefmarke 18

Als E-Dokument veröffentlicht im April 2002.

19

Nautische Winkelmesser: Quadrant und Sextant

Portugal 1993 und **Färöer 1994**

Zur Bestimmung des Höhenwinkels der Sonne und anderer Himmelskörper auf See werden seit Jahrhunderten Geräte verwendet, die sowohl einfach als auch genial sind. Dieser Höhenwinkel gibt den Seefahrern die Möglichkeit, den Breitengrad ihrer Position zu berechnen (auf der Nordhalbkugel am einfachsten durch die Höhenmessung des Polarsterns).

Wie misst man also in der Seefahrt (geht natürlich auch an Land), wie hoch ein Gestirn über dem Horizont steht? Bild 1 zeigt eine schematische Zeichnung eines einfachen **Quadranten**. Dieser besteht aus einem rechten Winkel, an dessen Schenkeln man das Gerät festhalten kann, einer daran starr befestigten Skala von 0° bis 90° und einem Lot. Das Lot ist das einzige bewegliche Teil des Quadranten; es ist am Scheitel des rechten Winkels wie ein Pendel aufgehängt und zeigt deshalb immer in die Senkrechte. Bei einer Messung hält man das Gerät hoch über sich und peilt das Gestirn über den Schenkel mit der 90°-Markierung an. Der Betrachter sieht dann natürlich die Skala nicht, diese weist ja von ihm fort. Er könnte aber, sobald er das Gestirn fixiert hat, das Lot mit zwei Fingern an der Skala festhalten und dann den Winkel ablesen (oder ein zweiter Seemann steht seitlich und macht die Ablesung).

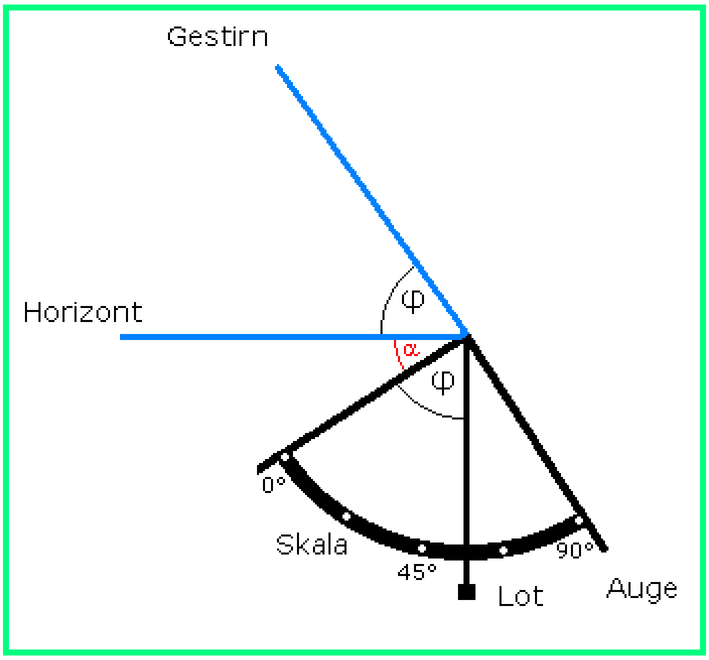


Bild 1 Quadrant

Die beiden eingezeichneten Winkel (*phi*) sind gleich, weil sie sich mit dem gleichen Winkel (*alpha*) zu einem rechten Winkel addieren. Der Quadrant hat seinen Namen, weil er ein Viertel eines Vollkreises auf seiner Skala darstellen kann. Mit ihm lassen sich also alle Höhenwinkel messen.

Diese einfachen Quadranten haben einen gravierenden Nachteil: Will man mit ihnen die Höhe der Sonne bestimmen, muss man in die Sonne hineinschauen. Der englische Seefahrer John Davis, der im 16. Jahrhundert die Polarregionen erforschte und nach dem die Davis-Straße zwischen Grönland und Nordkanada benannt ist, baute deshalb einen Quadranten, den man mit dem Rücken zur Sonne benutzte. Dieses schöne Winkelmessgerät ist oben auf der linken Briefmarke zu sehen und heißt **Davis-Quadrant** (auf Englisch auch "back-staff"). Bild 2 stellt ihn schematisch dar. Die dünn schwarz gezeichneten Teile sind Streben, die nur der Stabilisierung dienen. Die dicken schwarzen Teile sind die wesentlichen: Ein Stab mit zwei angesetzten Winkelskalen.

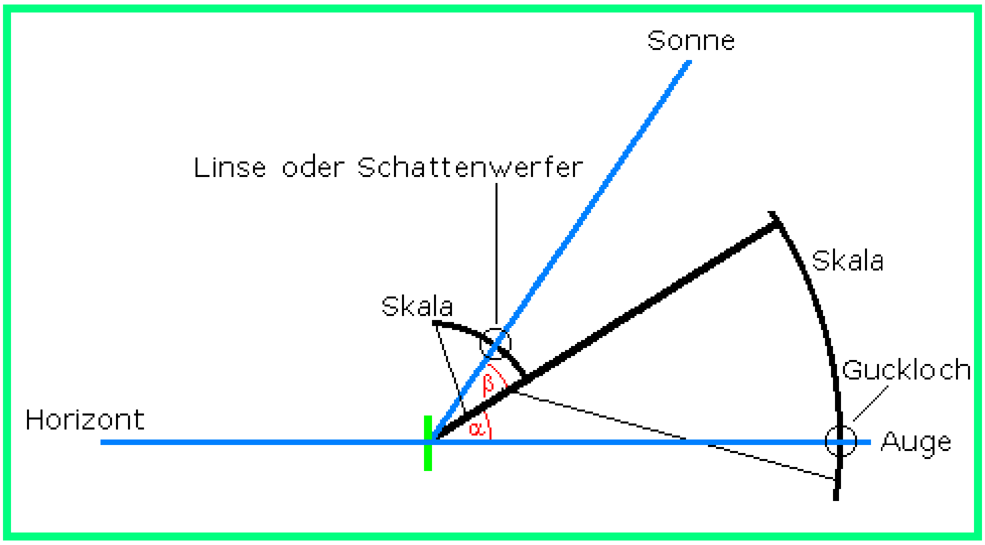


Bild 2 Davis-Quadrant

Der Davis-Quadrant ist schwieriger herzustellen als ein normaler Quadrant. Die einzigen beweglichen Teile sind der Schieber mit dem Guckloch und die Linse bzw. der Schattenwerfer (kleine Kreise in Bild 2); diese beiden Teile lassen sich auf den Skalen verschieben. Der Beobachter stellt sich mit dem Rücken zur Sonne. Er verschiebt die Linse oder den Schattenwerfer auf der kleinen Skala so, dass der Winkel *beta* grob geschätzt etwas geringer als die Sonnenhöhe ist (bei tatsächlich gefertigten Geräten trägt deshalb die kleine Skala auch nur volle Gradmarkierungen ohne Feinteilung). Dann peilt er den Horizont an. Dies ist mit hoher Präzision möglich, da am entfernten Ende des Quadranten eine kleine Platte mit einem Schlitz angebracht ist (in Bild 2 grün). Nun wird die große Skala durch den Schieber mit dem Guckloch so verschoben (der Horizont muss dabei im Blick bleiben), dass das Sonnenlicht oder der

Schatten auf die Schlitzplatte fällt. Die Linse wird nur bei schwachem Sonnenlicht benutzt, z.B. bei diesigem Wetter; bei klarem Sonnenschein wird der Schattenwerfer aufgesetzt, und statt eines Lichtpunktes erscheint ein schmaler Schatten auf der Schlitzplatte. Das Gerät ist so gebaut, dass der Beobachter dann gleichzeitig den Horizont durch den Schlitz und gleich neben dem Schlitz den Lichtpunkt bzw. den Schatten sieht. Auf der großen Skala liest man nun den Winkel *alpha* ab. Der Höhenwinkel der Sonne beträgt dann *alpha* + *beta*.

Der Davis-Quadrant und seine Funktionsweise sind auf der portugiesischen Briefmarke sehr gut dargestellt. Wie man dort sieht, heißt das Gerät auf portugiesisch "Quadrante de dois arcos", also "Quadrant mit zwei Bögen".

Eine weitere Verbesserung brachte der **Spiegelsextant**, der schon von Isaac Newton um 1700 konzipiert worden war und unabhängig von diesem durch den Amerikaner Thomas Godfrey 1730 gebaut wurde. Die rechte Briefmarke oben zeigt einen Spiegelsextanten. Jedem, der einmal einen Sextanten in der Hand gehalten hat, fällt auf, dass der Öffnungswinkel der äußeren Schenkel hier nur 60° beträgt, aber die Skalenmarkierungen auf dem unteren Bogen von 0° bis 120° reichen. Dahinter steckt ein allgemeines Spiegelprinzip, das vorab erklärt werden soll. In Bild 3 ist S ein Spiegel, in dem ein Betrachter das Objekt A sieht, und zwar im Bildpunkt B. Rückt das Objekt A um den Winkel *phi* weg (nach A'), sieht der Betrachter es nicht mehr an der Stelle B (denn Einfallswinkel = Ausfallswinkel). Um welchen Winkel *alpha* muss der Spiegel um den Punkt B gedreht werden, damit der Beobachter A' in B sieht? Die Antwort ist: *alpha* = *phi* / 2 . Dies ist aus Bild 3 leicht zu erkennen: Der gedrehte Spiegel S' (in Grün) muss so stehen, dass wieder Einfallswinkel = Ausfallswinkel (in Bild 3 mit *gamma* bezeichnet) gilt. Nun lässt sich der ursprüngliche Einfallswinkel (für S und A) schreiben als *phi* + *gamma* - *alpha* und der ursprüngliche Ausfallswinkel als *gamma* + *alpha*. Da beide gleich sein müssen, erhält man *alpha* = *phi* / 2.

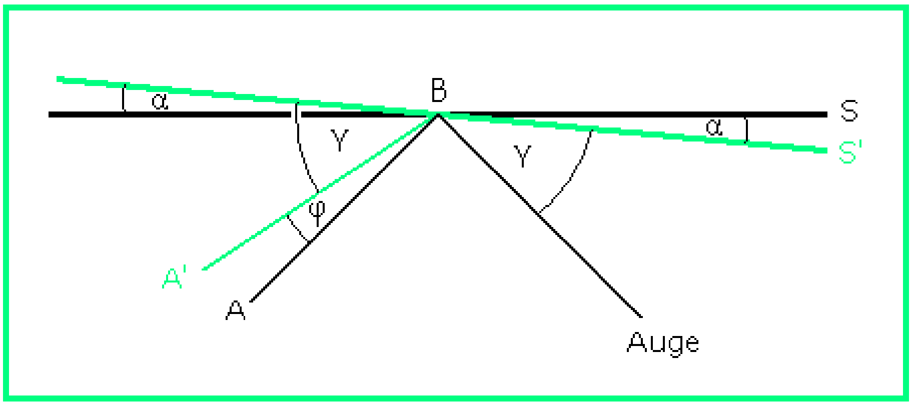
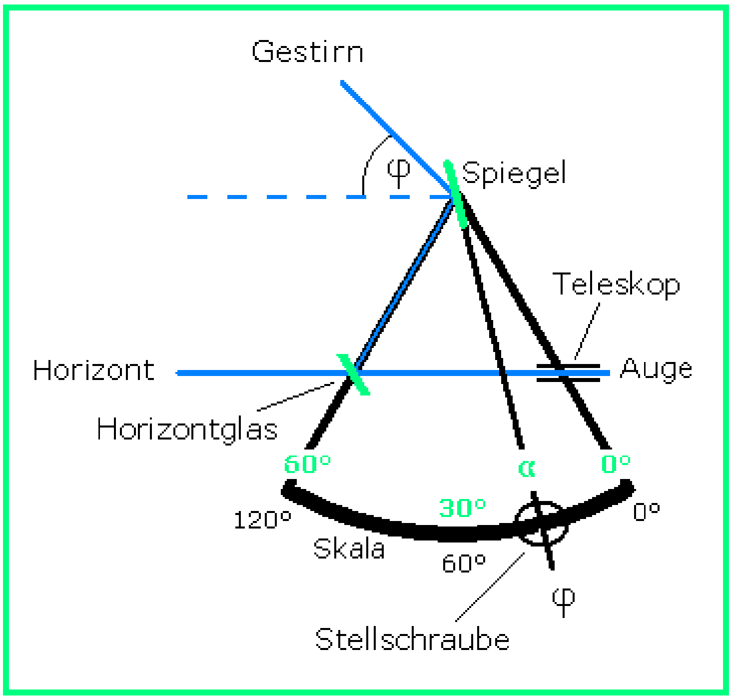


Bild 3 Prinzip des Drehspiegels

Dieses Prinzip wird im Sextanten ausgenutzt, um den Winkelbereich zu verdoppeln. In Bild 4 sieht man links den vereinfachten, schematischen Aufbau des Gerätes. Der Öffnungswinkel der äußeren Schenkel beträgt 60°, das Teleskop ist fest an einem Schenkel im Winkel von 60° angebracht. Am anderen Schenkel sitzt auf gleicher Höhe das Horizontglas im Winkel von 60°. Dieses Glas ist zur Hälfte transparent, zur anderen Hälfte ein Spiegel. Durch das Teleskop sieht man beide Hälften. Am Scheitel des Gerätes sitzt ein drehbarer Spiegel, verlängert durch einen Schwenkarm, der entlang der bogenförmigen Skala am unteren Ende des Sextanten geführt wird (Feineinstellung mit Mikrometerschraube). Der Beobachter peilt nun durch das Teleskop und den transparenten Teil des Horizontglases den Horizont an. Dann wird der Spiegel so gedreht, dass das zu beobachtende Gestirn im Spiegelteil des Horizontglases genau neben dem Horizont steht. Der Winkel *phi* lässt sich dann an der Skala ablesen (schwarze Markierungen in Bild 4). Der tatsächliche Winkel zwischen dem Spiegel und dem 0°-Schenkel ist aber nur *alpha* = *phi* / 2 (grüne Markierungen). Hier findet man also das oben erläuterte Drehspiegelprinzip wieder. Im rechten Teil von Bild 4 sind alle relevanten Winkel eingezeichnet. Es gilt Einfallswinkel = Ausfallswinkel = *gamma* = 60° - *alpha*. Also ist 180° = *gamma* + *phi* + 60° + *gamma* = 2·(60° - *alpha*) + *phi* + 60°; wieder ergibt sich *alpha* = *phi* / 2.



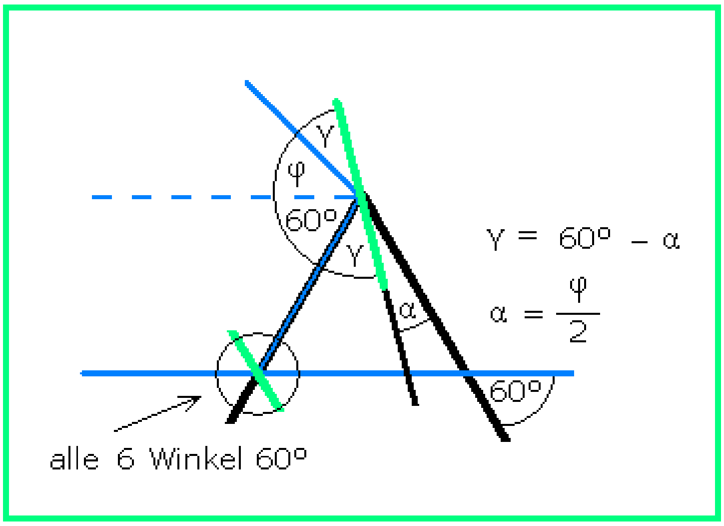


Bild 4 Spiegelsextant

Bei hohen Anforderungen an die Präzision der Messung wendet der Seemann Korrekturformeln an, da das dargestellte mathematische Prinzip u.a. nicht die Augenhöhe des Beobachters über dem Wasser oder die Ablenkung des Lichts durch die Luftschichten berücksichtigt.

Ich danke Herrn Nicolàs de Hilster für seine Hilfe bei den Funktionsbeschreibungen der Navigationsgeräte.

---

nächste Briefmarke Inhaltsverzeichnis

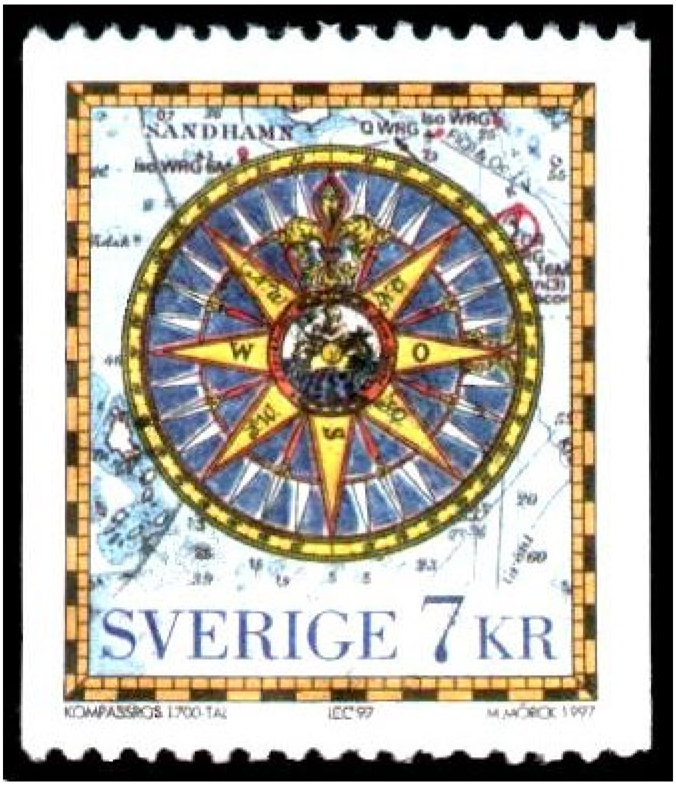
Manfred Börgens - Briefmarke 19

Als E-Dokument veröffentlicht im Mai 2002.

20

Windrose

Der "Strich" als mathematische Einheit



Schweden 1997

Diese Briefmarke wurde herausgegeben anlässlich ICC 97 (18th International Cartographic Conference, Stockholm 1997) und zeigt eine Kompassrose und im Hintergrund eine Seekarte.

Der "Strich" als mathematische Einheit

Der Strich ist ein Winkelmaß und in der Seefahrt weit verbreitet.

"Wie liegt sie, Kapitän?"
"Nordwest zu West."
"Halten Sie sie Westnordwest."
Kapitän Davenport drehte das Rad und richtete es.
"West zu Nord, Kapitän."
"West zu Nord ist es."
"Und jetzt West."
Langsam, Strich für Strich beschrieb die 'Pyrenees', in die Lagune kommend, den Kreis, der sie vor den Wind setzte, und Strich für Strich, mit einer Ruhe und Sicherheit, als habe er noch tausend Jahre Zeit, rief McCoy den wechselnden Kurs aus.
"Noch einen Strich, Kapitän."

(Jack London: "Feuer auf See")

Ein Strich ist 1/32 eines Vollkreises von 360°, also gleich 11°15'. Man erhält die 32-Teilung des Kreises mit der "Windrose" wie auf der Briefmarke.

Die englische Bezeichnung der Einheit "Strich" ist "point". Die vier Haupthimmelsrichtungen heißen "cardinal points", dazwischen liegen die vier "half-cardinal points" wie NW, SW usw. Die acht Himmelsrichtungen NNW, WNW, WSW usw. heißen "three-letter points". Die restlichen 16 Himmelsrichtungen heißen "by-points". Die deutschen und englischen Bezeichnungen aller 32 Kompasspunkte, jeweils durch einen Strich unterschieden, sind in der folgenden Tabelle im Uhrzeigersinn aufgeführt:

0°	**N**	***N***
11°15'	N zu O	*N by E*
22°30'	NNO	*NNE*
33°45'	NO zu N	*NE by N*
45°	**NO**	***NE***
56°15'	NO zu O	*NE by E*
67°30'	ONO	*ENE*
78°45'	O zu N	*E by N*
90°	**O**	***E***
101°15'	O zu S	*E by S*
112°30'	OSO	*ESE*
123°45'	SO zu O	*SE by E*
135°	**SO**	***SE***
146°15'	SO zu O	*SE by E*
157°30'	SSO	*SSE*
168°45'	S zu O	*S by E*
180°	**S**	***S***
191°15'	S zu W	*S by W*
202°30'	SSW	*SSW*
213°45'	SW zu S	*SW by S*
225°	**SW**	***SW***
236°15'	SW zu W	*SW by W*
247°30'	WSW	*WSW*
258°45'	W zu S	*W by S*
270°	**W**	***W***
281°15'	W zu N	*W by N*
292°30'	WNW	*WNW*
303°45'	NW zu W	*NW by W*
315°	**NW**	***NW***
326°15'	NW zu N	*NW by N*
337°30'	NNW	*NNW*
348°45'	N zu W	*N by W*

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Briefmarke 20

Als E-Dokument veröffentlicht im Juni 2002.

Pythagoras (ca. 569 - ca. 475 v. Chr.)

(die Angaben zu den Lebensdaten schwanken um bis zu 40 Jahre)

Satz von Pythagoras

San Marino 1983
und **Griechenland 1955**

Michel 1275 und 633
Scott 1045 und 583

Pythagoras von Samos ist am besten bekannt durch den nach ihm benannten Satz über das rechtwinklige Dreieck, aber dieser ist nicht von ihm gefunden worden.

Pythagoras wurde auf der griechischen Insel Samos geboren. Thales und Anaximander waren seine Lehrer. Er bereiste viele ferne Länder und studierte Mathematik in Ägypten und in Babylon, wo er in Kriegsgefangenschaft gehalten wurde.

Pythagoras war Philosoph. Die antike Philosophie war die alles umfassende Einheitswissenschaft mit der Mathematik als ein Bestandteil. Für Pythagoras war aber die Mathematik eine Grundlage der Philosophie, denn für ihn galt: "Die Wirklichkeit ist von Natur aus mathematisch."

Pythagoras ließ sich in Süditalien nieder und lebte dort in seinen letzten Lebensjahrzehnten (verlässliche Daten sind auch hier nicht bekannt). Er gründete einen Geheimbund, die Pythagoreer, der asketisch lebte und sich ganz der Philosophie widmete. Obwohl es die Pythagoreer verschmähten, ihre Erkenntnisse und Auffassungen zu veröffentlichen, wurden ihnen von späteren Autoren und modernen Historikern eine Reihe von mathematischen Sätzen zugeschrieben, z.B.:

Die Winkelsumme im n-Eck beträgt $(n-2)\cdot 180°$.

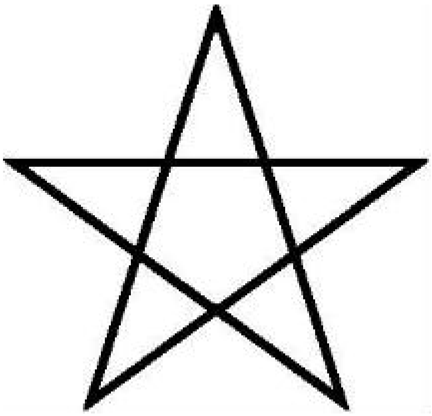
n^2 ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen.

Es gibt einfache Verhältnisse in der Geometrie, die sich nicht als Bruch ausdrücken lassen ("inkommensurable Zahlen"), z.B. Seite zu Diagonale im Quadrat.

Die Pythagoreer nannten sich auch "Mathematikoi" und sahen in ihrem Ausbildungsplan für die Schüler die "**vier**

Mathemata" vor: **Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie** (Musik gehörte dazu, da in der Antike die mathematischen Prinzipien der Harmonielehre entdeckt wurden).

Das Pentagramm ("Drudenfuß") war das Ordenszeichen der Pythagoreer. Es entsteht aus einem gleichseitigen Fünfeck durch Verlängerung der Seiten; auch die Diagonalen im gleichseitigen Fünfeck bilden ein Pentagramm. Die Seiten teilen sich nach dem Goldenen Schnitt.



Pentagramm

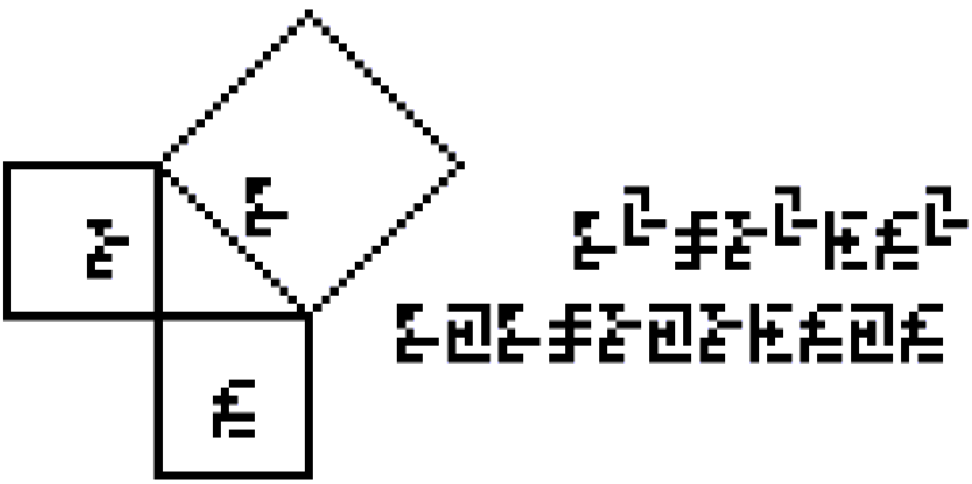
Es spricht einiges dafür, dass Pythagoras und seine Schüler den **"Satz des Pythagoras"** *bewiesen* haben, aber bekannt war dieser schon 1000 Jahre vorher. Es ist gut möglich, dass Pythagoras ihn in Babylon kennengelernt hat:

Im rechtwinkligen Dreieck gilt für die Kathetenlängen a , b und für die Hypothenusenlänge c :

$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ **.**

In der Antike war der Satz vorwiegend in seiner rein geometrischen Version bekannt, d.h. es wurden nicht die Zahlenquadrate als arithmetische Größen betrachtet, sondern man errichtete geometrisch über den Dreiecksseiten Quadrate und untersuchte deren Flächen. So geht man auch bis heute in der Schule vor. Eine schöne Darstellung des Satzes gibt die rechte Briefmarke für a=3, b=4, c=5. Auch auf der linken Marke sieht man die geometrische Version.

Der Satz des Pythagoras wurde im Zuge der Suche nach außerirdischer Intelligenz am 24.5.1999 ins All gefunkt. Die kanadischen Astronomen Dutil und Dumas fokussierten an diesem Tag eine 23-seitige Botschaft in (hoffentlich) kulturunabhängiger Codierung auf Nachbarsterne unserer Galaxis, die als mögliche "Sonnen" von Planetensystemen in Frage kommen. Die Botschaft wurde vom Observatorium in Evpatoriya (Ukraine) ausgesandt; hier ist ein Ausschnitt davon:



(Hoffentlich schließen die Aliens nicht daraus, dass wir den Satz des Pythagoras nur für gleichschenklige Dreiecke kennen.)

---

nächste Briefmarke Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Briefmarke 21

Als E-Dokument veröffentlicht im Juli 2002.

Rechenmaschine von Johann Christoph Schuster (1759 - 1823)

Deutschland 2002

Johann Christoph Schuster baute diese Rechenmaschine in den Jahren 1820 bis 1822. Das charakteristische "Kaffeemühlen"-Design geht auf Schusters Lehrherrn Philipp Matthäus Hahn (1739 - 1790) zurück. Schuster war selbstständiger Uhrmacher, bis er 1797 Mechanicus und Hofuhrmacher in Ansbach wurde. Schuster baute drei Typen von Rechenmaschinen, von denen der letzte und leistungsfähigste auf der Briefmarke abgebildet ist.

Mit dieser Maschine kann man die vier Grundrechenarten ausführen. Die Maschine besteht aus 1025 handgefertigten Einzelteilen (u.a. Zahnrädern, Hebeln, Klinken, Federn). Für ein funktionsfähiges Exemplar wurden vor einigen Jahren beim Londoner Auktionshaus Christie's 9 Millionen Euro geboten.

Die auf der Briefmarke abgebildete Maschine ist erst 1993 aufgetaucht und befand sich früher in Indien. Heute steht sie im Arithmeum in Bonn, einem Museum von Weltgeltung, das dem Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik der Universität Bonn angeschlossen ist und das die Geschichte des Rechnens in faszinierender Weise dokumentiert. Hier werden frühe Rechenhilfen und Rechenmaschinen bis hin zu Mikroprozessoren ausgestellt und erläutert.

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im September 2002.

23

Bertrand Russell (1872 - 1970)

Indien 1972

Michel 545
Scott 561

Bertrand Russell lebte fast 100 Jahre lang. Als Kind saß er auf dem Schoß der Königin Victoria und hörte seinen Großvater, den britischen Premierminister, von dessen Begegnung mit Napoleon erzählen. Gegen Ende seines Lebens wurde er noch Zeuge der ersten Mondlandung.

Russell studierte Mathematik am Trinity College (Briefmarke 8) in Cambridge und wurde einer der bedeutendsten Logiker der Wissenschaftsgeschichte. Nach dem Erscheinen der *Principia Mathematica* (1910 - 1913, mit Alfred North Whitehead) wandte sich Russell zunehmend der Philosophie und der Politik zu. Seine pazifistische Haltung brachte ihn während des 1. Weltkriegs ins Gefängnis und um seine Anstellung in Trinity; seine Auffassungen zu Religion und Moral verhinderten während des 2. Weltkriegs eine Tätigkeit an amerikanischen Hochschulen. Ab 1944 war Russell erneut Mitglied von Trinity.

Bertrand Russell erhielt 1950 den Nobelpreis für Literatur in Anerkennung seiner stilistisch und inhaltlich exzellenten Schriften zur Verbreitung humanitärer Ideale und der Gedankenfreiheit. Russell trat später an der Seite von Einstein und Sartre für weltweite Abrüstung ein und warnte in zahllosen Reden und Artikeln vor den Gefahren eines nuklearen Krieges.

Zurück zur Mathematik:

Russells Name ist Mathematikern und Philosophen bekannt durch die "**Russell'sche Antinomie**". Eine Antinomie stellt einen paradoxen, logisch nicht auflösbaren Sachverhalt dar. Am Anfang des 20. Jahrhunderts hatten die Mathematiker die Mengenlehre Georg Cantors als wichtiges Hilfsmittel und als eine Grundlage von Mathematik und Logik schätzen gelernt. Man ging davon aus, dass eine Menge durch eine eindeutige charakterisierende Eigenschaft ihrer Elemente bestimmt ist. Damit ist es auch möglich, Mengen zu bilden, deren Elemente wieder Mengen sind. Besondere Beachtung fand nun der Fall, dass eine solche Menge Element ihrer selbst ist. Das hört sich paradox an, ist aber leicht an einem Beispiel zu erklären: Es gibt sicherlich viele verschiedene Mengen, die mehr als drei Elemente haben. Bildet man nun die Menge S, die alle diese Mengen als Elemente enthält, so enthält sich S auch selbst als Element. 1901 verstörte Bertrand Russell die mathematische Welt (und sich selbst) nachhaltig durch die Formulierung einer Antinomie der Mengenlehre, die die freizügige Bildung solcher Mengen in Frage stellte:

Die Russell'sche Antinomie

Ist A die Menge, die genau diejenigen Mengen als Elemente enthält, die sich nicht selbst als Element enthalten, so stellt sich die Frage, ob sich A selbst als Element enthält.

A ist scheinbar ganz unverdächtig, irgendwelche Schwierigkeiten zu machen. Elemente von A sind fast alle Mengen, die einem spontan einfallen, z.B. die Menge der natürlichen Zahlen, alle einelementigen Mengen, die Menge der aktuellen EU-Staaten usw. Jedoch enthält A beispielsweise nicht die Menge S als Element.

Enthält nun A sich selbst als Element? Falls ja, darf sie nach ihrer obigen Definition sich nicht als Element enthalten, und das ist ein Widerspruch. Falls nein, enthält sie sich nach dieser Definition selbst als Element, und das ist auch ein Widerspruch.

Russell hat also eine Menge gefunden, die nach der Cantor'schen Mengenlehre einwandfrei definiert ist, aber einen unauflösbaren Widerspruch in sich trägt.

Die Russell'sche Antinomie hatte weitreichende Konsequenzen für die Grundlagen der Mathematik. Über Jahrzehnte hinweg beschäftigten sich Mathematiker (auch Russell selbst) mit anderen Möglichkeiten, die Mengenlehre neu zu begründen. Heute bedient man sich der "axiomatischen" Mengenlehre, in der (wie in anderen mathematischen Disziplinen auch) auf eine Definition der Grundbegriffe verzichtet wird zugunsten von "Axiomen", d.h. Festlegungen grundlegender Beziehungen zwischen Mengen und Elementen. Aber es ist nie der Nachweis gelungen, dass in dieser modernen Mengenlehre ein Widerspruch nicht auftreten kann.

---

nächste Briefmarke   Inhaltsverzeichnis

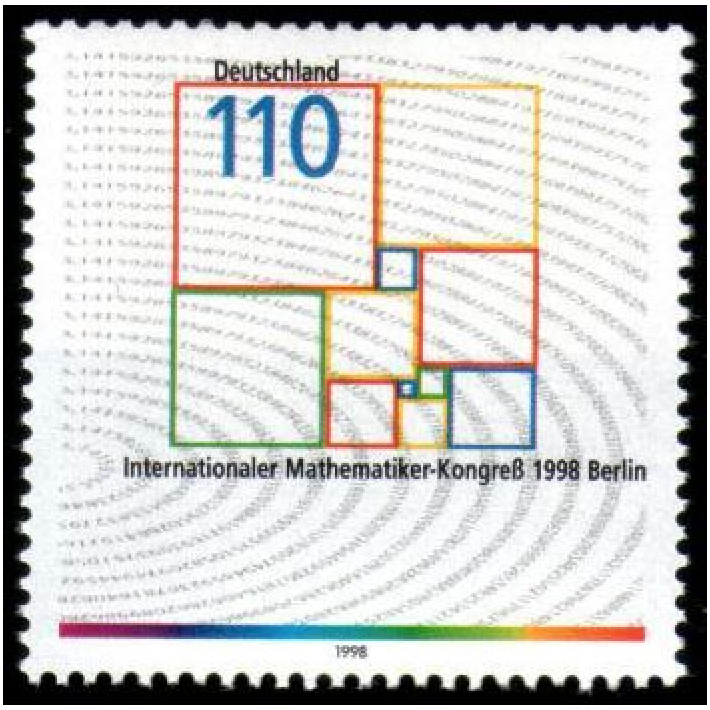
Als E-Dokument veröffentlicht im Oktober 2002.

24

Internationaler Mathematiker-Kongress 1998 in Berlin

Quadratische Pflasterung, Vierfarbensatz

π



Deutschland 1998

Michel 2005
Scott 2010

Mit der links abgebildeten Briefmarke würdigte 1998 die Deutsche Bundespost den ersten Internationalen Mathematiker-Kongress in Deutschland seit 94 Jahren (1904 fand er in Heidelberg statt). Rechts sieht man einen der vielen unberücksichtigten Entwürfe für diese Marke.

Der Graphiker hat auf der Briefmarke drei mathematische Inhalte untergebracht:

Aufteilung eines Rechtecks in verschiedene Quadrate

Wer noch nie davon gehört hat, mag das erstaunlich finden: Es ist tatsächlich ziemlich schwer, ein Rechteck anzugeben, das sich mit verschieden großen Quadraten "pflastern" lässt. Anders herum ausgedrückt lautet die Aufgabe: Endlich viele und paarweise unterschiedlich große Quadrate sollen zu einem Rechteck zusammengelegt werden. Erst 1925 ist das zum ersten Mal gelungen! Ein Beispiel für eine solche Pflasterung zeigt die Briefmarke. Das Rechteck ist hier fast quadratisch, es hat die Breite 177 und die Höhe 176; die Längeneinheit ist dabei $^1/_9$ des kleinsten Quadrates (im Inneren, blau). Dieses Rechteck ist mit 11 Quadraten gepflastert; sie haben die Seitenlängen:

9 (blau)
16 (grün)
21 (blau)
25 (gelb)
34 (rot)
41 (blau)
43 (gelb)
57 (rot)
77 (grün)
78 (gelb)
99 (rot)

Vierfarbensatz

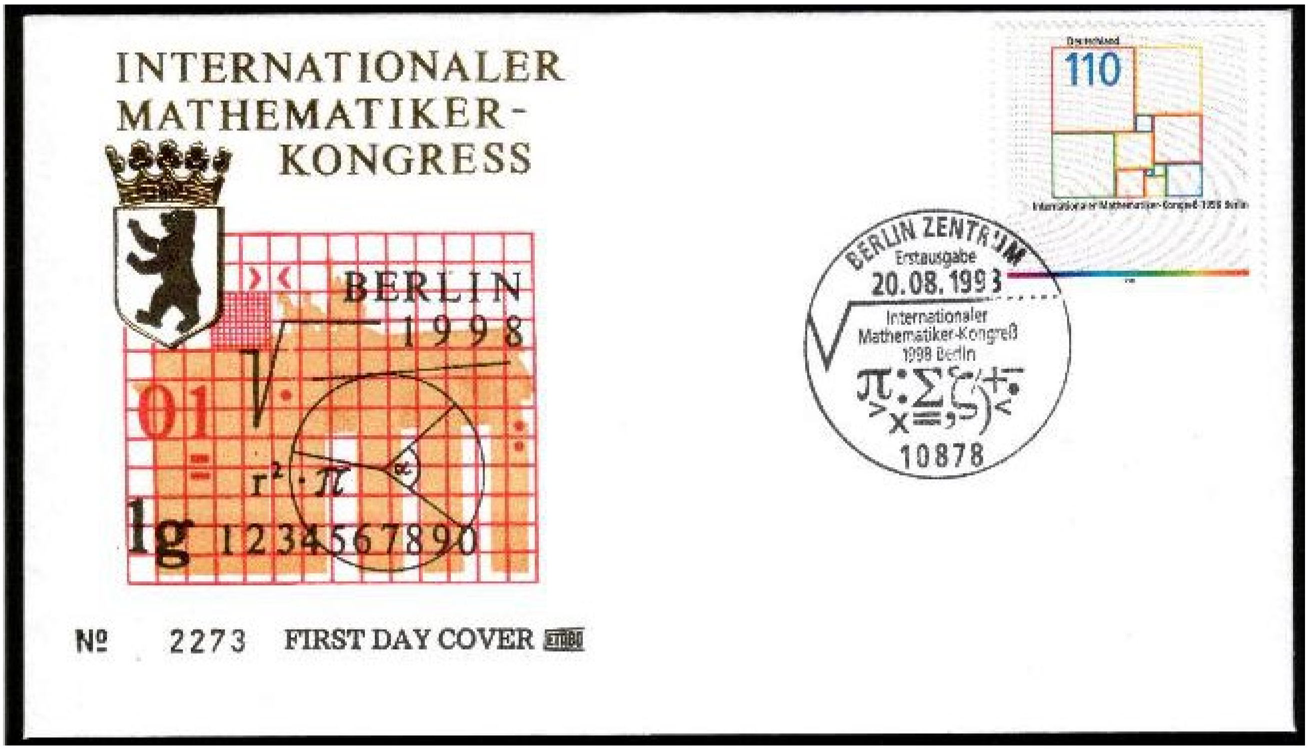
Die 11 Quadrate bilden eine "Landkarte", also lässt sich auf sie der Vierfarbensatz anwenden, der auch das Thema der Briefmarke 16 war. Dieser Satz besagt, dass sich die Länder jeder Landkarte in einem Atlas oder auf einem Globus immer mit maximal vier Farben so färben lassen, dass Länder mit gemeinsamer Grenzlinie verschiedene Farben haben. Bei den quadratischen "Ländern" auf der Briefmarke wäre man mit drei Farben nicht ausgekommen; dies erkennt man z.B. an dem kleinen grünen Quadrat, weil es von einer ungeraden Anzahl von Nachbarn umgeben ist.

Kreiszahl Pi

Der Markenhintergrund deutet ein großes Auditorium an, dessen Sitzreihen in Kreisbögen angeordnet sind. Bei genauem Hinschauen erkennt man, dass diese Reihen aus den Dezimalstellen der Kreiszahl Pi gebildet sind, von innen nach außen in immer größerer Präzision. Auf dem Ausschnitt sieht man die Dezimalziffern vergrößert:

Bei der Eröffnungsveranstaltung des Weltkongresses wurde die Briefmarke offiziell vorgestellt. Dabei wurde darauf hingewiesen, dass auch der Nennwert der Marke (110 Pf.) eine mathematische Besonderheit darstellt, denn **110 lässt sich auf drei verschiedene Weisen als Summe dreier verschiedener Quadrate darstellen** ($110 = 1^2+3^2+10^2 = 2^2+5^2+9^2 = 5^2+6^2+7^2$) und ist damit die zweitkleinste Zahl mit dieser Eigenschaft (nach 101).

Auch der Ersttagsbrief enthält eine Reihe mathematischer Symbole und Objekte:



Der nächste mathematische Weltkongress findet 2006 in Madrid statt.

---

nächste Briefmarke Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Briefmarke 24

Als E-Dokument veröffentlicht im November 2002.

25

Janos Bolyai (1802 - 1860)

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 - 1856)

Rumänien 1960 und **UdSSR 1956**

Michel 1895 und 1830
Scott 1345 und 1822

Bolyai und Lobatschewski gelten als die Begründer der nichteuklidischen Geometrie. Beide Marken wurden jeweils zum 100. Todestag herausgegeben.

Der Ungar Bolyai wurde am 15.12.1802 in Kolozsvar (heute Cluj in Rumänien) geboren, der Russe Lobatschewski am 1.12.1792 in Nishni Nowgorod (am 20.11. nach dem damals in Russland noch gültigen julianischen Kalender).

Die ebene euklidische Geometrie ist eine der fundamentalen mathematischen Disziplinen, Grundlage für Schulgeometrie und technisches Zeichnen, unentbehrlich für die Darstellung von physikalischen und ingenieurwissenschaftlichen Sachverhalten. Euklid gab der Geometrie eine (für seine Zeit) strenge wissenschaftliche Basis, indem er Definitionen, Axiome und Postulate an ihren Anfang stellte.

Die fünf euklidischen Postulate sind für die Entwicklung der Geometrie von besonderer Bedeutung; sie lauten:

1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.

2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.

3. Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.

4. Ferner, dass alle rechten Winkel einander gleich seien.

5. Endlich, wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Das fünfte Postulat ist das berühmte **Parallelenpostulat** (häufig auch Parallelenaxiom genannt), denn es lässt sich zeigen, dass es äquivalent mit der folgenden Formulierung ist:

5'. Zu jeder Geraden verläuft durch jeden Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, höchstens eine Parallele.

In 5'. bedeutet "Parallele" eine Gerade, die die vorgegebene Gerade nicht schneidet. Zusammen mit den anderen Postulaten, Definitionen und Axiomen Euklids folgt dann aus 5. bzw. 5'.:

In der ebenen euklidischen Geometrie gilt: **Zu jeder Geraden verläuft durch jeden Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, genau eine Parallele.**

Über 2000 Jahre lang hat man versucht zu beweisen, dass das Parallelenpostulat aus den anderen Postulaten folgt, also als Postulat auch weggelassen werden könnte. Alle diese Beweisversuche schlugen fehl, aber erst Bolyai und Lobatschewski führten (unabhängig voneinander) Geometrien ein, in denen das euklidische Parallelenpostulat nicht gilt, sondern durch eine andere Aussage ersetzt wird. Heute kennt man eine Reihe von Modellen für solche nichteuklidischen Geometrien, die eine sinnvolle Interpretation innerhalb der Welt unserer Anschauung ermöglichen. Bolyai und Lobatschewski leiteten alle wichtigen geometrischen Eigenschaften her, wenn zu einer vorgegebenen Geraden **mehr als eine Parallele** durch einen Punkt außerhalb der Geraden verläuft. Zwei besonders wichtige dieser Eigenschaften sollen hier angegeben werden, weil sie den Kontrast zur euklidischen Geometrie deutlich machen:

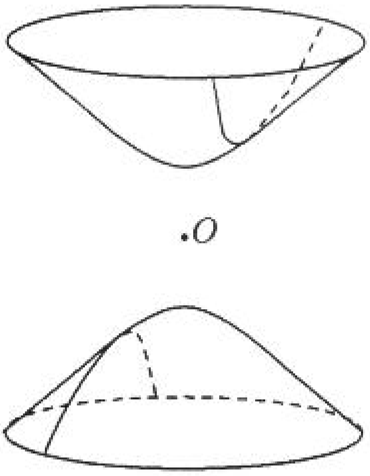
Die Winkelsumme im Dreieck beträgt weniger als 180°.

Allein aus der Größe der Winkel im Dreieck ergibt sich dessen Flächeninhalt (es gibt also keine ähnlichen Dreiecke verschiedener Größe).

Diese beiden Eigenschaften haben eine Entsprechung in der Kugelgeometrie: Dort beträgt die Winkelsumme im Dreieck mehr als 180°; die zweite Eigenschaft gilt unverändert.

Auch Carl Friedrich Gauß hat Grundzüge der nichteuklidischen Geometrie entwickelt, aber diese nicht veröffentlicht. Er sah voraus, dass die Zeit für eine Anerkennung dieser Ideen nicht reif war. Wie recht er hatte, wird durch die Erfahrungen Bolyais und Lobatschewskis bestätigt. Beide fanden zu ihren Lebzeiten keine nennenswerte Resonanz für ihre neue Geometrie. Da die euklidische Geometrie im Alltag und in der wissenschaftlichen Praxis außerordentlich erfolgreich war, wurde vor allem bezweifelt, dass es eine reale Entsprechung einer nichteuklidischen Geometrie geben könne. Insbesondere glaubte man allgemein, dass unser Universum ein dreidimensionaler euklidischer Raum sei. Der Wert der nichteuklidischen Geometrie für die Physik wurde erst mit der Entwicklung der Relativitätstheorie erkannt. - Während Lobatschewski den Spott seiner Zeitgenossen gelassen ertragen konnte, da er ein ansonsten renommierter Mathematiker in höchsten akademischen Ämtern war, litt Bolyai sehr unter mangelnder Anerkennung, dies war möglicherweise der Grund für seine psychische Erkrankung.

Eine Veranschaulichung der Bolyai-Lobatschewski-Geometrie kann u.a. auf der Oberfläche eines Rotationshyperboloiden gegeben werden. Dieser entsteht, indem man beide Äste einer Hyperbel (z.B. $x^2 - y^2 = 1$) um die x-Achse rotieren lässt und so eine Fläche im dreidimensionalen Raum erhält. In der Skizze sieht man diese Fläche mit O als Koordinatenursprung und der x-Achse als der Senkrechten. Die "Geraden" auf dieser Fläche sind die Schnittlinien der Ebenen durch O mit der Fläche. Eine solche Gerade sieht man auch in der Skizze. Es lässt sich nachweisen, dass in diesem Modell alle Sätze der euklidischen Geometrie gelten, mit Ausnahme derjenigen, die vom Parallelenpostulat abhängen, denn auf dem Rotationshyperboloiden hat eine Gerade viele Parallelen durch einen Punkt außerhalb der Geraden.



Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Briefmarke 25

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2002.

1

Davids Wiese und Pauls Wiese

David H. und Paul E. besitzen benachbarte Wiesen. Beide Wiesen sind Vierecke, deren Grenzen exakt in Nord-Süd- bzw. West-Ost-Richtung verlaufen. Davids Wiese ist an der Nord- und Südgrenze jeweils 900 m lang, die West- und die Ostgrenze sind jeweils 500 m lang. Bei Paul ist es umgekehrt: 500 m Grenzlänge im Norden und Süden, 900 m im Westen und Osten. Jetzt das Problem:

a) Wer besitzt die größere Wiese?
b) Wann geht auf den Wiesen morgens die Sonne auf?

Lösung

In Deutschland können solche Wiesen jedenfalls nicht liegen! Hierzulande liegen nämlich die Meridiane (Längengradlinien, also auch die West- und Ostgrenzen der Wiesen) im Süden weiter auseinander als im Norden, somit müssten die Nordgrenzen kürzer als die Südgrenzen sein. Auf der Südhalbkugel wäre es umgekehrt. Was folgt daraus? Ganz klar: Die Wiesen liegen am Äquator, und zwar symmetrisch zu ihm, also jeweils die Hälfte jeder Wiese nördlich und die Hälfte südlich.

Nun verhilft einem schon die Intuition zur Lösung: Pauls Wiese ist am Äquator (also in der Mitte) mehr als 5/9 so breit wie Davids Wiese (wegen der größeren "Ausbauchung" der längeren Ost- und Westgrenzen, siehe Bild 1), während die Nord-Süd-Ausdehnung von Davids Wiese exakt 5/9 derjenigen von Paul beträgt. Also ist Pauls Wiese größer.

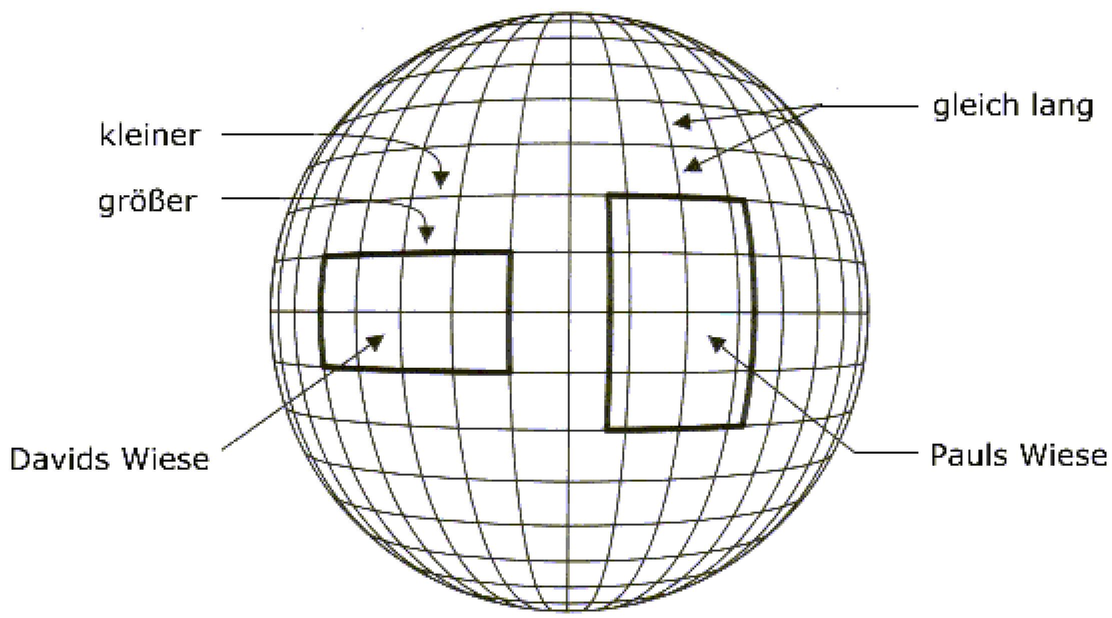


Bild 1

Für die exakte, quantitative Lösung soll nun der Flächeninhalt der beiden Wiesen berechnet werden. Jede Wiese ist ein Ausschnitt aus der Mantelfläche einer Kugelschicht. Eine Kugelschicht ist eine "Scheibe", die zwischen zwei Breitengradlinien liegt. Für deren Mantelfläche geben die gängigen Formelsammlungen an:

$$M = 2\pi hr$$

Dabei ist r der Kugelradius und h die Dicke der Scheibe, d.h. der Abstand der begrenzenden Kreisflächen gemessen an der Polachse.

Einschub: In der Formel für M spielt es offenbar keine Rolle, an welcher Stelle der Kugel man die Scheibe ausschneidet. Zu den Polen hin werden zwar die Scheiben kleiner im Umfang, aber die Mantelfläche ist flacher und somit breiter. Dies ist das **"Brotkrustentheorem" des Archimedes**: *Schneidet man ein kugelrundes Brot in gleich dicke Scheiben, so haben alle Scheiben gleich viel Kruste*.

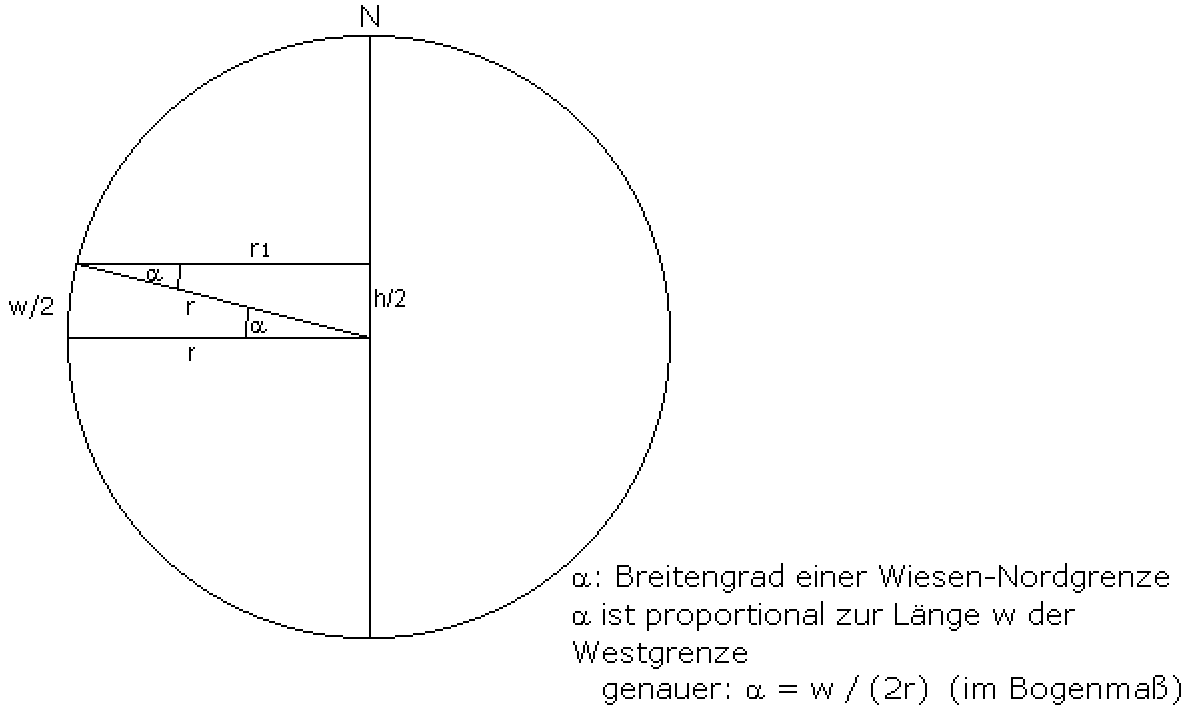


Bild 2

In Bild 2 ist

$$h = 2r\ \sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad M = 4\pi r^2 \sin\alpha = 4\pi r^2 \sin\frac{w}{2r}$$

Die Wiesen bilden nur einen Teil dieser Mantelfläche. Der Anteil ist der Quotient (Länge Nordgrenze) / (Umfang des Breitengrads der Nordgrenze), abgekürzt

$$s/(2\pi r_1)$$

wobei r_1 für den Radius des Erdquerschnitts beim Breitengrad der Nordgrenze steht (siehe Bild 2). Wegen

$$r_1 = r\cos\alpha = r\cos\frac{w}{2r}$$

haben also die Wiesen den Flächeninhalt

$$A = \frac{Ms}{2\pi r\cos\alpha} = 2rs\tan\frac{w}{2r}$$

Wir haben die Erde als kugelförmig angenommen, was in Äquatornähe auch recht gut stimmt. Für r setzen wir also den Erdradius am Äquator ein (6.378.388 m), für David $s = 900$ m, $w = 500$ m, für Paul $s = 500$ m, $w = 900$ m.

Beide Wiesen sind größer als die in der euklidischen Ebene zu erwartenden 450.000 m^2:
Davids Wiese hat etwa **2,3 cm^2** mehr, Pauls Wiese etwa **7,5 cm^2**. Der Unterschied entspricht etwa der Größe einer Briefmarke.

Damit ist Frage a) beantwortet. Da jetzt klar ist, dass beide Wiesen am Äquator liegen, ergibt sich für Frage b) die Antwort: 6 Uhr lokale Zeit (d.h. Ortszeit für den betreffenden Meridian).

Denn am Äquator sind alle Tage gleich lang; genauer: Es vergehen an jedem Tag zwischen Sonnenaufgang und -untergang genau 12 Stunden (hier wird der Linseneffekt der Atmosphäre unberücksichtigt gelassen: genau genommen sieht man die Sonne schon etwas vor ihrem astronomisch berechneten Aufgang und noch etwas nach ihrem astronomisch berechneten Untergang).

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Oktober 2000.

2

Das Erbe der Gebrüder B.

Wie beim vorigen Problem gibt es wieder eine Wiesenaufgabe.

Die Brüder Jakob B. und Johann B. bewirtschaften gemeinsam eine Anzahl von Wiesen, die sie in der Nähe von Basel geerbt haben. Sie streiten sich viel (meist darüber, wer der bessere Mathematiker ist) und beschließen daher eines Tages, die Wiesen aufzuteilen. Diese sind sehr unterschiedlich gelegen; deshalb soll von jeder Wiese genau die Hälfte an jeden Bruder fallen. Jakob und Johann stellen fest, dass sie alle notwendigen Halbierungen durchführen können, indem sie jeweils eine gerade Grenze von Rand zu Rand ziehen. Auf diesen neuen Grenzen sollen Zäune gezogen werden, die natürlich möglichst kurz sein sollen. Die beiden Brüder geraten ins Nachdenken. Jakob fordert seinen Bruder mit einer Aufgabe heraus:

Ist die kürzeste Grenze immer gerade?

Johann kann das beantworten! Sie auch?

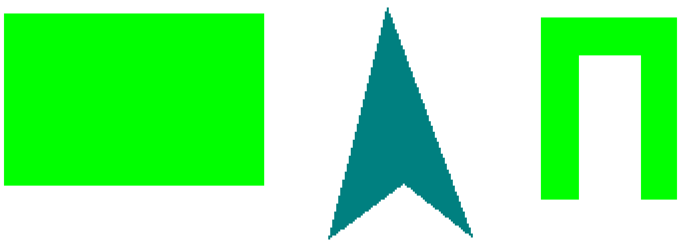
Johann nimmt Revanche und fragt seinen Bruder:

Kann es auch Wiesen geben, die sich durch keine gerade Strecke gerecht teilen lassen?

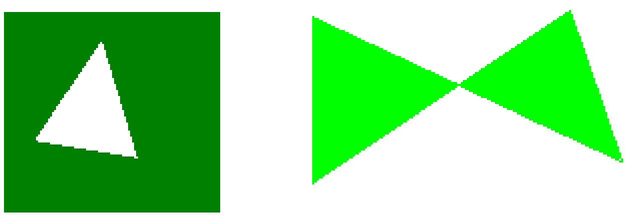
Mit Genugtuung präsentiert Jakob kurz darauf die Antwort. Wie lautet sie?

Bevor Sie anfangen, über die beiden Probleme nachzudenken, soll die Aufgabenstellung präziser formuliert werden. Unter einer Wiese soll eine ebene, endliche Fläche verstanden werden, die von einem geschlossenen Polygonzug (n-Eck) ohne Doppelpunkte (Berühr- oder Kreuzungspunkte) begrenzt wird. (Also bitte keine sphärische Geometrie wie beim Problem Nr. 1; hier ist nur ebene Geometrie verlangt.)

So könnten die Wiesen aussehen:



So dürfen die Wiesen nicht aussehen:



Die Teilungslinie soll in einem Stück von Rand zu Rand verlaufen und zwei gleich große zusammenhängende Wiesenstücke erzeugen, z.B. so:

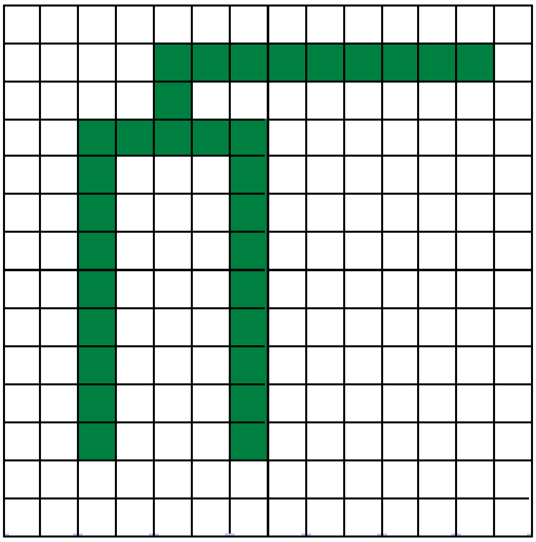
Aber nicht so:

Wenn nun (im ersten Problem) gefragt wird, ob die kürzeste Teilungslinie immer gerade ist, so wird natürlich vorausgesetzt, dass die Wiese überhaupt (mindestens) eine gerade Strecke zur Teilung zulässt (so wie bei den Brüdern B.). Beim zweiten Problem ist dann von irgendwelchen anderen Wiesen die Rede, nicht von denen der Brüder B.

Lösung

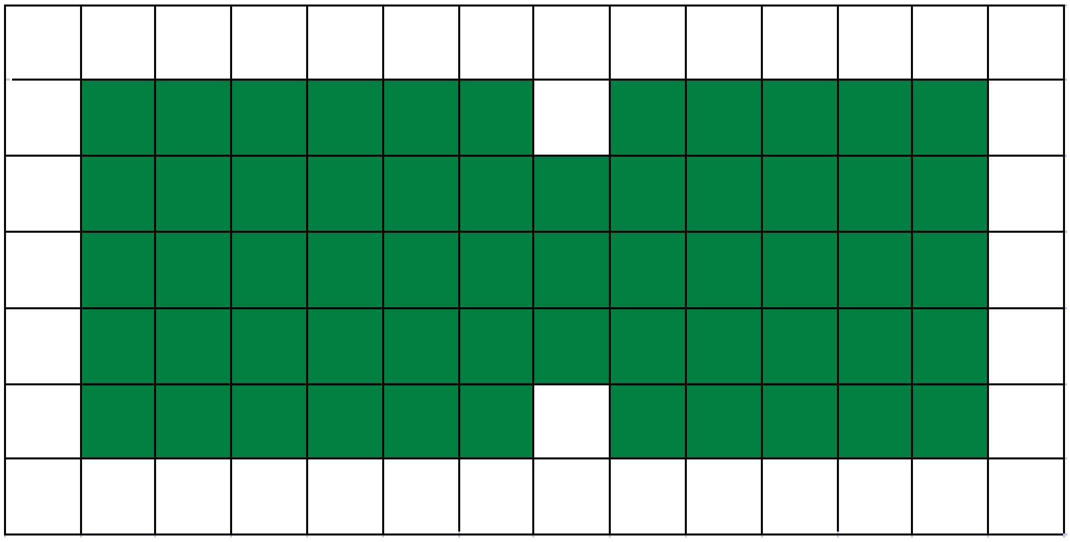
Hoffentlich hat niemand versucht zu beweisen, dass die kürzeste Teilungslinie gerade ist (falls es überhaupt eine gerade Teilung gibt) oder dass es immer eine gerade Teilungsstrecke gibt. Allgemeine Sätze dieser Art sind bei der Vielfalt der erlaubten Polygone wohl eher schwer zu beweisen. Wer also darauf vertraut hat, dass die Lösung nicht so schwierig sein kann, ist gleich auf die Suche nach *Gegenbeispielen* gegangen. Mit ein wenig Probieren kann man eine Wiese finden, die zwar eine gerade Teilung erlaubt, aber deren kürzeste Teilung nicht gerade ist, und eine andere Wiese, die überhaupt keine gerade Teilung zulässt.

Wir fangen mit dem zweiten Problem an. Hier ist eine Wiese, die sich offenbar nicht durch eine gerade Grenze von Rand zu Rand in zwei gleich große Wiesen teilen lässt:

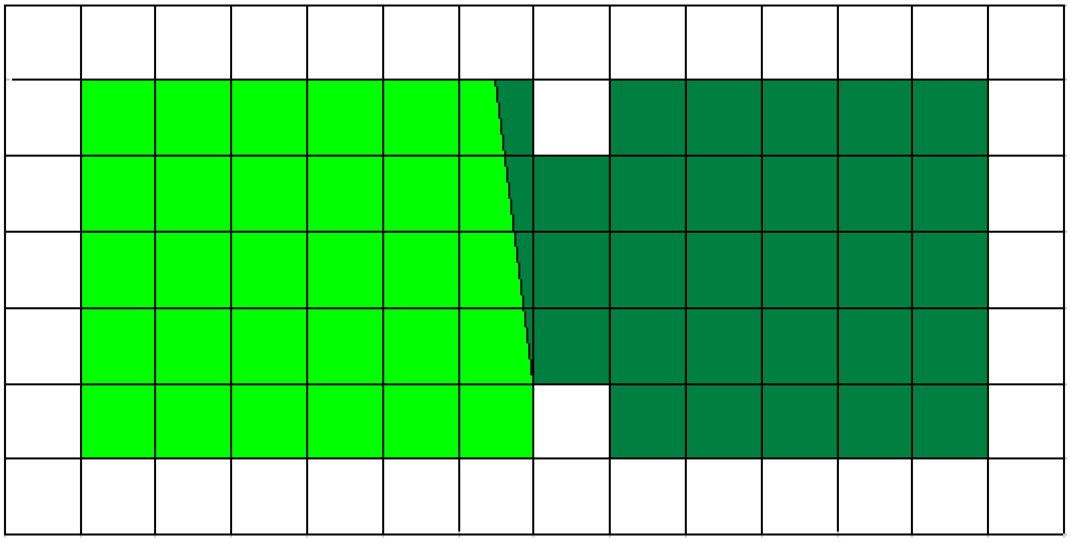


Falls Sie eine wesentlich einfacher geformte Wiese mit der gleichen Eigenschaft kennen, lassen Sie es mich wissen.

Das erste Problem ist auch nicht schwer, führt aber zu einer weiteren interessanten Fragestellung und bekommt daher etwas mehr Raum. Zunächst kann man, ebenfalls durch Probieren, ein Gegenbeispiel finden:



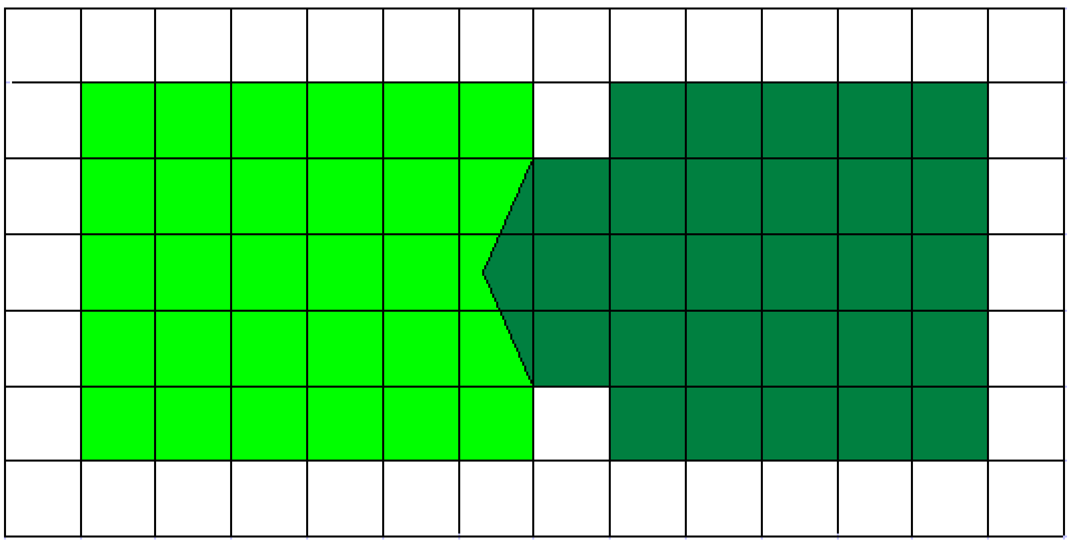
Die kürzeste gerade Teilung geht so:



Die Grenze hat dann die Länge

$$\frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4.03$$

Die folgende Grenzziehung ist kürzer:



Das Dreieck muss den Flächeninhalt 1 haben; dann hat der Zaun die Länge

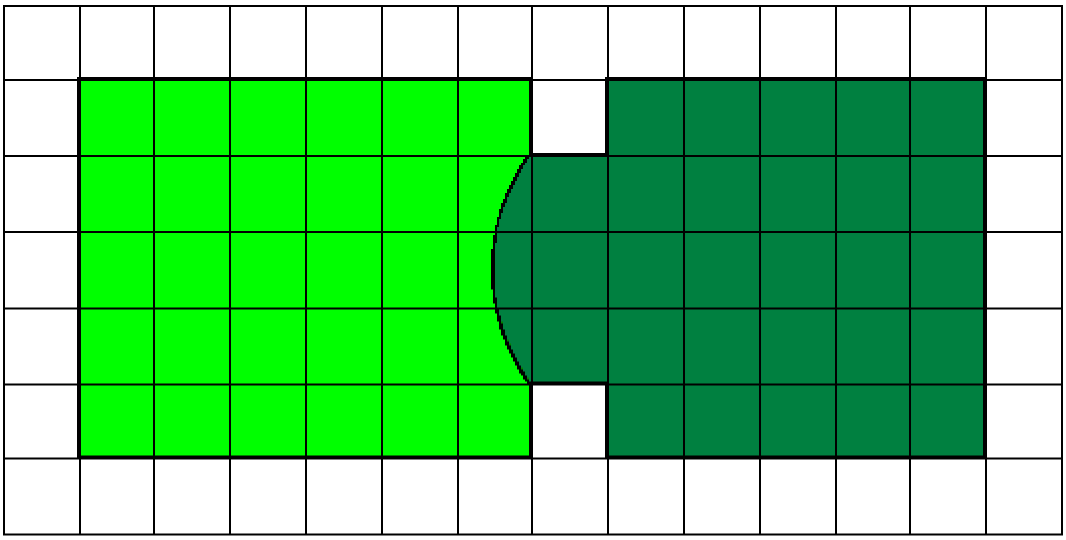
$$\frac{\sqrt{97}}{3} \approx 3{,}28$$

Damit ist ein Gegenbeispiel gefunden und das Problem gelöst. Aber man möchte nun natürlich gerne noch wissen, welches die kürzeste Grenze überhaupt ist.

Diese Frage führt uns in das Gebiet der Variationsrechnung. Dort untersucht man u.a. Problemstellungen der folgenden Art: Welche Kurve (aus einer vorgegebenen Menge von Kurven) hat eine bestimmte Extremaleigenschaft? Ein berühmtes Beispiel ist das *isoperimetrische Problem*: Welche geschlossene ebene Kurve von vorgegebener Länge umschließt die größte Fläche? Antwort: Der Kreis. Das "duale" Problem dazu lautet: Welche geschlossene ebene Kurve, die einen vorgegebenen Flächeninhalt umschließt, hat die kleinste Länge? Gleiche Antwort: Der Kreis. Nun ist unsere Frage nach der kürzesten Grenze zur Halbierung der Wiesenfläche ja ganz ähnlich. *Welche Kurve zwischen zwei Punkten, die zusammen mit der Strecke zwischen diesen Punkten den Flächeninhalt 1 umschließt, ist die kürzeste?*

Das dazu duale Problem (mit derselben Lösung) lautet: *Welche Kurve fester Länge zwischen zwei Punkten umschließt zusammen mit der Strecke zwischen diesen Punkten den größten Flächeninhalt?* Dieses Problem hat einen Namen: Es ist das **Problem der Dido**. Dido war die sagenhafte Königstochter aus der phönizischen Stadt Tyros am Mittelmeer (heute *Sur* im Libanon), die als Gründerin Karthagos gilt. Dort im Norden Afrikas war Dido nach einer Flucht übers Meer gelandet, nachdem ihr Bruder Pygmalion ihren Gemahl ermordet hatte. Sie gewann mit einer List ein bedeutendes Landgebiet: Sie erbat sich so viel Siedlungsfläche, wie mit einer Stierhaut zu umfassen sei. Dies wurde ihr ahnungslos gewährt. Dido schnitt die Haut in feine Streifen, verknotete diese und legte damit eine lange Kurve ins Land, deren Endpunkte an der Küste lagen.

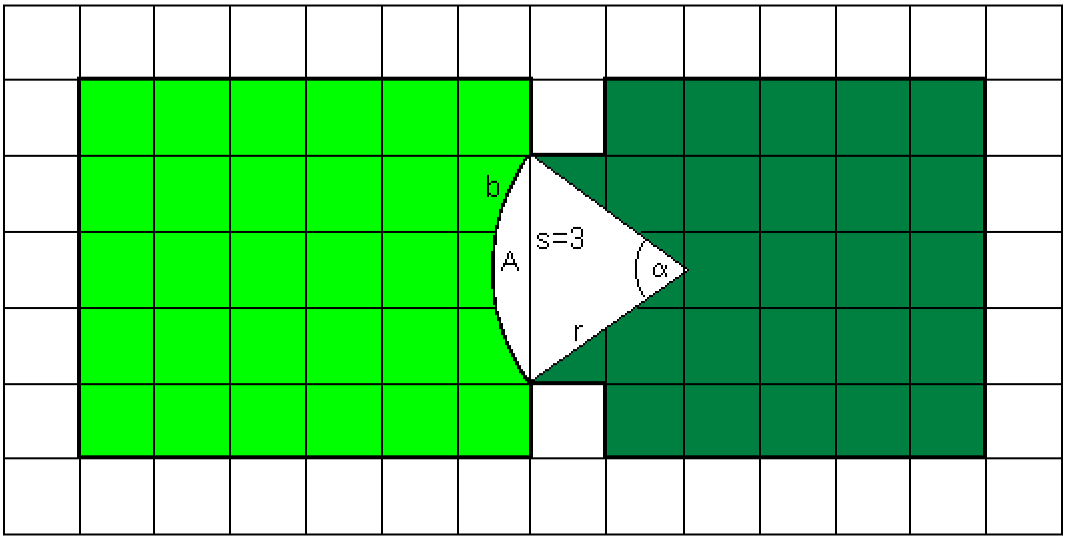
Es ist nicht überliefert, ob Dido die bestmögliche Kurve gewählt hat. Erst nach der Begründung der Infinitesimalrechnung im 17. Jh. wurde ihr Problem systematisch behandelt. Die Lösung lautet, dass die Kurve ein Stück eines *Kreises* sein muss. Also sieht die optimale Grenzziehung so aus:



Wie lang ist diese Grenze?

Für den Flächeninhalt A des Kreisabschnitts gilt

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin \alpha) \qquad (\alpha \text{ im Bogenmaß})$$



Nun ist hier A = 1 und

$$r = \frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Man erhält so die Gleichung

$$1 = \frac{9(\alpha - \sin\alpha)}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{9(\alpha - \sin\alpha)}{4(1-\cos\alpha)}$$

mit der Näherungslösung

$$\alpha \approx 1.26227 \quad \Rightarrow \quad r \approx 2.54212$$

Damit kann man den Kreisbogen zeichnen. Seine Länge b (und damit die Lösung des Minimierungsproblems) berechnet man zu

$$b = r \cdot \alpha \approx 3.2088$$

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

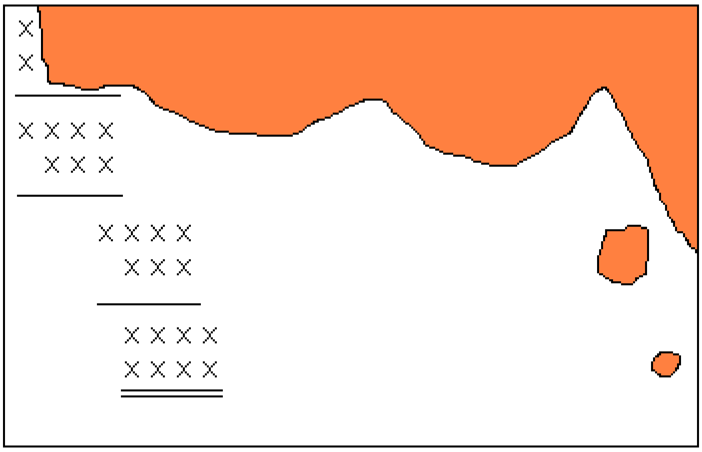
Als E-Dokument veröffentlicht im November 2000.

3

Die Division und der Tee

Herr F. vom DV-Servicezentrum in Friedberg soll herausfinden, wie viel Internet-Zeit die Studis aus dem Fachbereich ST *) auf den Rechnern der Hochschule in Anspruch nehmen. Er addiert die Dauer aller entsprechenden online-Sitzungen eines ganzen Jahres; das ergibt x Sekunden. Dann teilt er durch die Anzahl y der ST-Studis und erhält so den Durchschnittswert z pro Studi, der zufälligerweise glatt aufgeht.

Da es sich um sensible Daten handelt, hat Herr F. seine Division stark verschlüsselt aufgeschrieben. Als er fertig war, hat er leider auch noch etwas Tee über dem Blatt verschüttet. Mehr ist von seiner Rechnung nicht übrig geblieben:

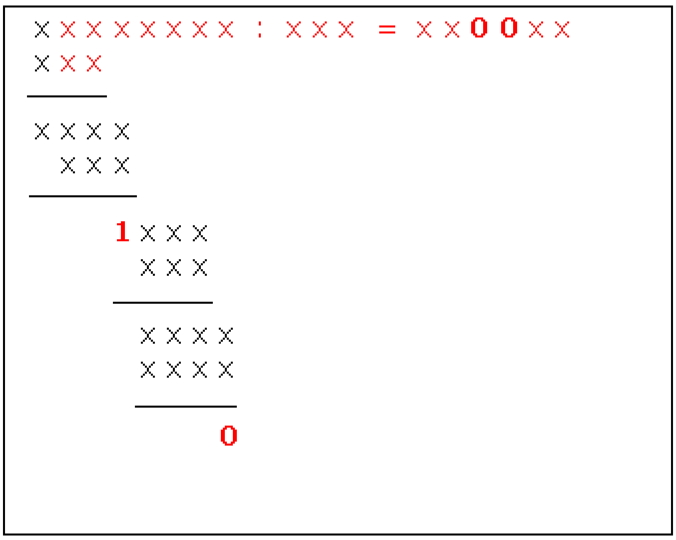


Wie viele Studierende hat der Fachbereich ST ?

*) Surftechnologie

Lösung

Die Anzahl der Ziffern von x und z ergeben sich durch Abzählen in den Divisionsschritten. y muss dreistellig sein, da als Vielfache von y drei- und vierstellige Zahlen auftreten. In einem ersten Schritt trägt man alle sofort erkennbaren Ziffern und Platzhalter ein:



Der zweite Schritt bringt schon die entscheidende Erkenntnis zur Bestimmung von y :

```
×××0×××× : ××× = ××00××
×××
───
1000
 999
────
   1×××
    ×××
   ────
    ××××
    ××××
    ────
       0
```

Wegen $999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ kommt für y nur 111, 333 und 999 in Frage. 111 scheidet aus, da 111 in der Division keine vierstelligen Vielfachen ergeben kann. 999 scheidet aus, weil dafür beim ersten Divisionsschritt die Differenz 100 nicht stimmen kann.

Der Fachbereich ST hat 333 Studierende.

---

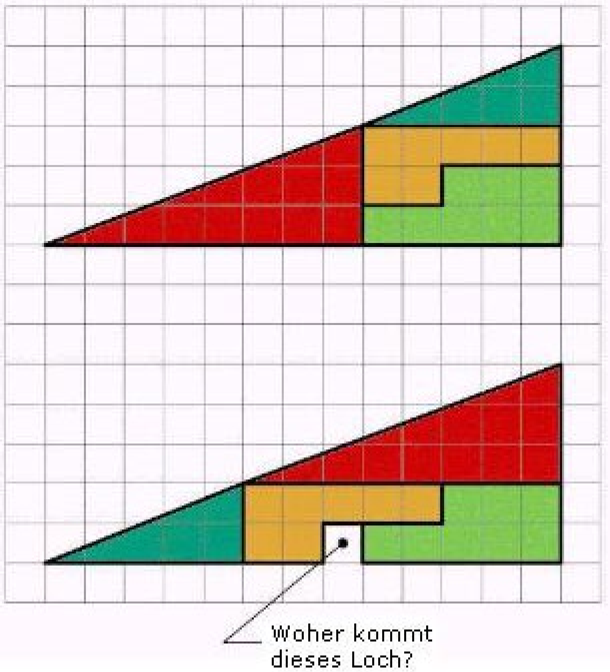
nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2000.

4

Das verschwundene Flächenstück

Mein gelehrter Kollege Professor Götz hat mich auf die folgende Aufgabe aufmerksam gemacht. Die vier farbigen Flächenstücke werden nur verschoben, ihre Größe bleibt dieselbe ... aber schauen Sie, was geschieht:



Lösung

Die beiden Figuren sind keine Dreiecke, sondern (verschiedene) Vierecke. In Bild 1 sind diese Vierecke etwas überzeichnet dargestellt. Das untere Viereck ist konvex, das obere nicht.

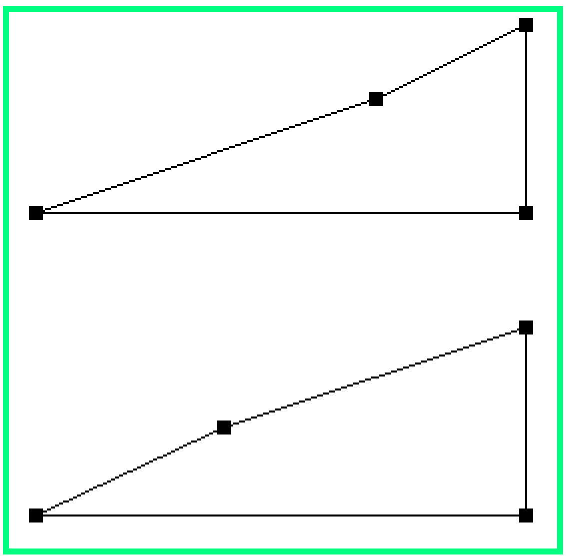


Bild 1

Die exakte Darstellung sieht man in Bild 2. Da alle Ecken beider Vierecke ganzzahlige Koordinaten haben, kann man leicht die Flächeninhalte zu 32 bzw. 33 Flächeneinheiten bestimmen.

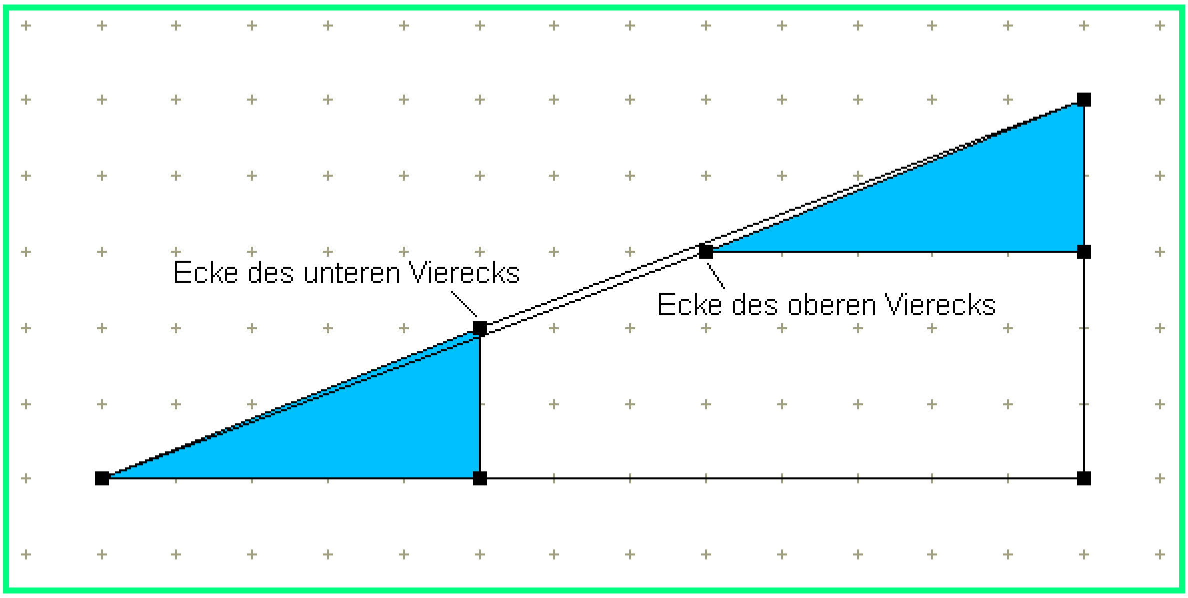


Bild 2

nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 4 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Januar 2001.

5

Die Leiter an der Hauswand

Meister zum Lehrling:

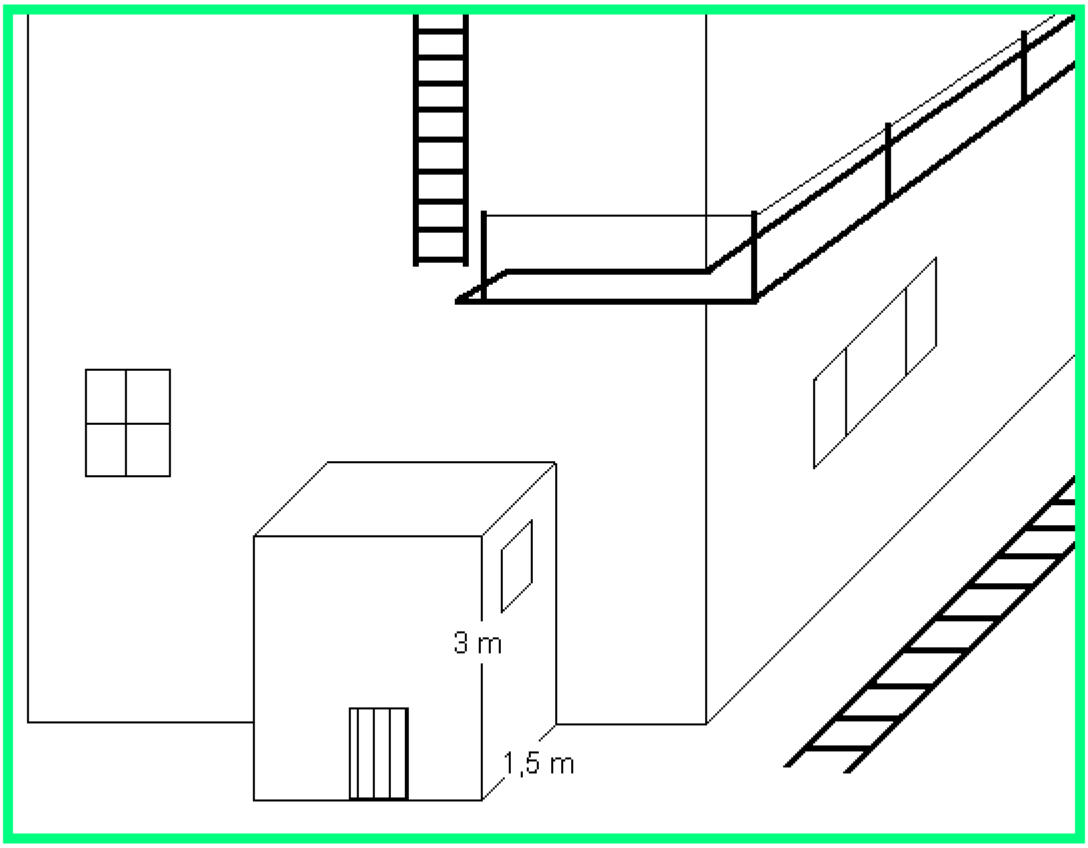
"Nimm Dir die Leiter, die da drüben liegt. Sie ist 7 m lang. Du kannst sie an die Vorderkante des Vorbaus und gleichzeitig an die Hauswand lehnen. Dann steigst Du dort auf die Feuerleiter um."

Lehrling (etwas später, weinerlich):

"Meister, es geht nicht, unsere Leiter kommt so nicht bis an die Feuerleiter heran."

Was hat der Meister nicht bedacht?

Als ihm das bald darauf selbst einfällt, denkt er sich: "Das soll mir kein zweites Mal passieren!" Er sägt ein Stück von der Leiter ab. Wieviel?



Lösung

Was hat der Meister nicht bedacht?

Die Aufgabe, eine Leiter sowohl an eine vorspringende Kante als auch an eine Wand zu lehnen, hat nur in Ausnahmefällen genau eine Lösung. Meist geht es entweder gar nicht, oder es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, die Leiter aufzustellen (siehe Seitenansicht des Vorbaus in Bild 1).

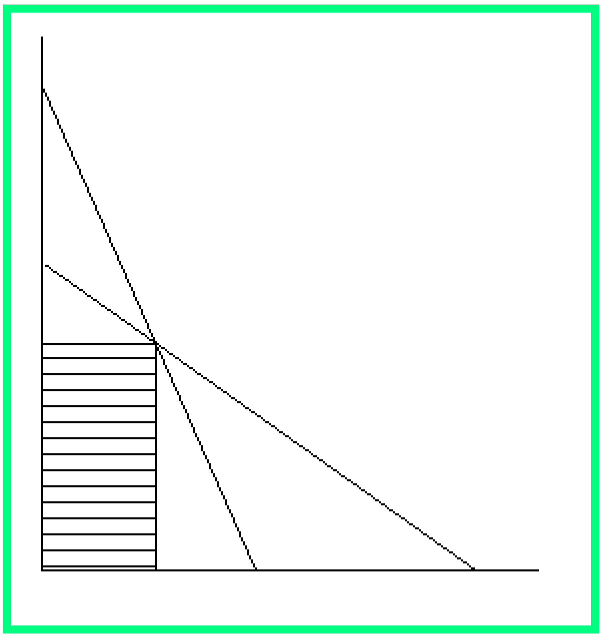


Bild 1

Der Lehrling hatte die Leiter flach angelegt. Er wusste wohl ebenfalls nicht, dass es noch eine zweite Stellung geben könnte. Diese zweite, steilere Leiterstellung war aber seinem Meister bekannt, und offenbar nur diese.

Welche Idee hatte der Meister?

Damit ein solches Missverständnis nicht mehr auftreten kann (natürlich nur bei dieser Leiter und an diesem Ort), will er dafür sorgen, dass es nur eine Möglichkeit zum Anlegen der Leiter gibt.

Berechnung der beiden Lösungen

Es sollen zunächst die beiden Leiterstellungen aus Bild 1 berechnet werden. Dabei sind bekannt:

c Länge der Leiter (hier $c = 7$)

a Abstand der Vorbaukante vom Haus (hier $a = 1.5$)

b Höhe des Vorbaus (hier $b = 3$)

Mit x und y bezeichnen wir die Leiterstücke oberhalb bzw. unterhalb der Kante. Wenn man diese ausgerechnet hat, so lässt sich auch bestimmen, wie weit die Leiter vor dem Vorbau auf dem Boden aufsteht (w), wie weit oberhalb des Vorbaus sie die Wand berührt (h) und wie steil sie steht (Winkel alpha). Alle diese Größen findet man in der Seitenansicht des Vorbaus in Bild 2.

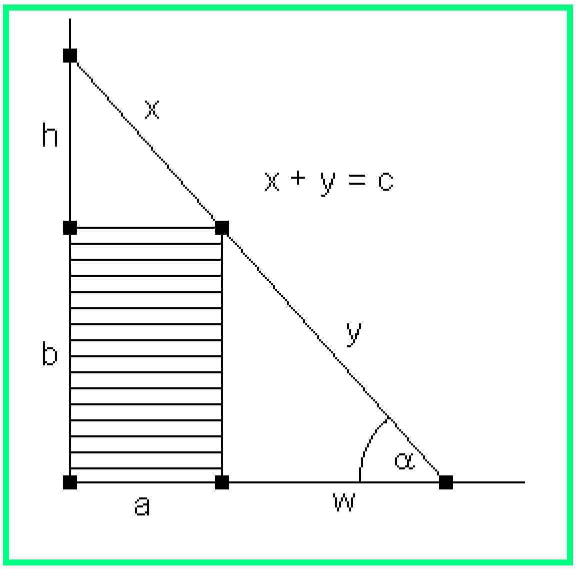


Bild 2

Zur Bestimmung von x und y lassen sich zwei Gleichungen aufstellen:

$$\boxed{\begin{array}{l} x + y = c \\ \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2} = 1 \end{array}}$$

Die zweite Gleichung folgt aus:

$$\frac{a}{x} = \frac{w}{y} = \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{x^2} = 1 - \frac{b^2}{y^2}$$

oder mit Hilfe des Winkels:

$$\frac{a}{x} = \cos\,\alpha \qquad \frac{b}{y} = \sin\,\alpha \qquad \left(\sin^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \right)$$

Die Gleichungen im Kasten sind in Bild 3 graphisch dargestellt. Die eingezeichnete Kurve

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

hat die Asymptoten $x = a$ und $y = b$.

Man sieht : Ist c zu klein (Leiter zu kurz), so gibt es keine Lösung. Ist c genügend groß (Leiter lang genug), so gibt es zwei Lösungen. In einem Grenzfall, für eine bestimmte Leiterlänge c, gibt es genau eine Lösung.

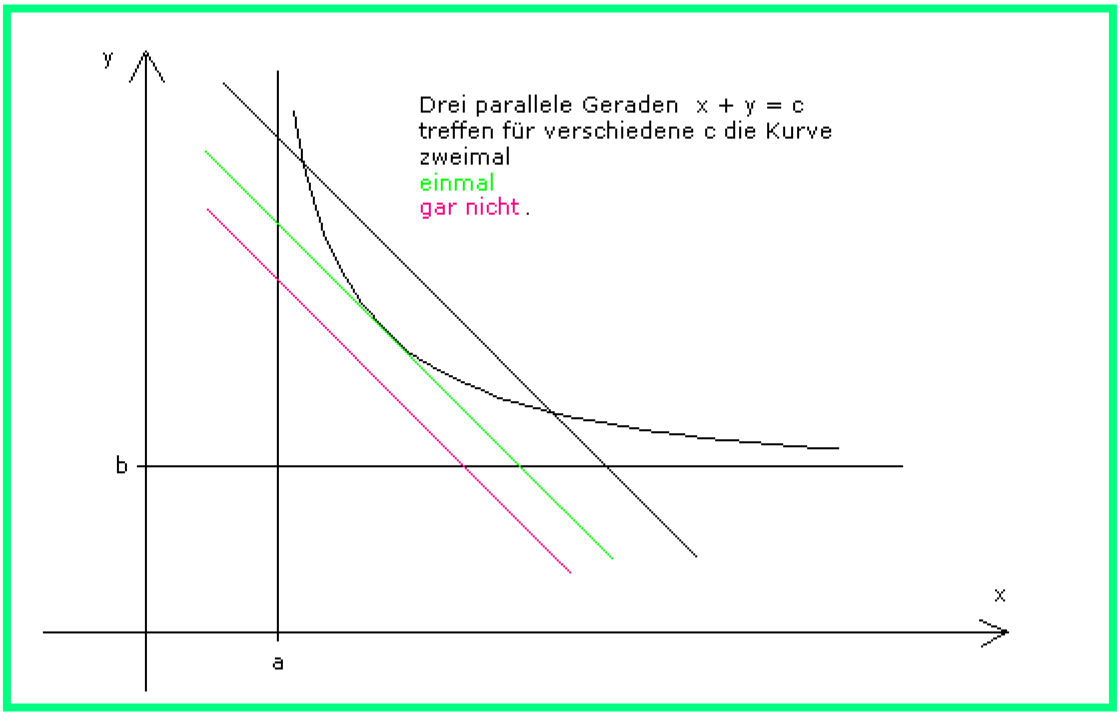


Bild 3

Nun zur Lösung:

Setzt man $y = c - x$ in die zweite Gleichung im Kasten ein, so erhält man eine Gleichung 4. Grades:

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{(c-x)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2\,(c-x)^2 + b^2\,x^2 = x^2\,(c-x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2 - x^2)(c-x)^2 + b^2\,x^2 = 0$$

Für gegebene a, b, c findet man die Lösungen x am besten mit Hilfe mathematischer Software. Für $a = 1{,}5$, $b = 3$ und $c = 7$ (in m) erhält man vier Lösungen (hier auf volle mm gerundet):

$x = -1{,}601$

$x = 1{,}844$

$x = 3{,}722$

$x = 10{,}034$

Da x zwischen a und c liegen muss, kommt nur die zweite sowie die dritte Lösung in Betracht.

Mit x erhält man leicht die anderen Größen in Bild 2:

$$y = c - x$$

$$h = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$w = \sqrt{y^2 - b^2}$$

$$\alpha = \arccos \frac{a}{x}$$

In Bild 1 sind die beiden möglichen Leiterstellungen für unser Ausgangsproblem maßstäblich richtig eingezeichnet.

Mit den x-Werten von oben lässt sich berechnen, wie hoch die Leiter an der Wand anliegt und wie weit sie von der Hauswand entfernt aufsteht:

x	b+h	a+w
1,844 m	4,073 m	5,693 m
3,722 m	6,406 m	2,821 m

Man kann daraus schließen, dass das untere Ende der Feuerleiter deutlich höher als 4 m liegen muss, da der Lehrling sie nicht erreichen konnte. Die Feuerleiter darf andererseits nicht wesentlich höher als bei 6,4 m enden, sonst wäre die Anweisung des Meisters an den Lehrling sinnlos gewesen.

Der Meister will ein Stück absägen. Wieviel?

Es soll sich durch die Verkürzung der Leiter eine eindeutige Lösung ergeben. Wie das geht, ist aus Bild 3 ersichtlich: Die Gerade (im Bild grün) muss die Tangente der Kurve werden. Folglich sucht man den Kurvenpunkt mit der Steigung -1.

Ableitung der Kurvengleichung:

$$-\frac{2a^2}{x^3} - \frac{2b^2}{y^3} \cdot y' = 0$$

Wegen $y' = -1$ erhält man

$$y = \left(b/a\right)^{2/3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad c = x + y = x \cdot \left(1 + \left(b/a\right)^{2/3}\right)$$

Nun muss nur noch x ausgerechnet und eingesetzt werden. Da (x,y) auf der Kurve liegen muss, gilt:

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{\left(b/a\right)^{4/3} \cdot x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 + a^{4/3} \cdot b^{2/3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + a^{4/3} \cdot b^{2/3}} \cdot \left(1 + \left(b/a\right)^{2/3}\right)$$

Dies lässt sich wesentlich eleganter ausdrücken. Das "Leiterproblem" hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn

$$\boxed{c^{2/3} = a^{2/3} + b^{2/3}}$$

Der Meister verkürzt die Leiter auf 6,243 m.

Dann ergibt sich die eindeutige Lösung $x = 2.413$ m. Die Leiter steht dann in 4.89 m Höhe an der Hauswand an.

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Februar 2001.

6

Summen aufeinander folgender Zahlen

Dies ist ein Problem aus der Zahlentheorie. Die Lösung kann man durch Probieren mit kleinen Zahlen herausfinden. Es ist mit Elementarmathematik auch ein Beweis möglich.

Wir wollen natürliche Zahlen als Summe aufeinander folgender Zahlen darstellen, z.B.:

9 = 4 + 5

10 = 1 + 2 + 3 + 4

100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22

3000 = 999 + 1000 + 1001

Für welche natürlichen Zahlen geht das und für welche nicht?

Lösung

Durch Probieren (bis 20 reicht schon) kommt man schnell zu der Vermutung, dass sich **alle natürlichen Zahlen n außer den Zweierpotenzen n = 2^r** als solche Summen darstellen lassen:

1 (= 2^0) geht nicht

2 (= 2^1) geht nicht

3 = 1 + 2

4 (= 2^2) geht nicht

5 = 2 + 3

6 = 1 + 2 + 3

7 = 3 + 4

8 (= 2^3) geht nicht

9 = 4 + 5

10 = 1 + 2 + 3 + 4

11 = 5 + 6

12 = 3 + 4 + 5

13 = 6 + 7

14 = 2 + 3 + 4 + 5

15 = 7 + 8

16 (= 2^4) geht nicht

$17 = 8 + 9$

$18 = 3 + 4 + 5 + 6$

$19 = 9 + 10$

$20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

...

Für **ungerade** Zahlen $n > 1$ ist das ganz einfach, man kommt immer mit zwei Summanden aus:

$\mathbf{n = (n - 1) / 2 + (n + 1) / 2}$

also z.B. $11 = 5 + 6$, $101 = 50 + 51$, $12345 = 6172 + 6173$.

Sei nun n **gerade**. Die Anzahl der aufeinander folgenden Summanden nennen wir **k**. Ist n als eine solche Summe darstellbar, mit **m** als Startwert, so ist

$\mathbf{n = m + (m + 1) + \;...\; + (m + k - 1)}$,

das ergibt

$\mathbf{n = k \cdot m + (0 + 1 + \;...\; + (k - 1)) = k \cdot m + (k - 1) \cdot k / 2}$.

Also muss n von der Form sein:

$\mathbf{n = (k + q) \cdot k / 2}$, dabei ist $q = 2m - 1$.

Oder:

$\mathbf{2n = (k + q) \cdot k}$

Zweierpotenzen $n = 2^r$ lassen sich so nicht darstellen, denn $2n = 2^{r+1}$ hat keinen ungeraden Faktor, aber weil q gerade ist, ist entweder $k + q$ oder k ungerade.

Ist n keine Zweierpotenz, so muss man passende k und q finden. Für Nicht-Zweierpotenzen n kann man schreiben:

$\mathbf{2n = 2^i \cdot u}$ (u ist das Produkt aller ungeraden Primfaktoren von n).

Da $\mathbf{2^i \cdot u = (k + q) \cdot k}$ gelten soll, fällt die Wahl leicht: Man nimmt für k die kleinere der beiden Zahlen 2^i und u, und für $k + q$ die größere; in mathematischer Schreibweise:

$\mathbf{k = \min \{ 2^i, u \}} \qquad \mathbf{q = |2^i - u|}$

Als Beispiel wählen wir $\mathbf{n = 94}$. Dann ist $\mathbf{2n = 188 = 2^2 \cdot 47}$, folglich $\mathbf{i = 2}$, $\mathbf{u = 47}$ und damit $\mathbf{k = 4}$ (also gibt es 4 Summanden), $\mathbf{q = 43}$. Aus dem Wert für q berechnet man den ersten Summanden $\mathbf{m = 22}$. Ergebnis:

$\mathbf{94 = 22 + 23 + 24 + 25}$

Dies ist die einzig mögliche derartige Zerlegung von 94, aber im Allgemeinen ist die Darstellung nicht eindeutig, wie z.B. $n = 78$ zeigt:

$\mathbf{78 = 25 + 26 + 27}$

$\mathbf{78 = 18 + 19 + 20 + 21}$

78 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12

Zum Auffinden von Summanden gibt es noch einen anderen Weg:

n muss (mindestens) einen ungeraden Teiler w haben, wenn n keine Zweierpotenz ist. Dann ist n die Summe von w aufeinander folgenden Summanden mit n / w als mittlerem Summanden.

Dazu muss man sich nur klar machen, dass die Addition des ersten und letzten, des zweiten und vorletzten (usw.) Summanden jeweils zum gleichen Ergebnis führt, nämlich $2 \cdot n / w$.

Für **n = 2001** kann man z.B. $w = 3$ wählen und erhält $n / w = 667$. Also ist

2001 = 666 + 667 + 668

---

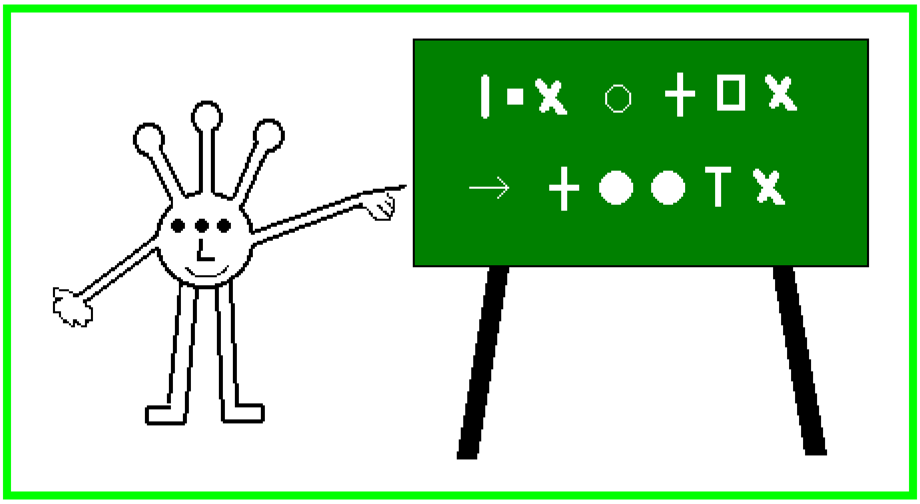
nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im März 2001.

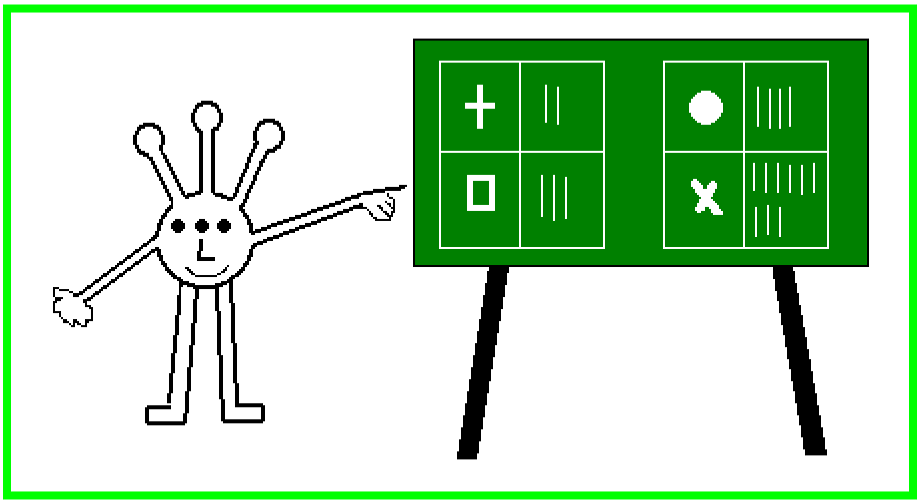
7

Extraterrestrische Multiplikation

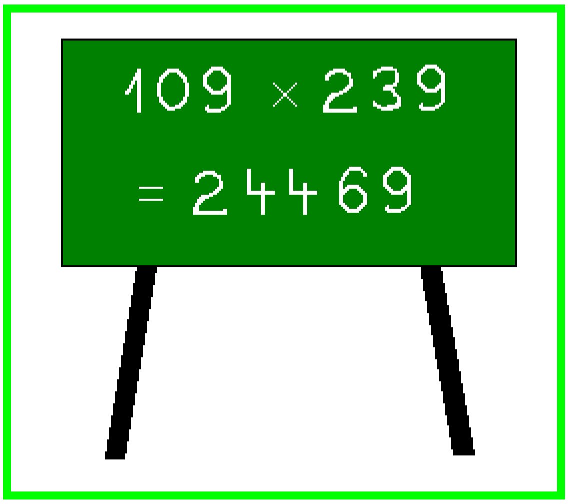
Professor O. macht einen Raumflug. Er landet auf einem fernen Planeten und wird dort von den Bewohnern freundlich aufgenommen. Schon bald gelingt eine Verständigung, und O. besucht in einer Schule eine Mathematikstunde. Der Lehrer hat gerade eine Rechnung an die Tafel geschrieben:



O. bittet den Lehrer, ihm zu erklären, was die einzelnen Symbole in der Rechnung bedeuten. Striche zu zählen erweist sich dafür als die beste intergalaktische Verständigungsmethode. Auf der nächsten Tafel sieht man ein paar Beispiele dafür:



Als O. alle Symbole auf der Tafel verstanden hat, schreibt er die Rechnung in den ihm am besten vertrauten arabischen Ziffern hin:



Professor O. versteht diese Rechnung nicht, und er bittet seinen Kollegen Professor S., der sich gut in Zahlentheorie auskennt, per Funk um Hilfe. S. ist ein bisschen gemein und verrät O. nicht die Lösung, sondern gibt ihm nur einen Ratschlag: "Zählen Sie doch mal die Finger Ihrer Gastgeber!" O. folgt diesem Rat. Was stellt er fest?

Lösung

Professor S. vermutet, dass die Außerirdischen zwar ein Stellenwertsystem wie wir verwenden, aber mit einer anderen Basis als 10. Das heißt, dass z.B. die Zahl 239 auf der Tafel nicht $9 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2$ bedeutet, sondern $9 + 3 \cdot b + 2 \cdot b^2$ mit einer noch unbekannten Basis b. (Wenn S.'s Vermutung stimmt, dann ist b die Anzahl der Finger von O.'s Gastgebern.)

Die Rechnung auf der Tafel erhält so die Form

$$\mathbf{(9 + b^2) \cdot (9 + 3 \cdot b + 2 \cdot b^2) = 9 + 6 \cdot b + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot b^3 + 2 \cdot b^4}$$

oder kürzer

$$\mathbf{b^3 - 23 \cdot b^2 - 21 \cdot b - 72 = 0}$$

Diese kubische Gleichung kann man (zur Not auch von Hand) vollständig lösen. Etwas einfacher geht es so: Man kann davon ausgehen, dass es (mindestens) eine ganzzahlige Lösung b gibt (nämlich die Anzahl der Finger der Außerirdischen). Dann kommt man durch Probieren zum Ziel, denn es ist bekannt, dass b ein Teiler des konstanten Summanden sein muss, also hier von -72.

Lösung der kubischen Gleichung: $\mathbf{b = 24}$.

Dies ist die einzige reelle Lösung; außerdem gibt es noch zwei komplexe Lösungen, die für unser Problem nicht von Interesse sind.

Setzt man $b = 24$ in die Rechnung auf der Tafel ein, so erhält man im Dezimalsystem die richtige Multiplikation

585 · 1233 = 721.305

Wie konnte S. wissen, dass die Außerirdischen ihre Zahlen von links nach rechts mit absteigenden Potenzen von b schreiben (so wie wir) und nicht umgekehrt? Er konnte es gar nicht wissen, sondern hat beide Varianten durchprobiert. Für aufsteigende Potenzen findet man keine ganzzahlige Lösung.

Professor O. stellte in der Tat fest, dass seine außerirdischen Gastgeber 24 Finger besaßen.

Manfred Börgens - Problem 7 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im April 2001.

8

Das Professorenrennen auf dem Schottenring

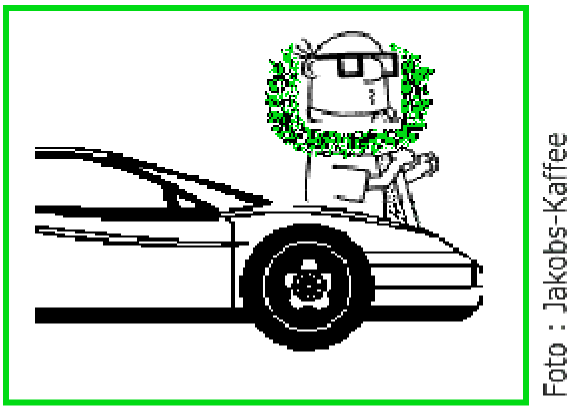
In hellen Scharen strömten am vergangenen Samstag die Automobilsport-Fans der Fachhochschule in Friedberg zum Schottenring. Dort fiel um 10 Uhr der Startschuss zum mit Spannung erwarteten "Professorenrennen".

Als Konkurrenten standen sich der Kollege L. (Rennstall Mercedes-SK) und der emeritierte Kollege T. (Rennstall BMW-GW) gegenüber. Das Rennen ging über eine Distanz von 145 km (9 Runden). Zahlreiche Studenten arbeiteten als Streckenposten. Sie bewiesen ihre gute mathematische Ausbildung durch wiederholte Messung der Geschwindigkeiten der beiden Boliden. Übermittelt an die Rennleitung (besetzt von MND wegen erwiesener Neutralität) wurden dabei nicht Momentangeschwindigkeiten, sondern "Etappengeschwindigkeiten" v auf wechselnden Streckenabschnitten.

Für die ersten 10 km benötigten beide Fahrer genau 4 Minuten ($v = 150$ km/h). Gleich lautende Meldungen wurden während des gesamten Rennens übermittelt, bis zum Zieleinlauf: Auch die letzten 10 km wurden von beiden Autos in 4 Minuten bewältigt. Das gesamte Rennen wurde gefilmt, und die Auswertung des Videos zeigte, dass tatsächlich auf *allen* (beliebig gelegenen) Streckenabschnitten der Länge 10 km sowohl von L. als auch von T. die Etappengeschwindigkeit $v = {}^{10\text{ km}}/_{4\text{ Min.}} = 150$ km/h gefahren wurde.

Gab es also ein totes Rennen?

Nein, es gab einen klaren Sieger. Hier ist er:



Der Sieger

Können Sie erklären, wie es möglich sein kann, dass das Siegauto im Ziel 10 Sekunden Vorsprung hatte?

Lösung

Wie das Rennen genau ablief, lässt sich aus den gemachten Angaben nicht vollständig rekonstruieren. Es gibt dafür viele Möglichkeiten, die alle zu den gleichen Etappengeschwindigkeiten und zum 10-Sekunden-Vorsprung des Siegers passen.

Zunächst ein einfaches anderes Beispiel, an dem man das Prinzip solcher Lösungen sofort erkennen kann. Man teilt eine Strecke in fünf Abschnitte gleicher Länge, lässt ein Auto auf diesen Abschnitten schnell-langsam-schnell-langsam-schnell fahren, das andere langsam-schnell-langsam-schnell-langsam, und betrachtet dann beliebige Etappen mit der Länge von zwei Abschnitten.

Jede Etappe umfasst dann für beide Autos gleich große "Langsam"- und "Schnell"-Abschnitte. Also sind alle Etappengeschwindigkeiten gleich, wenn "langsam" überall die gleiche Geschwindigkeit v_1 bedeutet und "schnell" überall die gleiche Geschwindigkeit v_2. Aber das Auto, das auf den schwarzen Abschnitten schnell fährt, ist eher am Ziel.

Auf dem Schottenring kann man es ähnlich machen. Man braucht die Gesamtstrecke von 145 km nur in eine ungerade Anzahl gleich langer Abschnitte zu teilen, wobei eine 10-km-Etappe die gleiche Länge haben muss wie eine gerade Anzahl dieser Abschnitte. Eine naheliegende (aber nicht die einzige) Möglichkeit ist, dass beide Fahrer immer abwechselnd 5 km langsam und 5 km schnell fahren (ergibt 29 Abschnitte). Der Sieger fängt dann mit einem schnellen Abschnitt an und hört mit einem schnellen Abschnitt auf, der Unterlegene fährt auf diesen beiden Abschnitten langsam.

Wie muss man dann "langsam" und "schnell" festlegen, um einen Vorsprung von 10 Sekunden für den Sieger zu erhalten? Beide Autos benötigen für jeweils 10 km 4 Minuten und liegen deshalb 5 km vor dem Ziel gleichauf. Erst der letzte 5-km-Abschnitt bringt die entscheidenden 10 Sekunden Vorsprung. Dieser Abschnitt ist für den Sieger ein schneller und für den Unterlegenen ein langsamer, somit ist die Summe ihrer Fahrzeiten dort auch 4 Minuten. Diese Zeitspanne lässt sich nur auf eine Weise so aufteilen, dass der Unterschied 10 Sekunden beträgt: 115 Sekunden + 125 Sekunden.

Beide Fahrer fahren abwechselnd 5-km-Abschnitte in 115 Sekunden (ca. 156,52 km/h) und in 125 Sekunden (144 km/h). Der Sieger beginnt mit einem schnellen, der Unterlegene mit einem langsamen Abschnitt.

Andere Lösungen lassen sich auf gleiche Weise konstruieren, z.B. mit 2,5-km-Abschnitten.

---

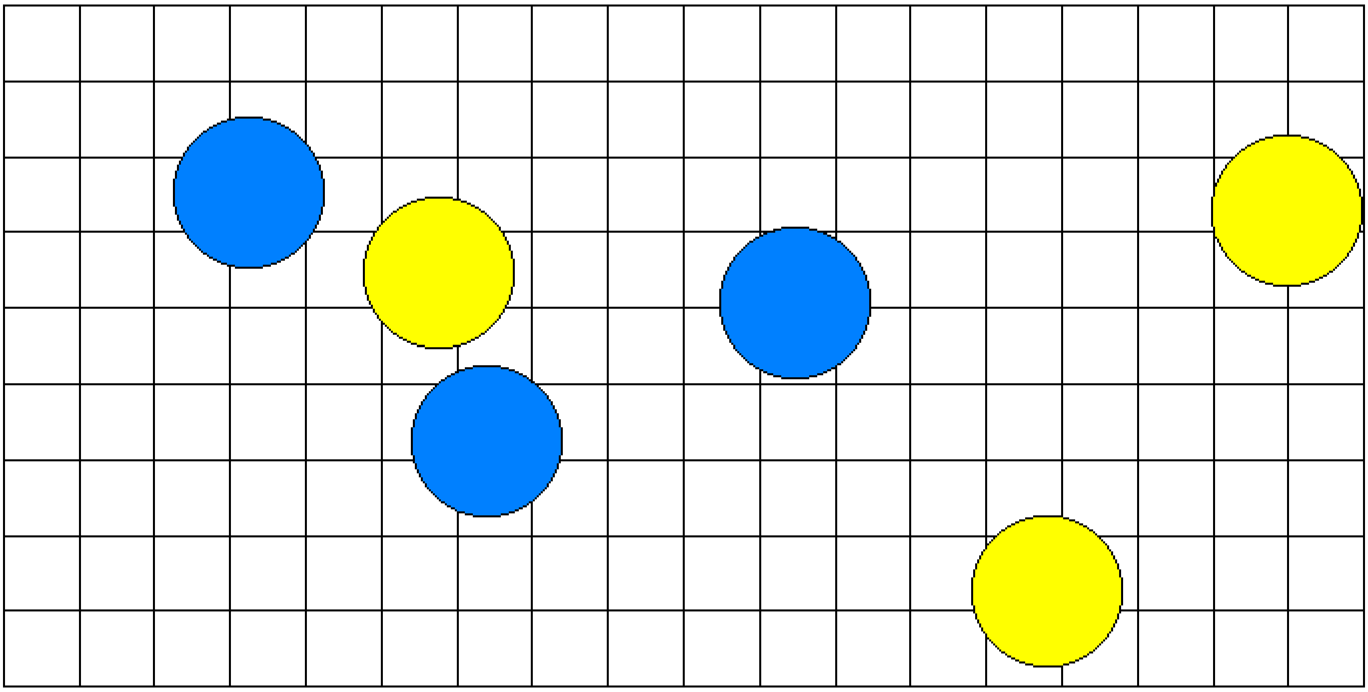
nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Mai 2001.

9

Das Münzspiel

Die Vorlesung bei Professor X. ist mal wieder sehr langweilig. Die Klausur ist noch fern, und so wollen sich die Studis A. und B. in der letzten Reihe die Zeit mit einem Spielchen vertreiben. Beide setzen abwechselnd Münzen auf ein Blatt mit Rechenkästchen.
Wer als erster keine Münze mehr setzen kann, hat verloren.



Die Münzen müssen alle gleich groß sein. Sie dürfen nicht über den Rand des Rechtecks hinausragen. Sie dürfen sich nicht (teilweise oder ganz) überdecken. Das Bild zeigt einen möglichen Spielstand, nachdem beide Spieler je dreimal gesetzt haben.

Die Maße des Rechtecks sind unerheblich und können von Spiel zu Spiel variieren. Die Rasterung des Spielfeldes ist nicht unbedingt erforderlich, soll aber den Spielern die Orientierung erleichtern. Zur Unterscheidung (im Bild durch Farben) könnten die Spieler Vorder- bzw. Rückseite der Münzen nach oben legen, aber die Unterscheidung ist für dieses Spiel nicht wichtig.

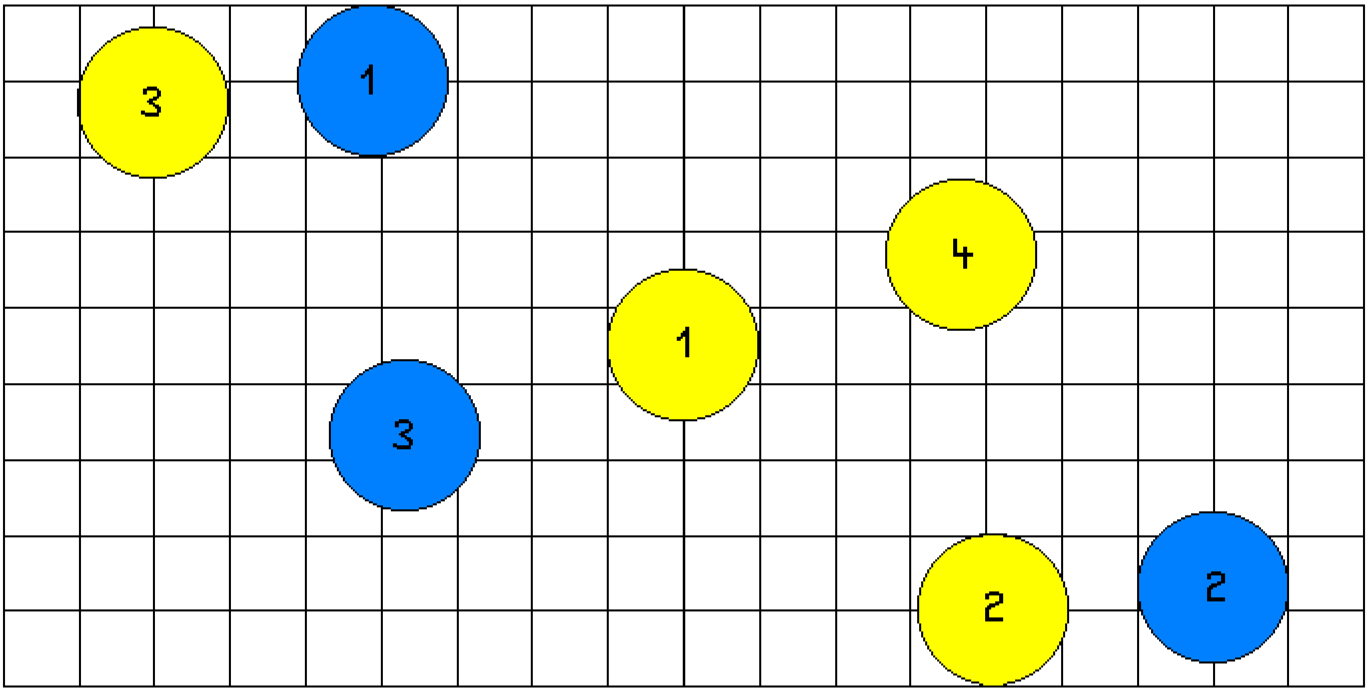
Nach ein paar Spielrunden hat A. eine Idee. Ab dann gewinnt er jedes Spiel, in dem er anfangen darf. B. schaut ihm schnell seine Strategie ab und gewinnt auch, wenn er anfängt.

Also ist dies leider (für Eingeweihte) ein langweiliges Spiel, denn **es gibt eine einfache Gewinnstrategie für den *beginnenden* Spieler. Welche Idee hatte A.?**

Lösung

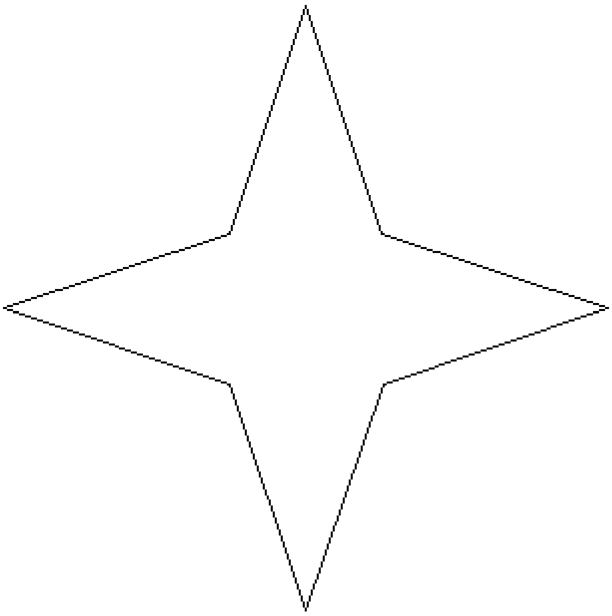
Sei A. der beginnende Spieler und B. der nachziehende. Wo findet A. immer eine freie Fläche zum Setzen seiner Münze? Nun, das findet man schnell heraus, wenn man selbst ein paar Spiele macht: A. imitiert einfach jeden Zug von B., indem er spiegelbildlich zum Mittelpunkt des Spielfeldes setzt. Das geht natürlich nur, wenn B. seine Münzen nicht so nah an den Mittelpunkt setzt, dass A.s "Antwort" zu einer Überlappung der Münzen führen würde. Aber dies kann A. gleich im ersten Zug verhindern, indem er seine Münze genau in den Mittelpunkt setzt.

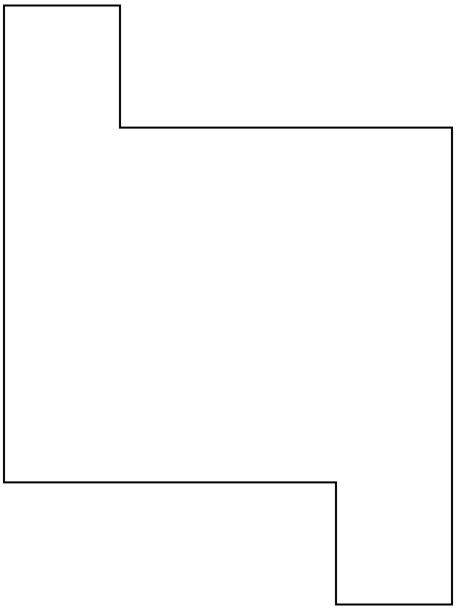
Die Zugfolge könnte also so wie in diesem Bild aussehen:



A. kann mit dieser Strategie also immer setzen, B. wird irgendwann keinen Platz mehr finden und verlieren.

Man sieht, dass das Spielfeld nicht rechteckig sein muss, es muss nur punktsymmetrisch sein. Auch auf solchen Spielfeldern würde A.s Strategie zum Erfolg führen:





[nächstes Problem]   [Inhaltsverzeichnis]

Manfred Börgens - Problem 9 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Juni 2001.

10

Das Tennismatch

Anke und Barbara sind die Spitzenspielerinnen in ihrem Tennisverein und spielen oft gegeneinander. Anke spielt etwas schwächer. Aufgrund der bisherigen Spielresultate geht sie davon aus, dass sie einen Satz gegen Barbara in vier von neun Fällen gewinnt.

Anke gehört auch dem Organisationskommittee für die nächste Vereinsmeisterschaft an. Sie rechnet damit, im Finale gegen Barbara antreten zu müssen. Als darüber diskutiert wird, ob das Finale über drei Sätze (zwei Gewinnsätze zum Sieg nötig) oder über fünf Sätze (drei Gewinnsätze nötig) gehen soll, ahnt Anke, dass sie ihre Chancen ein wenig beeinflussen kann.

Sollte sie für ein Dreisatzmatch oder für ein Fünfsatzmatch stimmen?

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, mit der Anke einen Satz gegen Barbara gewinnt, ist $\mathbf{p = 4/9}$.

Ein Tennisspiel wird nicht weiter fortgeführt, sobald eine Spielerin als Siegerin feststeht. Bei einem Dreisatzmatch steht also Anke bereits nach zwei Sätzen fest mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{p^2}$ und erst nach drei Sätzen mit Wahrscheinlichkeit
$\mathbf{(1 - p) \cdot p^2 + p \cdot (1 - p) \cdot p = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p)}$,
denn es kommen nur die Varianten *verloren/gewonnen/gewonnen* und *gewonnen/verloren/gewonnen* in Frage.

Ähnlich geht es bei einem Fünfsatzmatch:
Anke gewinnt die ersten drei Sätze mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{p^3}$, benötigt vier Sätze zum Sieg mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{3 \cdot p^3 \cdot (1 - p)}$ und fünf Sätze mit $\mathbf{6 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^2}$. Der Faktor 6 im letzten Term steht für die Anzahl der Möglichkeiten, die beiden verlorenen Sätze auf die ersten vier Sätze zu verteilen.

Insgesamt gewinnt Anke ein **Drei**satzmatch mit Wahrscheinlichkeit **0.417** und ein **Fünf**satzmatch mit Wahrscheinlichkeit **0.3967**.

Anke hat also bessere Chancen in einem Dreisatzmatch.

Natürlich spielt es in Wirklichkeit keine Rolle, ob das Match nach dem entscheidenden Satz beendet wird oder nicht. Bezieht man jeweils alle drei bzw. fünf Sätze in die Betrachtung ein, so erhält man die *binomialen Wahrscheinlichkeiten*:

Für 2 gewonnene Sätze im Dreisatzmatch $\mathbf{3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)}$, für 3 gewonnene Sätze im Dreisatzmatch $\mathbf{p^3}$, für 3 gewonnene Sätze im Fünfsatzmatch $\mathbf{10 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^2}$, für 4 gewonnene Sätze im Fünfsatzmatch $\mathbf{5 \cdot p^4 \cdot (1 - p)}$, für 5 gewonnene Sätze im Fünfsatzmatch $\mathbf{p^5}$. Summiert man auf, so ergeben sich dieselben Gewinnchancen für Anke wie oben.

Das lässt sich verallgemeinern:

In einem Spiel, das keine Unentschieden zulässt, hat der schwächere Spieler umso bessere Gewinnchancen, je weniger Runden gespielt werden.

Dies soll nun bewiesen werden:

Die Anzahl der Spielrunden ist ungerade (da es immer einen Sieger geben soll), kann also mit $2n + 1$ bezeichnet werden. Hat ein Spieler pro Runde die Gewinnwahrscheinlichkeit p, so gewinnt er nach genau $n + 1$ Runden mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{p^{n+1}}$, nach $n + 2$ Runden mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{(n + 1) \cdot p^{n+1} \cdot (1 - p)}$ usw., allgemein erfolgt ein

Gewinn nach $(n+1)+i$ Runden mit Wahrscheinlichkeit

$$\binom{n+i}{n} \cdot p^{n+1} \cdot (1-p)^i \qquad (i = 0, \ldots, n)$$

Insgesamt beträgt also die Gewinnwahrscheinlichkeit in $2n+1$ Runden

$$w_{2n+1} = p^{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n} \cdot q^i$$

wenn man zur Abkürzung $q = 1 - p$ setzt.

Um festzustellen, ob 2 Runden mehr (also $2n+3$) eine größere, gleiche oder kleinere Gewinnwahrscheinlichkeit erbringen, werden w_{2n+1} und w_{2n+3} verglichen. Es wird gezeigt:

$$\boxed{w_{2n+1} - w_{2n+3} = (p \cdot q)^{n+1} \cdot \binom{2n+1}{n} \cdot (1-2p)}$$

Daraus liest man ab:

$p < {}^1/_2$ --> $w_{2n+1} > w_{2n+3}$

$p = {}^1/_2$ --> $w_{2n+1} = w_{2n+3}$

$p > {}^1/_2$ --> $w_{2n+1} < w_{2n+3}$

Dies ist aber gerade die oben gemachte Behauptung, dass der schwächere Spieler umso bessere Gewinnchancen hat, je weniger Runden gespielt werden.

Die Formel im Kasten beweist man so:

$$w_{2n+1} - w_{2n+3} = p^{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n} \cdot q^i - p^{n+2} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1+i}{n+1} \cdot q^i =$$

$$= p^{n+1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+i}{n} \cdot q^i - \binom{2n+1}{n} \cdot q^{n+1} - (1-q) \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1+i}{n+1} \cdot q^i \right) =$$

$$= p^{n+1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1+i}{n+1} \cdot q^i - \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+i}{n+1} \cdot q^i - \binom{2n+1}{n} \cdot q^{n+1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1+i}{n+1} \cdot q^i + q \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1+i}{n+1} \cdot q^i \right) =$$

$$= p^{n+1} \cdot \left(-q \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n+i+1}{n+1} \cdot q^i - \binom{2n+1}{n} \cdot q^{n+1} + \right.$$

$$\left. + q \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1+i}{n+1} \cdot q^i + \binom{2n+2}{n+1} \cdot q^{n+1} \right) \right) =$$

$$= (pq)^{n+1} \cdot \left(-\binom{2n+1}{n} + 2q \cdot \binom{2n+1}{n} \right) = (pq)^{n+1} \cdot \binom{2n+1}{n} \cdot (1-2p)$$

[nächstes Problem]   [Inhaltsverzeichnis]

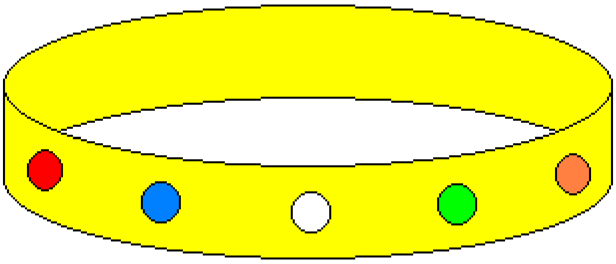
Manfred Börgens - Problem 10 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Juli 2001.

11

Armreif mit Perlen

Ein Versandhaus macht eine Werbeaktion. Es bietet 25.000 Armreife mit eingelassenen farbigen Perlen zu einem Sonderpreis an. Jede Kundin soll in den Besitz eines Unikats kommen: Obwohl bei jedem Armreif die gleichen Perlenfarben verwendet werden, ist die Anordung (Reihenfolge) der Farben bei jedem Reif garantiert einzigartig.



Ansonsten sind alle Armreife in jeder Hinsicht symmetrisch und von gleicher Machart - insbesondere kommen bei allen genau die gleichen Perlenfarben vor. Keine Perlenfarbe kommt auf einem Reif mehr als einmal vor.

Wie viele Perlen muss ein solcher Armreif mindestens haben?

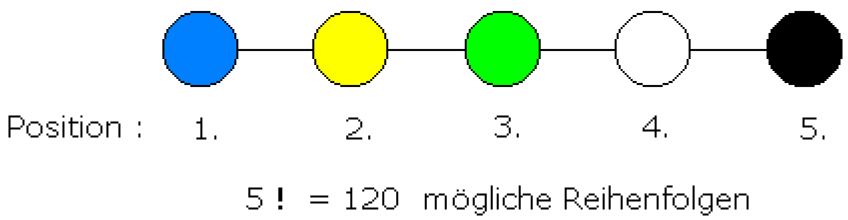
Lösung

Das Versandhaus muss Armreife mit **mindestens 10 Perlen** herstellen.

Es ist hier nach der Anzahl von **Permutationen** gefragt, d.h. es soll die Anzahl aller möglichen Reihenfolgen von angeordneten Objekten (Perlen) bestimmt werden.

Wenn **n** verschiedene Perlen *in einer Reihe* liegen, ist diese Anzahl leicht anzugeben:

Es gibt $\mathbf{n\,! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$ mögliche Reihenfolgen. Das macht man sich klar durch die (induktive) Überlegung, dass ein neu hinzugenommenes ($n + 1$)-tes Objekt in *jeder* der $n\,!$ Anordnungen $n + 1$ Plätze finden kann (zwischen den n schon vorhandenen oder am Rand); somit haben wir nun $n\,! \cdot (n + 1) = (n + 1)\,!$ mögliche Reihenfolgen, was die angegebene Formel für alle natürlichen Zahlen n beweist.

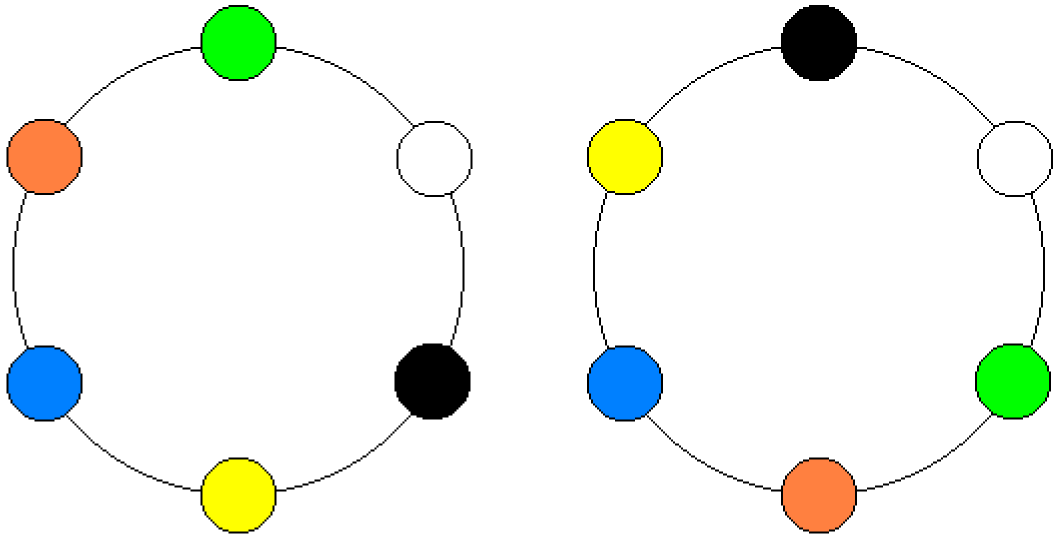


Nun liegen aber die Perlen nicht in einer Reihe, sondern auf einem Reif, also *im Kreis angeordnet*. Es gibt also keinen ersten, zweiten ... oder letzten Platz, da sich der Reif beliebig drehen lässt. Wenn man sich nun vorstellt, dass die Perlen eine nach der anderen platziert werden, so spielt es keine Rolle, wo die erste Perle eingesetzt wird; erst die relativen Positionen der anderen $n - 1$ Perlen zur ersten führen zu unterscheidbaren Reihenfolgen auf dem Reif. So könnte man etwa die weiße Perle immer zuerst einsetzen und dann die übrigen Positionen im Uhrzeigersinn von 1 bis $n - 1$ durchnummerieren:

Man erhält dann **(n - 1) !** mögliche Reihenfolgen der Perlen.

Dieses Problem ist an einer Reihe junger Mathematikerinnen und Mathematiker "ausprobiert" worden. Nicht wenige haben an dieser Stelle aufgehört und (n - 1) ! für die Lösung verwendet; vielleicht deshalb, weil sie schon gelernt hatten, dass man n Leute auf (n - 1) ! verschiedene Weisen um einen runden Tisch setzen kann (wobei "Drehungen" des Tischs mitsamt den Stühlen keine Rolle spielen sollen; zwei Sitzordnungen gelten als gleich, wenn jeder Gast den gleichen Nachbarn zur Linken hat). *Aber das Problem mit den Armreifen ist damit nicht richtig gelöst*.

Wegen der Symmetrie der Armreife ist kein "unterer" oder "oberer" Rand vorgegeben, d.h. man kann einen Reif auf zwei Weisen auf den Tisch legen. Für die Perlen bedeutet das lediglich die Vertauschung von Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn. Es lassen sich also zwei Armreife nur dann als wirklich verschieden auffassen, wenn sie sich nicht zur Deckung bringen lassen, *egal wie man sie hält*. Diese beiden Reife wären somit *keine* Unikate:



In den (n - 1) ! Reihenfolgen für die Anordnung der n Perlen im Kreis gelten aber diese beiden Bilder als verschieden, und so ist es bei allen Anordnungen, die man durch "Herumdrehen" (Kippen) ineinander überführen kann.

Also kommen nur noch **(n - 1) ! / 2** Anordnungen der Perlen in Frage. Diese Zahl soll nun mindestens 25.000 betragen:

(n - 1) ! / 2 > 24.999 also: n > 9

Wenn das Versandhaus also Armreife mit 10 verschiedenfarbigen Perlen herstellt, können die Käuferinnen aller 25.000 Armreife ein Unikat erhalten.

---

nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im September 2001.

12

Der Wandspiegel

Sie möchten sich in einem Wandspiegel vollständig sehen.

(1) Welche Maße (Höhe/Breite) muss der Spiegel mindestens haben?

(2) Wie hoch muss er aufgehängt werden?

(3) Wie hängen die Antworten auf die Fragen (1) und (2) von Ihrer Entfernung vom Spiegel ab?

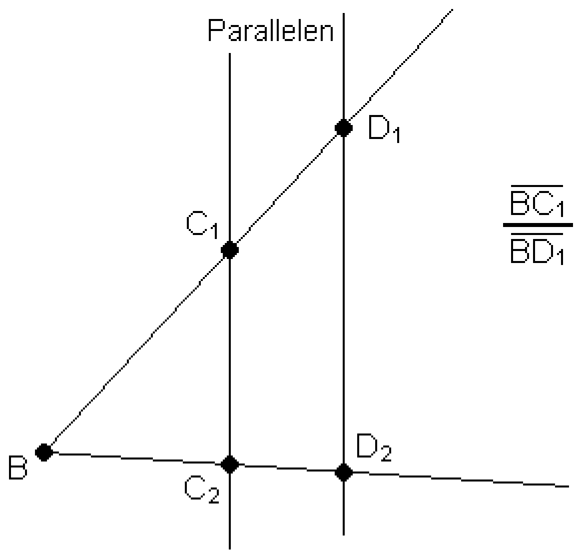
Lösung

1

Für die Lösung muss man nur zwei Sätze kennen, einen physikalischen und einen mathematischen:

1.
Bei der Reflektion an einem Spiegel gilt für den Strahlengang: "Einfallswinkel = Ausfallswinkel", kurz: " E = A " (siehe Bild 3)**.**

2.
Strahlensatz (Bild 1)



$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{BD_1}} = \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{D_1D_2}}$$

Bild 1

2

Zunächst wird eine einfache, für viele praktische Zwecke ausreichende Lösung angegeben, die danach genauer analysiert wird.

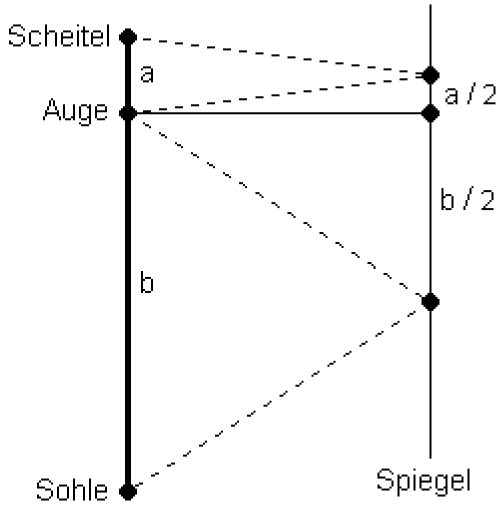


Bild 2

Wegen "E = A" folgt mit Bild 2, wie das kleinstmögliche senkrechte Maß des Spiegels berechnet wird. Dieses Höhenmaß beträgt (a + b) / 2 , also muss der **Spiegel in der Vertikalen die halbe Körpergröße** messen. Sein Fußpunkt muss dann auf der Höhe b / 2 liegen, das heißt, die untere Kante liegt halb so hoch wie die "Augenhöhe".

Ganz wichtig: Für diese Berechnung **spielt es offenbar keine Rolle, wie weit man vom Spiegel entfernt steht** (das sollte man mal mit einem Handspiegel ausprobieren; wenn das Gesicht ganz reinpasst, dann bleibt das so, egal wie weit man den Spiegel weghält).

Damit ist das Problem schon weitgehend gelöst. Man sollte sich aber klar machen, dass bis hierhin die Sache etwas vereinfacht worden ist. So liegen z.B. Scheitel, Auge und Fuß nicht auf einer Geraden wie in Bild 2. Außerdem hat der Mensch zwei Augen, was sich auf die notwendige Breite des Spiegels auswirken könnte, über die bisher noch nicht gesprochen wurde.

③

Wo sieht man ein (nahezu) punktförmiges Objekt T im Spiegel? In Bild 3 habe das Auge B vom Spiegel den Abstand d, T den Abstand t. Wir legen durch B und T eine Ebene senkrecht zum Spiegel:

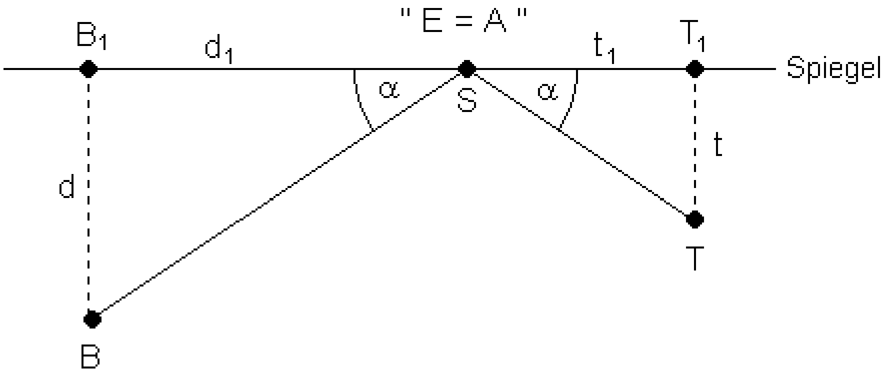


Bild 3

Nach dem Strahlensatz ist dann $d_1 / t_1 = d / t$. Projiziert man also B und T auf den Spiegel (zu B_1 bzw. T_1), so liegt das Spiegelbild von T auf der Verbindungsgeraden von B_1 und T_1 ; die Abstände des Spiegelbilds zu diesen Punkten verhalten sich wie die Abstände von Auge und Objekt vom Spiegel. Sieht man sich das nicht "von oben" wie in Bild 3, sondern "von vorn" an, ergibt sich dieses Bild:

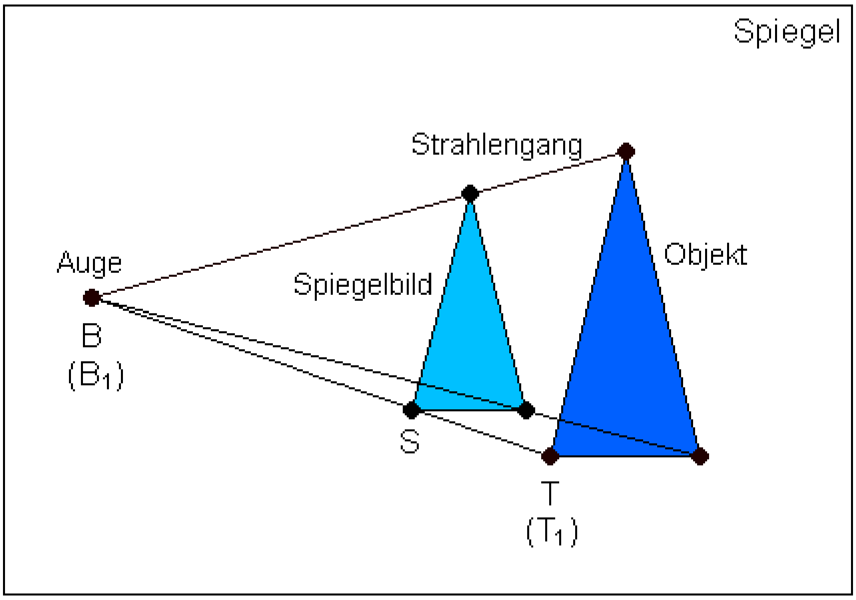


Bild 4

In Bild 4 sieht man das Auge B und das rechte Dreieck parallelprojiziert auf den Spiegel; das linke Dreieck ist das Spiegelbild. Die Strecken BS und BT verhalten sich wie die Abstände von B und T zum Spiegel. Nun kann man bei unserem Ausgangsproblem durchaus davon ausgehen, dass das Auge vom Spiegel die gleiche Entfernung hat wie die übrige Körperfront, so dass sich wieder in guter Näherung die Halbierung der Maße des Spiegelbilds gegenüber dem Objekt (hier Dreieck) ergibt:

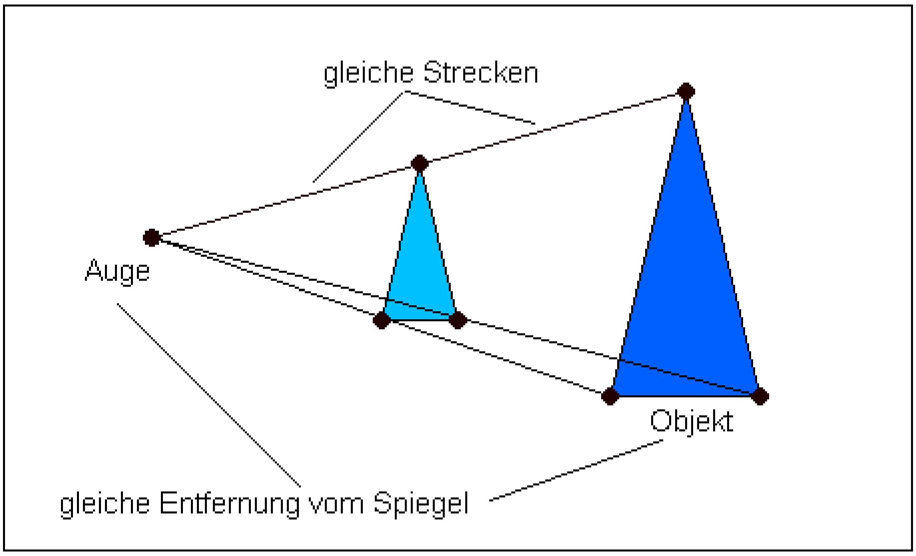


Bild 5

Die "Halbierung" in Bild 2 hängt also nicht davon ab, ob das Auge auf der senkrechten Symmetrieachse der Körperfront liegt (tut es ja auch nicht).

Wichtig bei Bild 5 ist, dass das große Dreieck für irgendeinen Teil der Körperfront stehen kann. Also ist die Frage nach der notwendigen Spiegelbreite geklärt: Der Spiegel muss auch halb so breit wie der Körper sein. Mit einer kleinen Einschränkung: Man möchte vielleicht seinen ganzen Körper *mit beiden Augen* gleichzeitig sehen, d.h. auch dann, wenn das linke oder rechte Auge zugekniffen ist (und ohne dass man sich bewegt).

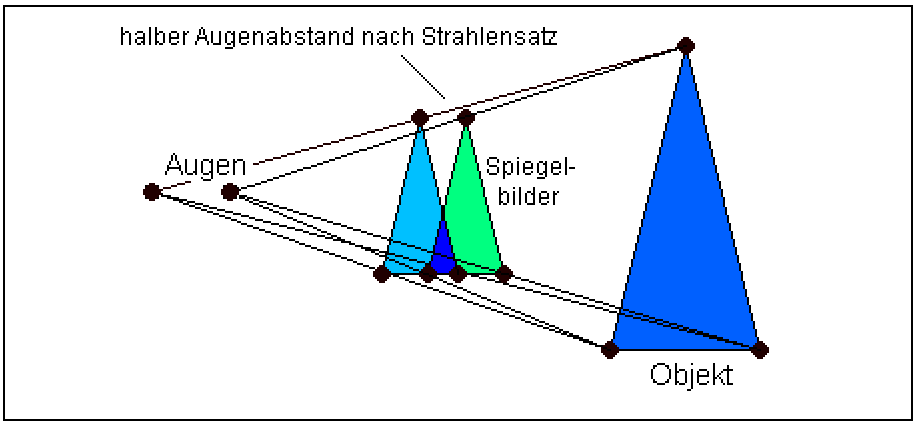


Bild 6

Bild 6 zeigt die gleiche Projektion wie Bild 4 und Bild 5 für zwei Augen. Die **Breite** des Spiegels sollte also betragen:

(Maximale Körperbreite + Augenabstand) / 2

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 12 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Oktober 2001.

13

Wie viele Lügner?

Alle lügen.
Unsere Zahlen sind ein einziges Chaos.
Unsere Statistiken sind weniger zuverlässig als die Horoskope in der Boulevardpresse.

Authentisches Zitat aus dem Brief, den der Direktor der obersten italienischen Statistik-Behörde schrieb, bevor er im Amtszimmer seinem Leben ein Ende setzte.

Einen wichtigen Teil des folgenden Problems verdanke ich einer Anregung von Herrn Dipl.-Math. Georg Arends, der sein Mathematik-Studium 1988 - 1992 an der Fachhochschule Gießen-Friedberg absolvierte.

Auch das Wahrheitsministerium des Staates Veritanien hat Schwierigkeiten mit den Untertanen. Insbesondere ein bestimmtes Wohnviertel in der Hauptstadt fällt immer wieder auf: Von hier kommen besonders viele falsche Steuererklärungen, betrügerische Versicherungsmeldungen, erlogene Angaben bei Volkszählungen usw. Der Minister will ein Exempel an den 210 Bewohnern des Viertels statuieren und weist seine Beamten an, dort N Häuser und in jedem dieser Häuser N Stockwerke auszuwählen, und aus jedem Stockwerk N Personen zum Verhör vorzuführen.

Die Festnahme findet statt, aber die Befragung lässt etwas auf sich warten. Die Häftlinge kennen sich alle gut und sprechen über das bevorstehende Verhör. Es bilden sich zwei Gruppen: Die eine Gruppe will klein beigeben und im Verhör die Wahrheit sagen, die andere Gruppe verabredet, den Beamten des Wahrheitsministeriums Widerstand zu leisten und nur falsche Angaben zu machen.

Beim Verhör wird diese Gruppenbildung von den Beamten schnell erkannt. Man beschließt, jeden einzeln zu fragen, wieviele "Widerständler" unter ihnen sind. Hier sind die ersten Antworten:

"Mindestens vier."
"Mehr als sieben."
"Nicht nur einer."
"Mindestens sechs."
"Alle."
...
...

Nach dieser Befragung stellen die Beamten entnervt fest, dass alle Aussagen verschieden waren; keine zwei unter ihnen bedeuteten dasselbe. Nach Sortierung ergibt sich, dass sie sich (salopp) in folgender Gestalt schreiben lassen (L sei die Anzahl der Widerständler):

$L > 0$
$L > 1$
$L > 2$
...
...
L = "alle"

Wie viele Personen wurden verhört? Wie viele davon haben gelogen?

Lösung

Die Gruppengröße M ist eine Kubikzahl, also $\mathbf{M = N^3}$, aber das Problem lässt sich zunächst ganz unabhängig von dieser Anzahl behandeln.

Zu Beginn ein einfaches konkretes Beispiel: Sei $M = 100$. Dann gibt es 100 Aussagen:

A_n : *"Es gibt mindestens n Lügner."*

Z. B. kann dann A_{37} nicht von einem Lügner sein. Denn wäre A_{37} falsch, so gäbe es mindestens 64 Ehrliche, also auch mehrere Ehrliche, die (wahrheitsgemäß) A_n mit $n > 50$ behaupten, im Widerspruch dazu, dass es höchstens 36 Lügner geben kann.

Diese Argumentation funktioniert für alle $n < 51$.

Andererseits kann beispielsweise A_{53} nicht von einem Ehrlichen stammen. Denn wäre A_{53} wahr, so gäbe es mindestens drei gelogene Aussagen A_n mit $n < 51$, was eben widerlegt wurde.

Diese Argumentation funktioniert für alle $n > 50$.

An dieser Stelle ist Vorsicht geboten! Unser Nachweis, dass z.B. A_{37} nicht von einem Lügner sein kann, bedeutet nicht automatisch, dass diese Aussage von einem Ehrlichen stammt. Denn es könnte doch sein, dass auch dies auf einen logischen Widerspruch führt. In der Tat werden wir weiter unten sehen, dass in manchen Fällen unter den gegebenen Randbedingungen die Aussagen A_1 bis A_M logisch inkonsistent sind, also nicht alle entweder wahr oder falsch sind.

Im Beispiel mit $M = 100$ läuft man allerdings nicht in diese Falle: A_1 bis A_{50} wahr und A_{51} bis A_{100} gelogen ergibt - leicht nachprüfbar - keine logischen Widersprüche, ist also eine richtige Lösung; dann muss sie nach der obigen Argumentation aber auch die einzige Lösung sein.

Dieses Beispiel lässt sich ohne Schwierigkeiten verallgemeinern auf **alle geraden Gruppengrößen M :**

Die Aussagen A_n für $n < {}^M/_2 + 1$ werden von Ehrlichen und für $n > {}^M/_2$ von Lügnern geäußert, d.h. es gibt gleich viele Lügner wie Ehrliche.

Ist **M ungerade**, so gibt es diese gleichmäßige Teilung nicht. Es liegt also nahe, sich die "mittlere" Position $n = {}^{(M+1)}/_2$ genauer anzuschauen (kann man z.B. mit $M = 101, n = 51$ ausprobieren). Wäre für dieses n A_n wahr, so wären natürlich auch für alle kleineren n die Aussagen A_n wahr. Somit gäbe es mindestens n Ehrliche. Wegen A_n wahr gäbe es aber auch mindestens n Lügner, was wegen $2n = M + 1$ nicht stimmen kann. - Nehmen wir umgekehrt an, dass A_n gelogen ist, so muss A_n erst recht für alle größeren n gelogen sein. Also gibt es mindestens n Lügner. Da A_n gelogen ist, gibt es aber auch mindestens n Ehrliche, was wieder wegen $2n = M + 1$ auf einen Widerspruch führt.

Also kann die Gruppengröße M nicht ungerade sein.

Wegen $M = N^3 < 211$ kommen also nur $\mathbf{M = 8}$ und $\mathbf{M = 64}$ in Frage.

$M = 8$ scheidet aus, da alle Aussagen verschiedene Bedeutungen haben sollten, aber für $M = 8$ die Aussagen *"Mehr als sieben"* und *"Alle"* inhaltlich identisch wären.

Es wurden je 4 Stockwerke in 4 Häusern ausgewählt, aus jedem Stockwerk wurden 4 Personen verhört. Von diesen 64 Personen haben genau 32 gelogen.

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 13 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im November 2001.

14

Kryptogramm

In der folgenden Addition stehen verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern:

```
K I N D E R
    L E I N
-----------
K O M M E T
```

Wie viele Kinderlein kommen denn? Anders gefragt: Wie viele Lösungen hat diese Additionsaufgabe?

Lösung

Die Gleichung hat 8 Lösungen:

204675 8704 213379	306592 7906 314498	403576 8703 412279	706483 5806 712289
204765 8604 213369	306952 7506 314458	403756 8503 412259	706843 5406 712249

Es ist reizvoll, alle Lösungen durch ein selbst geschriebenes Programm ermitteln zu lassen. Allerdings dauert es sehr lange, wenn man alle 10 Buchstaben alle Zahlenwerte durchlaufen lässt ($10! = 3.628.800$ Möglichkeiten); eine gewisse Einschränkung ist sinnvoll, z.B. $I = 0$, $O = 1$, $N < 8$.

Eine systematische Ermittlung dieser Lösungen (von Hand) kann z.B. in den folgenden vier Schritten ablaufen:

①
Man fängt mit den (fast) offensichtlichen Dingen an:
$I = 0$
$O = 1$
$1 < N < 8$
$1 < M < 8$

②
Dann sucht man die Lösungen für ein Teilproblem aus der Mitte der Addition:

```
    N D
+   L E
= 1 M M
```

Diese lassen sich schnell aufzählen.

③

Von den Lösungen aus Schritt 2 streicht man diejenigen, für die es keine passenden R und T gibt (Addition der Einerspalte).

④
Nach Schritt 3 sind 9 Buchstaben bestimmt, also bleibt für K nur noch die fehlende Ziffer übrig.

Erläuterungen zu den ersten drei Schritten:

Zu ①
Wegen der Zehnerspalte kann I nur 0 oder 9 sein. Aber 9 kommt wegen KO = KI + 1 nicht in Frage. Also ist I = 0, woraus sofort O = 1 folgt. Alle übrigen Buchstaben sind also > 1. N < 8 gilt, weil aus der Einerspalte kein Übertrag kommen darf. M < 8 folgt aus der Tausenderspalte, denn N + L > 10 (Übertrag!) und N + L < 17 (wegen N < 8).

Zu ②
Addition der Hunderter- und Tausenderspalte:

```
    N D
+   L E
= 1 M M
```

Am einfachsten ist es, die möglichen Werte für M, also 2 ... 7, durchzugehen und passende Paare D, E und N, L zu suchen. D und E können dabei vertauscht werden (siehe Mengenklammern { } in der Tabelle), aber bei N und L kommt es auf die Reihenfolge an (siehe Vektorklammern ( ) in der Tabelle), weil N < 8 gelten muss. In der Tabelle sind also die Spalten von links nach rechts ausgefüllt worden; für M = 7 finden sich keine passenden D, E, N, L :

M	{D, E}	(N, L)
2	{3, 9}	(4, 7) (7, 4) (5, 6) (6, 5)
	{4, 8}	(5, 6) (6, 5)
	{5, 7}	(3, 8)
3	{4, 9}	(5, 7) (7, 5)
	{6, 7}	(4, 8)
4	{5, 9}	(6, 7) (7, 6)
5	{2, 3}	(6, 9) (7, 8)
6	{2, 4}	(7, 9)

Zu ③
In der vorigen Tabelle sucht man nun zu den N passende R, T für die Addition der Einerstelle. Dies geht nur an vier Stellen:

M	**{D, E}**	**(N, L)**	**(R, T)**
2	{3, 9}	(4, 7) (7, 4) (5, 6) (6, 5)	
	{4, 8}	(5, 6) **(6, 5)**	**(3, 9)**
	{5, 7}	**(3, 8)**	**(6, 9)**
3	{4, 9}	(5, 7) (7, 5)	
	{6, 7}	**(4, 8)**	**(5, 9)**
4	**{5, 9}**	**(6, 7)** (7, 6)	**(2, 8)**
5	{2, 3}	(6, 9) (7, 8)	
6	{2, 4}	(7, 9)	

Wegen der Vertauschbarkeit von D und E ergeben sich die anfangs genannten acht Lösungen.

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

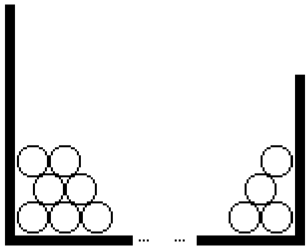
Manfred Börgens - Problem 14 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2001.

15

Eine Kiste voller Münzen

Bei einem der ersten Banküberfälle nach Einführung des Euro war die Beute sehr bescheiden: Lediglich 880 1-Euro-Münzen fielen in die Hände der Bankräuber. Immerhin stand die Sache groß in allen Zeitungen, und so beschloss der Anführer, die Münzen zur Erinnerung aufzubewahren. Er zimmerte ein Kistchen, in das die Münzen genau hineinpassten. Er baute sie in Säulen zu je 10 Münzen auf und stellte diese Säulen Platz sparend nach diesem Muster in die Kiste:



Die vorderste Reihe nahm also genau die Breite der Kiste ein, alle weiteren Reihen wurden "auf Lücke" aufgestellt. Schließlich wurde der Deckel zugemacht.

Jeden Abend schüttelte der Anführer die Kiste, um zu prüfen, ob jemand Münzen entnommen hatte. Da er rundum nur 0,5 mm "Luft" gelassen hatte, war er sicher, dass er auf diese Weise fehlende Münzen sofort bemerken würde. Als er jedoch nach einiger Zeit die Kiste öffnete, fehlten etliche Münzen, obwohl es vorher beim Schütteln nicht gerappelt hatte. Der Anführer sah auch mit einem Blick, wie ihn einer seiner Komplizen reingelegt hatte.

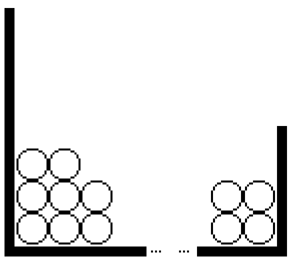
Nämlich wie?

Finden Sie einen Weg, so viele Münzen wie möglich aus der Kiste zu nehmen und den Rest so zurückzulassen, dass der Anführer nichts merkt.

Lösung

Die beste mir bekannte Lösung ist: Man kann 40 Euro wegnehmen.

Es gibt andere - weniger Platz sparende - Anordnungen von Kreisen in der Ebene als die vom Anführer gewählte, die aber trotzdem "stabil" sind, also nicht verrutschen können. Darunter gibt es eine ganz einfache, nämlich die orthogonale Anordnung:



Dabei stehen also in jeder Reihe gleich viele Säulen. Es liegt nahe zu versuchen, eine ursprüngliche Anordnung von 88 Säulen zu einer orthogonalen Anordnung mit weniger Säulen umzustellen.

Dabei gibt es aber eine wichtige Randbedingung (im wahren Sinne des Wortes): Bei der Umordnung müssen die Säulen die Kiste *bis zu den Rändern* ausfüllen, damit sie stabil stehen.

Wie können die 88 Säulen in der Kiste gestanden haben? Wenn in der **vordersten Reihe m Säulen** stehen, dann stehen in der nächsten Reihe m - 1 Säulen, bei **n Reihen** also insgesamt:

$\mathbf{n \cdot m - {}^{n}/_{2} = 88}$ **falls n gerade**

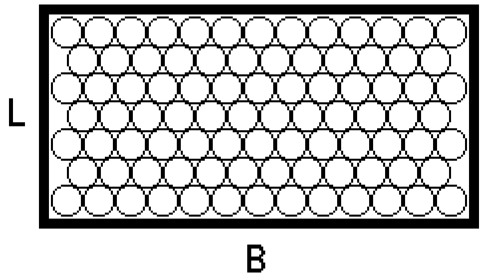
$\mathbf{n \cdot m - {}^{(n-1)}/_{2} = 88}$ **falls n ungerade**

Welche n und m in Frage kommen, hat man schnell durchprobiert. Sie stehen in den beiden ersten Spalten der Tabelle:

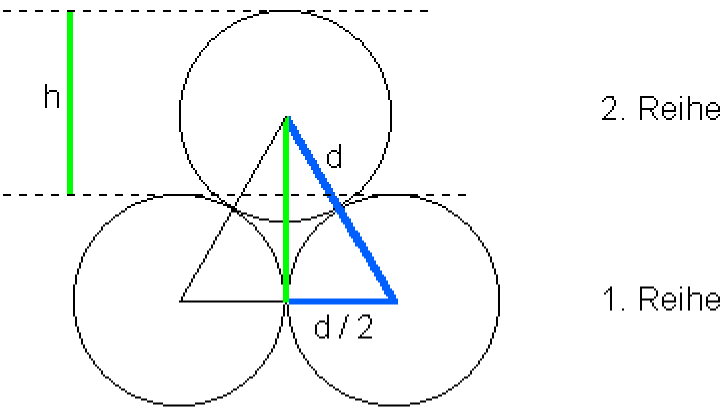
n	m	Kistenlänge L bei dichtester Packung
5	18	4,464 · d
7	13	6,196 · d
16	6	13,990 · d
25	4	21,785 · d
35	3	30,445 · d

(Die letzte Spalte wird weiter unten erklärt.)

Die Kombination (n,m) = (7,13) würde das folgende Bild ergeben:



Ist **d** der **Münzdurchmesser**, dann hat die Kiste die Breite B = m · d . Für die **Länge L** kommt die Randbedingung zum Tragen: L muss ein ganzzahliges Vielfaches von d sein (zumindest sehr nahe daran), damit bei der orthogonalen Anordnung die Säulen exakt in die Kiste passen. L muss also ausgerechnet werden:



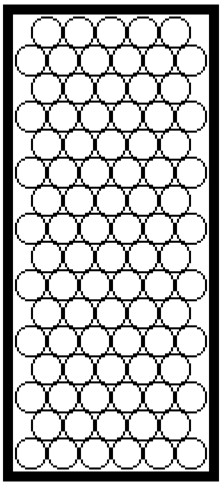
In die Kistenlänge L geht die 1. Säulenreihe mit dem vollen Durchmesser d ein, alle weiteren Reihen nur noch mit h wie zwischen den gestrichelten Linien in der Skizze. Verschiebt man diese Strecke um d / 2 nach unten, so ist h die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, das durch die Kreismittelpunkte gebildet wird. Der Satz des Pythagoras verhilft uns zu

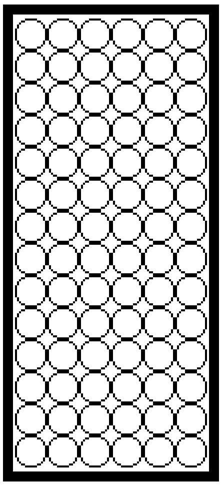
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot d \quad \Rightarrow \quad L = d + (n-1) \cdot h = \left(1 + (n-1) \cdot \sqrt{3}/2\right) \cdot d$$

Mit dieser Formel ergibt sich L in der letzten Spalte der Tabelle oben.

Nur bei **n = 16** ist L sehr nahe an einem ganzzahligen Vielfachen von d. Es fehlt etwa 0,1% von L, also reicht der halbe Millimeter, den der Anführer im Kistenmaß zugegeben hat.

Bei der neuen Anordnung **fehlen 4 Säulen, also 40 Euro**:





[nächstes Problem](#) [Inhaltsverzeichnis](#)

Manfred Börgens - Problem 15 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Januar 2002 zur Euro-Einführung.

16

Perlenketten

Das Versandhaus hat mit den Armreifen großen Erfolg gehabt (siehe Problem 11) und will für das Frühjahrsgeschäft eine ähnliche Aktion starten. Diesmal werden Halsketten angeboten, die wieder alle verschieden sein sollen. Sie bestehen aus einer Schnur ohne Verschluss, auf der im oberen Teil 80 kleine, gleichartige weiße Perlen und im unteren Teil 7 große, verschiedenfarbige sowie 5 große, gleichartige weiße Perlen aufgefädelt sind. Die großen weißen Perlen sollen nicht benachbart sein, sondern jeweils durch mindestens eine farbige Perle getrennt werden.

Wieder soll jede Kundin in den Besitz eines Unikats kommen. Obwohl für jede Kette die gleichen Perlenfarben verwendet werden, ist die Anordnung der Perlen bei jeder Kette garantiert einzigartig.

Wie viele solcher Ketten kann das Versandhaus maximal anbieten?

Lösung

Man ordnet zunächst die farbigen Perlen an. Dafür gibt es **$7! = 5.040$** Möglichkeiten. Für die 5 weißen Perlen gibt es dann 6 mögliche Lücken zwischen den farbigen Perlen sowie 2 Außenpositionen, also insgesamt 8 mögliche Positionen. Für die Verteilung von 5 Perlen auf 8 Positionen gibt es

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$$

Möglichkeiten. Man erhält so $5.040 \cdot 56 = 282.240$ Ketten. Nun lässt sich aber jede Kette von links nach rechts drehen, also sind in Wirklichkeit unter den 282.240 Ketten 141.120 Paare (von zwei identischen Ketten).

Das Versandhaus kann 141.120 verschiedene Ketten anbieten.

Für m farbige und n weiße Perlen erhält man allgemein für die gesuchte Anzahl:

$$\binom{m+1}{n} \cdot \frac{m!}{2}$$

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 16 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Februar 2002.

17

Verschlüsselte Division

Füllen Sie alle Stellen dieser Divisionsaufgabe aus, so dass ein korrektes Ergebnis entsteht:

```
x x x x x x  :  x x x  = ?
x x x
---------
    x x x
    x x x
    -----
      x x x
      x x x
      -----
        x x x
        x x x
        -----
            x x x x
            x x x x
            -------
                  0
```

Lösung

Das Ergebnis ist **1011,1008**.

Zuerst schaut man nach, wo Nullen stehen müssen:

```
x x x x x x  :  x x x  = x 0 x x , x 0 0 x
x x x
-----
    x x x
    x x x
    -----
      x x x
      x x x
      -----
        x x 0
        x x x
        -----
            x 0 0 0
            x 0 0 0
            -------
                  0
```

Jetzt kommt der Kern der Lösung. Der letzte Schritt der Division zeigt, dass der Divisor ein Teiler von x000 sein muss, genauer:

Divisor = $1000 \cdot {}^{x}/_{z} = 2^{3} \cdot 5^{3} \cdot {}^{x}/_{z}$

Dabei sind $x < 10$ und $z < 10$ natürliche Zahlen. Folglich ist der Divisor durch 5 teilbar, endet also auf 0 oder 5. Aber der Pfeil zeigt auf eine Stelle, die die 0 ausschließt. Somit erhält man:

```
x x x x x x  :  x x 5  =  x 0 x x , x 0 0 x
x x x
-----
    x x x
    x x x
    -----
      x x x
      x x x
      -----
        x x 0
        x x 5
        -----
            5 0 0 0
            5 0 0 0
            -------
                  0
```

Es gibt nur einen 3-stelligen Teiler von 5000, der größer als 500 ist, nämlich 625. Diesen setzt man ein:

```
x x x x x x  :  6 2 5  =  x 0 x x , x 0 0 x
6 2 5
-----
    x x x
    6 2 5
    -----
      x x x
      6 2 5
      -----
        x x 0
        6 2 5
        -----
            5 0 0 0
            5 0 0 0
            -------
                  0
```

Die Vervollständigung ist jetzt leicht: Zuerst kann man aus dem vorigen Schritt das Ergebnis 1011,1008 ablesen. Dieses multipliziert man mit 625, um den Dividenden 631938 zu erhalten. Schließlich fügt man noch die fehlenden Ziffern ein:

```
6 3 1 9 3 8  :  6 2 5  =  1 0 1 1 , 1 0 0 8
6 2 5
-----
    6 9 3
    6 2 5
    -----
      6 8 8
      6 2 5
      -----
        6 3 0
        6 2 5
        -----
            5 0 0 0
            5 0 0 0
            -------
                  0
```

[nächstes Problem]   [Inhaltsverzeichnis]

Manfred Börgens - Problem 17 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im März 2002.

18

Fahrradspeichen

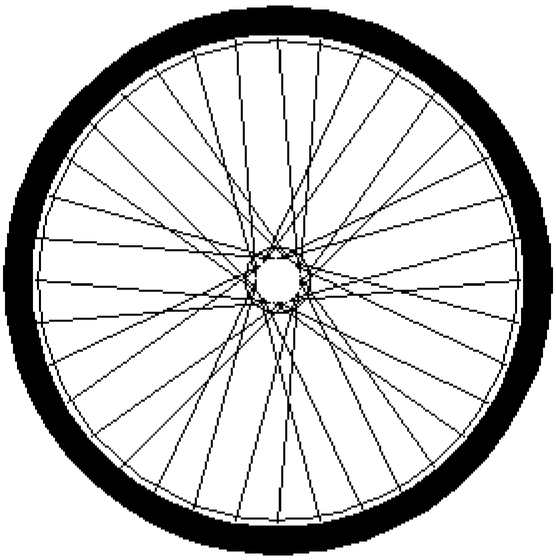
In Filmen scheint es oft so, dass sich bei vorwärts fahrenden Fahrzeugen die Räder rückwärts bewegen oder still stehen. Dies liegt daran, dass der Film keine kontinuierliche Bewegung zeigt, sondern eine diskrete Abfolge von Einzelbildern. Man kann sich das für ein Fahrrad gut veranschaulichen.

Ein Rad eines Fahrrades hat (in vielen Fällen) 36 Speichen, die aber nicht radial angebracht sind, d.h. sie liegen nicht entlang von Kreisradien. Wenn man genau hinschaut, erkennt man, dass sich das Speichenmuster nach der Drehung des Rades um einen bestimmten Winkel zur Deckung bringen lässt (also sich wiederholt); bei vielen gängigen Fahrrädern ist dies ein Winkel von 40°.

Wenn die Filmkamera 24 Bilder pro Sekunde macht, lässt sich ausrechnen, bei welcher Geschwindigkeit eines solchen Fahrrads die Räder im Film stillzustehen scheinen (eine etwas geringere Geschwindigkeit würde dann eine rückläufige Bewegung zeigen).

Berechnen Sie diese Geschwindigkeit für ein 28"-Fahrrad (Raddurchmesser 28 Zoll).

Zusatzfrage: **Wie lässt sich die Geometrie der Speichen beschreiben?** Das Bild zeigt ein typisches Rad mit 36 Speichen und einer 40°-Drehsymmetrie. Auf den ersten Blick ist das Bild verwirrend, aber beachten Sie bitte, dass die Speichen immer abwechselnd auf der Ihnen zugewandten und der abgewandten Seite von Felge und Nabe befestigt sind.



Lösung

In 1/24 Sekunde soll sich das Fahrrad um 1/9 eines Radumfangs (entspricht einem Drehwinkel von 40°) weiterbewegen. Bei einem 28"-Rad beträgt der Umfang etwa 2.2343 m. Sei v die gesuchte Geschwindigkeit. Dann ist

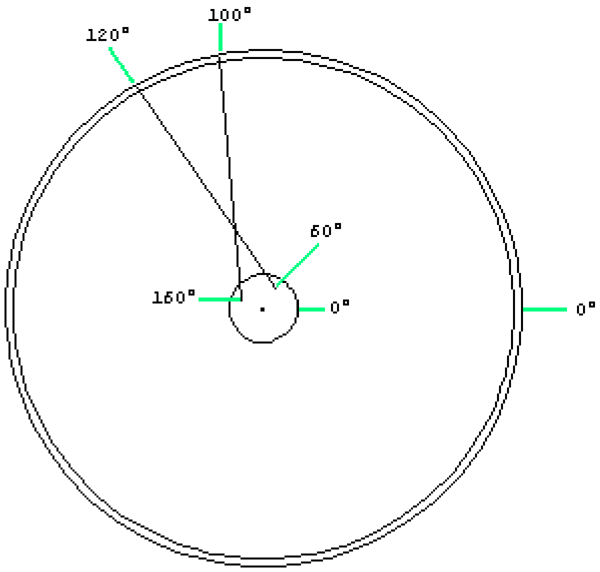
$$v \approx \frac{\frac{1}{9} \cdot 2{,}2343\,\mathrm{m}}{\frac{1}{24}\,\mathrm{s}} \approx 5{,}958\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 21{,}45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Bei dieser Geschwindigkeit scheint das Rad im Film stillzustehen (natürlich auch bei ganzzahligen Vielfachen dieser Geschwindigkeit). Fährt das Fahrrad etwas langsamer, hat das Speichenmuster bei aufeinander folgenden Filmbildern die jeweils vorhergehende Position noch nicht ganz erreicht; dadurch entsteht der Eindruck der

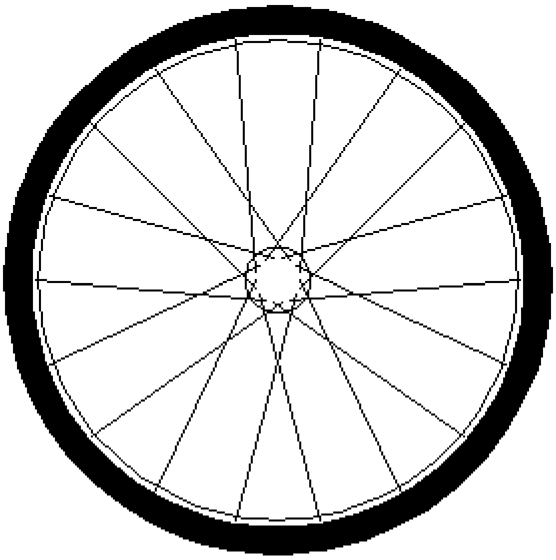
Rückwärts-Drehung.

Zur geometrischen Anordnung der Speichen:
Nicht alle Fahrräder sind gleich konstruiert, aber die folgende Beschreibung gilt für sehr viele gängige Modelle.

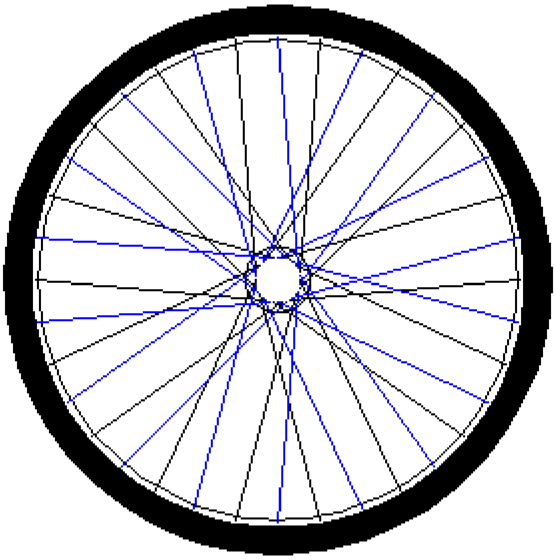
Man findet je 18 Speichen auf jeder Seite der Nabe. Zunächst wird nur eine Seite betrachtet. Dort findet man an Nabe und Felge je 18 Befestigungspunkte im Winkelabstand von 20°; je ein Befestigungspunkt auf Nabe und Felge liegen auf dem selben Kreisradius. Jetzt kommt die entscheidende Beobachtung: Die Speichen, die beim Winkel $x°$ an der Felge befestigt sind, sind an der Nabe abwechselnd beim Winkel $(x-60)°$ und $(x+60)°$ befestigt. Dies ist im folgenden Bild dargestellt:



Die 18 Speichen auf einer Seite ergeben somit das folgende Muster:



Auf der anderen Seite von Felge und Nabe sind weitere 18 Speichen auf die gleiche Weise befestigt; im nächsten Bild sind diese blau gezeichnet. Sowohl die schwarzen als auch die blauen Speichen werden durch eine 40°-Drehung zur Deckung gebracht.



nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 18 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im April 2002.

19

Zahlenfolge

Das folgende Problem lässt sich wohl nur lösen, indem man ein kleines Programm schreibt. Es soll eine Zahlenfolge mit dem folgenden Anfang berechnet werden:

223, 17, 50, 25, 29, 85, 89, ...

Denken Sie erst nach, ehe Sie weiterlesen, vielleicht erkennen Sie das Bildungsgesetz der Folge.

Die eigentliche Aufgabe besteht aber nicht darin, das Bildungsgesetz herauszufinden, deshalb wird es hier sofort verraten: Der Startwert ist beliebig (wir wollen uns aber auf natürliche Zahlen unter 1000 beschränken); *jede weitere Zahl ist dann die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern ihres Vorgängers*.

Durch diese Regel bleibt die Folge immer im Bereich der maximal dreistelligen natürlichen Zahlen. Deshalb ist klar, dass bei jedem Startwert nach der Berechnung einiger (evtl. vieler) Folgenglieder eine Zahl erscheinen muss, die schon einmal vorgekommen ist, und dann kann man aufhören, weil sich eine zyklische Wiederholung von Folgengliedern einstellt.

Hobby-Programmierer (möglicherweise auch Profis) haben jetzt vielleicht Spaß daran, etwas über die Eigenschaften dieser merkwürdigen Folge herauszufinden:

1.
Falls eine Folge bei der 1 angelangt ist, folgen nur noch Einsen nach, z.B.
973, 139, 91, 82, 68, 100, 1, 1, 1, ...
Gibt es außer der 1 noch weitere Zahlen, die auf sich selbst folgen?

2.
Welche anderen Wiederholungsmuster treten noch auf außer
1, 1, 1, ...
..., 10, 1, 1, 1, ...
..., 100, 1, 1, 1, ... **?**

3.
Wegen $9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$ sind alle Folgenglieder außer dem Startwert kleiner als 244. **Welches ist die höchste Zahl, die mehr als einmal in der Folge vorkommen kann?**

4.
Einige Folgen münden sehr schnell in eine Wiederholung:
13, 10, 1, 1, 1, ...
Andere brauchen viel länger; probieren Sie z.B. den Startwert 121.
Wie lang ist der längste "Weg" einer Folge, bis eine Wiederholung auftritt?

5.
Welche "Wiederholungszahl" wird am häufigsten erreicht?

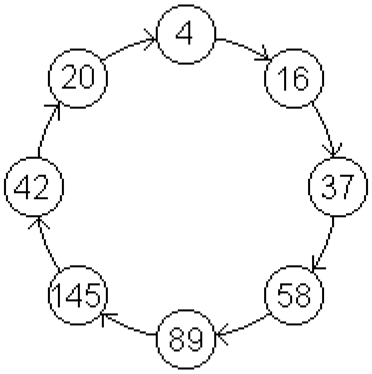
6.
Stellen Sie die möglichen Wiederholungsmuster zusammen mit den auftretenden Weglängen bis zur ersten Wiederholung übersichtlich dar.

7.
Was ändert sich, wenn beliebig große Startwerte zugelassen werden?

Lösung

Probieren Sie einige der 999 möglichen Startwerte aus und beobachten Sie, was geschieht!

Sehr schnell stellt sich eine Vermutung ein: Entweder mündet die Folge in eine 1 und besteht ab da nur noch aus Einsen, oder sie mündet in den folgenden Zyklus ein:



So führt etwa der Startwert 144 auf die Zahl 37; ab dort ist dann die Folge zyklisch:

144, 33, 18, 65, 61, **37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37**, ...

Diese Vermutung lässt sich nun schnell durch ein Programm überprüfen, das alle Startwerte durchgeht. Ein Zwischenergebnis ist dann, dass 142 Startwerte auf die 1 führen und 857 Startwerte auf den obigen 8-Zyklus. Eine genauere Aufteilung enthält die folgende Tabelle:

Wiederholung startet bei:	Anzahl Startwerte
1	142
4	66
16	96
20	9
37	207
42	12
58	54
89	362
145	51

Nur die 9 Zahlen in der linken Tabellenspalte können also wiederholt in einer Folge vorkommen, alle anderen nur einmal. Ein systematisches Vorgehen kann nun für jeden Startwert bestimmen, in welche der 9 "Wiederholungszahlen" die Folge einmündet und wie viele Schritte dafür benötigt werden:

Startwert	mündet in:	Anzahl Folgenglieder bis einschl. erster Wiederholungszahl	Anzahl Folgenglieder bis einschl. erster Wiederholung
1	1	1	2
2	4	2	10
3	37	6	14
4	4	1	9
5	89	5	13
6	89	10	18
7	1	6	7
8	89	6	14
9	37	5	13
10	1	2	3
11	4	3	11
...	...	...	...
999	89	5	13

Mit dieser Tabelle lässt sich nun maschinell abzählen, wie oft die einzelnen Anzahlen in den beiden letzten Spalten für die 9 Wiederholungszahlen (2. Spalte) vorkommen. Diese Zählung ergibt:

Anzahl Folgenglieder bis einschl. erster Wiederholungszahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		Summe
Einmündung in:														
1	1	2	12	36	31	39	21							142
4	1	2	3	33	18	9								66
16	1	2	6	24	21	21	15	3	3					96
20	1	5	3											9
37	1	5	24	33	43	61	34	6						207
42	1	5	6											12
58	1	5	9	27	12									54
89	1	20	12	21	16	42	67	74	63	28	6	12		362
145	1	5	15	30										51
Summe	9	51	90	204	141	172	137	83	66	28	6	12		

Die 999 möglichen Startwerte führen also auf nur 57 verschiedene Konstellationen (ausgefüllte Tabellenfelder).

Anzahl Folgenglieder bis einschl. erster Wiederholung	2	3	4	5	6	7	8
Einmündung in 1	1	2	12	36	31	39	21

Anzahl Folgenglieder bis einschl. erster Wiederholung	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		Summe
Einmündung in:														
4	1	2	3	33	18	9								66
16	1	2	6	24	21	21	15	3	3					96
20	1	5	3											9
37	1	5	24	33	43	61	34	6						207
42	1	5	6											12
58	1	5	9	27	12									54
89	1	20	12	21	16	42	67	74	63	28	6	12		362
145	1	5	15	30										51
Summe	8	49	78	168	110	133	116	83	66	28	6	12		

Man sieht, dass alle Folgenlängen von 2 bis 20 (und nur diese) bis zur ersten Wiederholung vorkommen.

Nun können alle Fragen aus der Aufgabenstellung beantwortet werden:

1. Nein.

2. Nur das zyklische Muster aus dem Bild oben kommt vor; jeweils mehrere Startwerte führen auf jede der Zahlen in diesem Muster.

3. 145

4. 20 (kommt nach der letzten Tabelle 12mal vor, z.B. beim Startwert 269)

5. 89

6. Siehe letzte drei Tabellen.

7. Die Folge mündet für jeden, beliebig großen Startwert in die 1-Folge oder in den 8-Zyklus ein. 4-stellige bis 12-stellige Startwerte führen direkt im ersten Schritt auf eine 3-stellige Zahl; für größere Startwerte kann mit jeder zusätzlichen Stelle des Startwerts maximal 81 beim Folgewert hinzukommen, wodurch sich dessen Stellen um maximal eine vermehren können (also führen 13-stellige Startwerte auf maximal 4-stellige Folgewerte usw.).

---

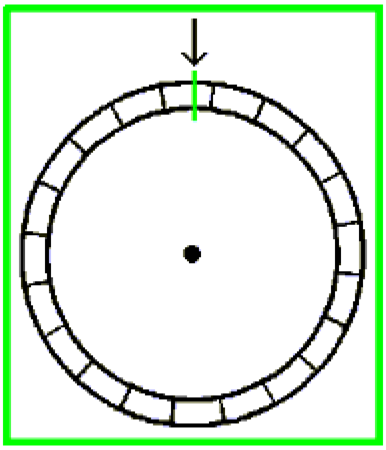
nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

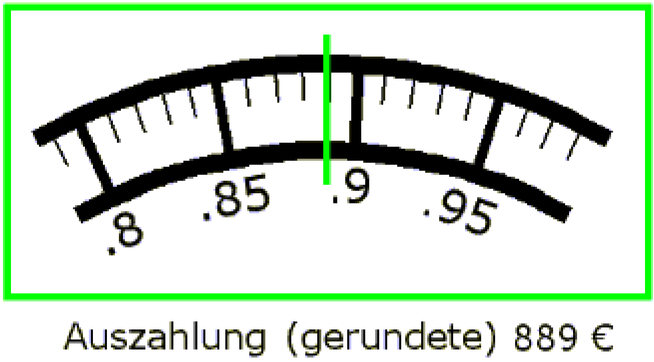
Als E-Dokument veröffentlicht im Mai 2002.

20

Das Glücksrad

Auf dem Rand dieses Glücksrads lassen sich Zahlen zwischen 0 und 1 ablesen. Wenn das Rad zum Stillstand kommt, wird die Zahl am Zeiger oben abgelesen, und der Spieler erhält den entsprechenden Anteil von 1000 Euro. Der faire Einsatz für ein solches Spiel ist dann 500 Euro.





Wir wollen nun zwei Spielvarianten betrachten:

1. Das Maximumspiel

Der Spieler darf n-mal das Glücksrad drehen und erhält den maximalen Betrag der n Einzelspiele. Wie groß ist hier der faire Einsatz?

2. Das Risiko-Spiel

Der Spieler darf maximal n-mal das Glücksrad drehen. Er kann selbst bestimmen, welches sein letztes Einzelspiel ist; er erhält nur die Auszahlung aus diesem Spiel. Welches ist die optimale Strategie für das Risiko-Spiel? Wie groß ist hier der faire Einsatz?

Ein paar Anmerkungen, die Ihnen nützlich sein könnten - lesen Sie nicht weiter, wenn Sie glauben, auch alleine zurecht zu kommen.

Das **Maximum-Spiel** lässt sich leicht mit einem Programm simulieren. Aber auch die mathematische Behandlung ist nicht schwer, wenn man statt der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$, wo x das Maximum aus den n Spielen ist, zunächst die Verteilungsfunktion $F(x)$ = Wahrscheinlichkeit(Maximum $< x$) ausrechnet. Aus der Stochastik ist der Zusammenhang zwischen P und F bekannt. Aus P ergibt sich dann der gesuchte Erwartungswert (fairer Einsatz).

Das **Risiko-Spiel** ist noch interessanter. Für $n = 2$ stellt sich lediglich die Frage, ob der Spieler beim ersten Mal zugreifen oder auf das letzte Spiel hoffen soll. Da der Erwartungswert für das letzte Spiel 500 Euro beträgt, lautet die optimale Strategie: Zugreifen beim ersten Einzelspiel, falls das Glücksrad einen Wert > 0.5 anzeigt. Diesen "Schwellenwert" nennen wir $s_2 = 0.5$.

Für $n = 3$ geht man genauso vor. Was hat der Spieler im Mittel zu erwarten, falls er die erste Chance vorübergehen lässt? Aus dem Fall $n = 2$ wissen wir, dass er die zweite Chance mit Wahrscheinlichkeit $1 - s_2 = 0.5$ nutzt; in diesem Fall kann er im Mittel mit 750 Euro rechnen. Nutzt er die zweite Chance nicht (Wahrscheinlichkeit s_2), erhält er im Mittel $s_2 \cdot 1000$ Euro = 500 Euro. Somit lautet jetzt der Schwellenwert $s_3 = 0.625$.

Man erkennt, dass man zur Berechnung von s_3 nur s_2 benötigt. So fährt man induktiv fort, berechnet s_4 aus s_3 usw. bis s_n. Die optimale Strategie lautet also: Hat man noch k Einzelspiele vor sich, so höre man beim nächsten Einzelspiel auf, wenn das Glücksrad dann mehr als s_k anzeigt.

Nach welcher allgemeinen Formel ergibt sich s_{k+1} aus s_k? Für große k finden Sie (evtl. mit Computerhilfe) eine einfache und gute Näherungsformel für s_k.

Die optimale Strategie liefert den fairen Einsatz gleich mit.

Lösung

Bei einem **Einzelspiel** haben wir es mit einer **Gleichverteilung** auf dem Intervall [0,1] zu tun; der Erwartungswert und damit der faire Einsatz beträgt dann 0.5 bzw. 500 Euro.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Einzelspiel maximal x zu erzielen, ist gleich x. Also ist beim **Maximum-Spiel** mit n unabhängigen Einzelspielen die Wahrscheinlichkeit für ein Maximum von höchstens x: $F(x) = x^n$. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung P ist dann die 1. Ableitung von F: $P(x) = n \cdot x^{n-1}$. Als Erwartungswert erhält man:

$$\int_0^1 x \cdot P(x)\,dx = \frac{n}{n+1}$$

Spielt man also beispielsweise ein Maximum-Spiel mit 4 Einzelspielen, so ist der faire Einsatz 800 Euro.

Für das **Risiko-Spiel** ergeben sich die ersten drei Schwellenwerte schon aus den Anmerkungen zur Problemstellung: $s_3 = 0.625$, $s_2 = 0.5$, $s_1 = 0$. Die Schwellenwerte liefern auch gleich die Erwartungswerte mit: $e_1 = 0.5$, $e_2 = 0.625$ ... (die anderen folgen später). Das soll bedeuten, dass man bei nur einem Einzelspiel im Mittel $e_1 \cdot 1000$ Euro = 500 Euro erzielt und bei (maximal) zwei Einzelspielen $e_2 \cdot 1000$ Euro = 625 Euro. Offenbar ist $e_k = s_{k+1}$. Das liegt daran, dass die Schwelle bei $k + 1$ noch anstehenden Einzelspielen gleich dem zu erwartenden Ertrag ist, wenn der Spieler beim nächsten anstehenden Einzelspiel nicht zugreift.

Wie errechnet sich $s_{k+1} = e_k$ aus s_k? e_k ist der Erwartungswert für k Einzelspiele und lässt sich aufteilen in zwei Fälle: Das anstehende Einzelspiel, also hier das k.-letzte, führt zum Abbruch (geschieht mit Wahrscheinlichkeit $1 - s_k$) oder der Spieler spielt danach weiter (Wahrscheinlichkeit s_k). Im ersten Fall erhält der Spieler eine Auszahlung zwischen s_k und 1 (im Mittel $(s_k + 1) / 2$), im zweiten Fall hat er e_{k-1} ($= s_k$) zu erwarten.

Somit gilt:

$$s_{k+1} = (1 - s_k) \cdot \frac{1}{2}(1 + s_k) + s_k^2$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$s_{k+1} = \frac{s_k^2 + 1}{2}$$

Schwellenwerte für die optimale Strategie und Erwartungswerte für die Auszahlung sind (gerundet) in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

noch zu spielende Einzelspiele:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_k	0	0.5	0.625	0.695	0.742	0.775	0.8	0.82	0.836	0.85
e_k	0.5	0.625	0.695	0.742	0.775	0.8	0.82	0.836	0.85	0.861

Beide Folgen streben gegen 1. Dass ein Grenzwert existiert, folgt aus der oberen Schranke 1 und aus dem monotonen Wachstum:

$$s_{k+1} - s_k = \frac{s_k^2 + 1}{2} - s_k = \frac{(s_k - 1)^2}{2} > 0$$

Wir bezeichnen den Grenzwert mit z:

$$z = \lim_{k \to \infty} s_k = \lim_{k \to \infty} s_{k+1} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{z^2 + 1}{2} \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

Wie findet man eine einfache Näherungsformel für s_k? Eine Tabelle hilft weiter:

k	s_k	$1 - {}^2/_k$
10	0.849821	0.8
50	0.963478	0.96
100	0.981028	0.98
500	0.996055	0.996
1000	0.998015	0.998
5000	0.999601	0.9996

Offenbar ist $1 - {}^2/_k$ eine gute Näherung für s_k, außer für die ganz kleinen k.

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im Juni 2002.

21

Idealer Treffpunkt

Zwei Jahre nach dem Schulabschluss wohnen die meisten der Absolventen des Jahrgangs noch in ihrem Heimatort A, während die anderen in die Stadt B verzogen sind, 40 km entfernt. Ein Jahrgangstreffen soll in einem Ort an der Straße von A nach B stattfinden. Wo liegt der ideale Ort für das Treffen, wenn die Gesamtfahrstrecke aller Absolventen möglichst gering sein soll?

Bevor Sie über diese allgemeine Fragestellung nachdenken, können Sie sich auch zuerst dem konkreten Beispiel mit 20 Absolventen in A und 10 in B widmen.

Lösung

Das Treffen sollte in A stattfinden.

Begründung durch Nachdenken:

Würden gleich viele Absolventen in A und B wohnen, wäre jeder Ort entlang der Strecke gleich gut. Für jeden zusätzlichen Absolventen aus A käme dann dessen Fahrtstrecke hinzu, falls das Treffen nicht in A stattfindet.

Begründung durch Rechnen:

n wohnen in A, m wohnen in B, $n > m$.

Treffen sei in C, k km entfernt von A.

Gesamtfahrstrecke: $2kn + 2(40 - k)m = 2k(n - m) + 80m$

Diese Strecke wird wegen $n - m > 0$ minimal für $k = 0$.

---

nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

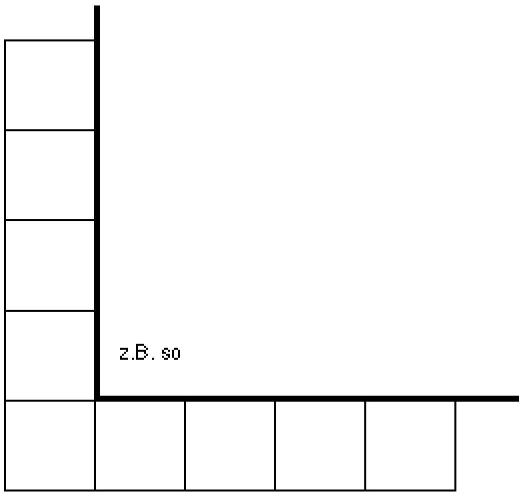
Manfred Börgens - Problem 21 mit Lösung

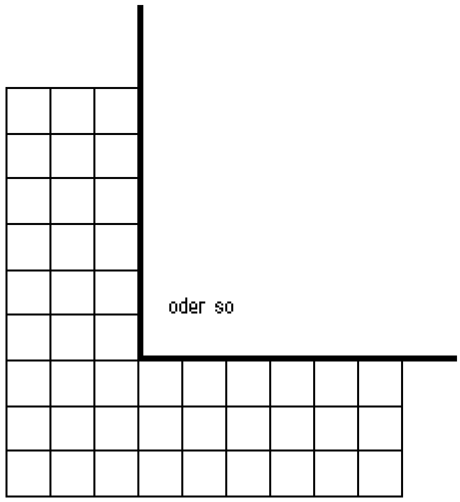
Als E-Dokument veröffentlicht im Juli 2002.

22

Herr L. verlegt Platten

Herr L. will an einer Hausecke den Boden mit quadratischen Platten belegen. Sie sollen ein "L" mit gleich langen "Armen" bilden:





Die Platten sind in 20er-Paketen geliefert worden. Herr L. hat schon mehrere davon ausgepackt, als sein Nachbar, Professor S. (den kennen wir schon vom April 2001), vorbei kommt und zuschaut.

"Wie wollen Sie die Platten verlegen, Herr L.?"

"Am liebsten würde ich alle verlegen und keine übrig lassen. Wie viele Reihen ich legen soll, weiß ich noch nicht so recht."

"Wie viele Platten haben Sie denn?"

"Bisher habe ich 5 zerbrochene gezählt. Ich hoffe, es bleibt dabei."

"Dann haben Sie verschiedene Möglichkeiten für die Verlegung."

Herr L. ist erstaunt über diese Aussage, denn Professor S. hatte noch nicht einmal die Pakete gezählt. Offenbar genügte es für ihn zu wissen, dass jedes Paket 20 Platten enthält.

Herr L. packt auch den Rest aus und findet eine weitere zerbrochene Platte.

"Das ist Pech, Herr L. Jetzt können Sie Ihre Platten nicht mehr vollständig verlegen."

Woher konnte Professor S. das so schnell wissen?

Wenn Sie darüber nachdenken, kommen Sie schnell auf das allgemeine Problem, für welche Plattenzahlen es keine oder genau eine oder mehrere Lösungen gibt.

Welches ist die geringste Anzahl von Platten, die Herrn L. 2 (3, 4, 5) Verlegungsmöglichkeiten erlauben würde?

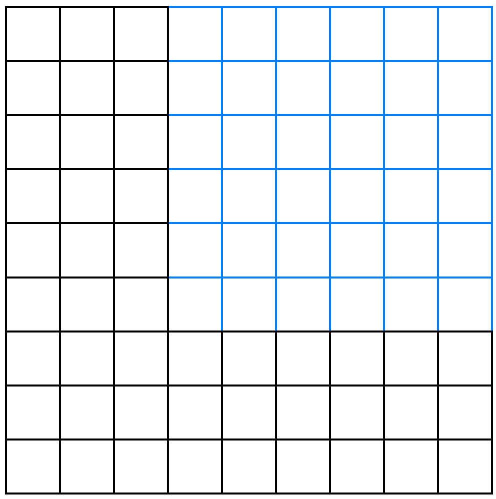
Etwas *Probieren* mit kleinen Plattenzahlen kann hier schon weiterhelfen; man erkennt schnell, wann es keine Lösung gibt.

Lösung

Was wusste Professor S., das Herr L. nicht wusste? Wenn man n Platten hat, kann es offenbar vorkommen, dass es *keine* Verlegungsmöglichkeit gibt (z.B. bei $n = 6$) oder *genau eine* (z.B. bei $n = 7$) oder auch *mehrere* (dafür muss man allerdings etwas länger suchen; z.B. $n = 15$ erlaubt zwei Lösungen). Professor S. wusste nun, wie man beliebige n einer dieser drei Kategorien zuordnet. Da ihm das quasi mit einem Blick auf Herrn L.'s Platten gelang, ist anzunehmen, dass die Regel nicht allzu schwer ist.

Die Plattenlegung des Herrn L. erfolgt in "L-Reihen", also in L-förmigen Plattenreihen; im Bild in der Aufgabenstellung sehen wir links *eine* L-Reihe und rechts *drei* L-Reihen. Da jede L-Reihe aus einer ungeraden Anzahl von Platten besteht, gibt es für (un)gerade n nur Lösungen mit einer (un)geraden Anzahl von L-Reihen (falls es überhaupt eine Lösung gibt).

Die entscheidende Überlegung zu einer systematischen Lösung ist nun, dass sich n als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lässt, also $n = a^2 - b^2$ mit a, b aus den natürlichen Zahlen. Am leichtesten sieht man das geometrisch:



In diesem Bild ist $n = 45$, $a = 9$ (großes Quadrat) und $b = 6$ (kleines Quadrat). $a - b$ ist immer die Anzahl der L-Reihen.

Somit ist das Problem des Herrn L. auf die folgende Frage zurückgeführt: Wieviele Darstellungen hat n als Differenz zweier Quadratzahlen?

Auf diese Fragestellung kommt man übrigens auch, wenn man die Platten in den einzelnen L-Reihen addiert, z.B. im Bild: $n = 13 + 15 + 17$. Generell erhält man so n als *Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen*. Nun ist aus der Mathematik aber bekannt, dass

$1 + 3 + ... + 2k-1 = k^2$ (schönes Beispiel für eine vollständige Induktion);

für unser Beispiel bedeutet das

$n = (1 + 3 + ... + 17) - (1 + 3 + ... + 11) = 9^2 - 6^2$.

n ungerade

Für ungerade n außer $n = 1$ gibt es immer eine Lösung mit genau einer L-Reihe; es bleibt also die Frage, wann diese Lösung eindeutig ist. Wir schreiben n anders auf:

$n = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = p \cdot q$ (p und q beide ungerade)

Kennt man nur die Zerlegung $n = p \cdot q$, so lassen sich a, b leicht rekonstruieren:

$a = (p + q) / 2 \qquad b = (p - q) / 2$

Nun ist man schon am Ziel: Die Zerlegung $n = p \cdot q$ mit $p > q$ ist nur dann eindeutig, wenn es außer $p = n$ und $q = 1$ keine anderen Möglichkeiten gibt. Für *Primzahlen* n ist dies klar. Ist n nicht prim, so darf n nicht zwei *verschiedene* (ungerade) Faktoren $p > 1$ und $q > 1$ haben. Dies gilt aber genau für *Primzahlquadrate*.

Bei den eindeutigen Lösungen ist $a = b + 1$, was gleichbedeutend mit genau *einer* L-Reihe ist. Im linken Bild in der Aufgabenstellung ist $n = 9$, also ein Primzahlquadrat; eine andere Verlegungsmöglichkeit gibt es somit für 9 Platten nicht.

n gerade

p und q unterscheiden sich durch $2b$, müssen also beide gerade sein. n ist also durch 4 teilbar. *Ist n gerade, aber nicht durch 4 teilbar, so gibt es keine Lösung.*

Schreibt man $n = 4m$ mit $m > 1$ (denn auch für $n = 4$ gibt es offenbar keine Lösung), so findet man leicht eine Lösung mit *zwei* L-Reihen:

$p = 2m$, $q = 2$, d.h. $a = m + 1$, $b = m - 1$

(Beispiel: $n = 40 = 20 \cdot 2 = 11^2 - 9^2$)

Es bleibt wieder die Frage, wann diese Lösung eindeutig ist.

Inspiriert durch den Fall "n ungerade" sieht man, dass die Anzahl der Lösungen von $n = 4m = p \cdot q$ wieder von der Anzahl der Teiler von m abhängt. Ist m *prim*, so gibt es wegen $p > q$ (beides gerade Zahlen) keine andere Zerlegung als $n = (2m) \cdot 2$. Das Gleiche gilt, wenn m ein *Primzahlquadrat* ist. In allen anderen Fällen lässt sich m als $m = r \cdot s$ mit $r > s > 1$ schreiben; dann ist $n = (2r)(2s)$ eine weitere Lösung.

Übersicht

keine Lösung	$n = 1$ $n = 4$ n gerade und nicht durch 4 teilbar
eindeutige Lösung, n ungerade	$n > 2$ prim $n > 4$ Primzahlquadrat Lösung: 1 L-Reihe
eindeutige Lösung, n gerade	n durch 4 teilbar, $n = 4m$ m prim oder Primzahlquadrat Lösung: 2 L-Reihen
mehrere Lösungen	alle anderen n : 15, 21, 24, 27, 32, ... Lösungen: 1 L-Reihe (n ungerade) + weitere 2 L-Reihen (n gerade) + weitere

Wie hat Professor S. gerechnet?

Die Platten waren in 20er-Paketen geliefert worden. Wenn 5 Platten zerbrochen sind, ist die Plattenanzahl n durch 5 teilbar. Die einzigen durch 5 teilbaren n mit einer eindeutigen Lösung sind aber 5 und 25.

Sind 6 Platten zerbrochen, so ist n nicht durch 4 teilbar.

Wie viele L-Reihen werden verlegt, welche Länge hat die erste?

Wenn Herr L. die Faktorisierung $n = p \cdot q$ kennt, kann er gleich mit der Verlegung der **ersten L-Reihe** anfangen, indem er $\mathbf{p - q + 1}$ Platten um die Hausecke legt. Denn in der ersten L-Reihe müssen $2b + 1$ Platten liegen, und oben haben wir $b = (p - q) / 2$ berechnet.

Die **Anzahl der L-Reihen** ist offenbar $\mathbf{q = a - b}$.

Wo treten erstmalig 2 (3, 4, 5) Lösungen auf?

Das ermittelt man am besten mit einem kleinen Programm. Die gesuchten kleinsten n sind:

$n = 15$ 2 Lösungen

$n = 45$ 3 Lösungen

$n = 96$ 4 Lösungen

$n = 192$ 5 Lösungen

Für den letzten Fall sollen die Lösungen angegeben werden: Wegen $192 = 2^6 \cdot 3$ ergeben sich die Zerlegungen (man beachte $p > q$, beide gerade):

$192 = 96 \cdot 2 = 48 \cdot 4 = 32 \cdot 6 = 24 \cdot 8 = 16 \cdot 12$

Für $n = 1 ... 100$ erhält man:

27 x keine Lösung

39 x eine eindeutige Lösung

26 x zwei Lösungen

7 x drei Lösungen

1 x vier Lösungen

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

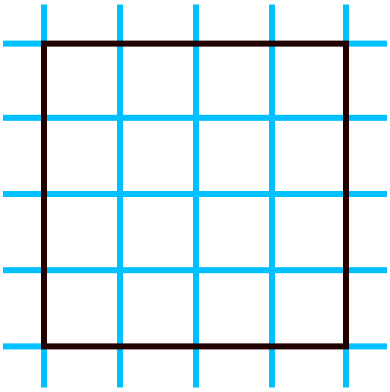
Manfred Börgens - Problem 22 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im September 2002.

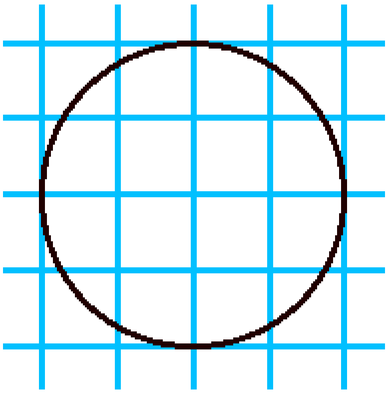
Drahtkonstruktionen

Gezeigt werden drei Drahtkonstruktionen aus jeweils zwei Perspektiven. In den Bildern dienen die blauen Rasterlinien nur der besseren Orientierung, die Drähte sind schwarz.

So sieht es von vorne aus:

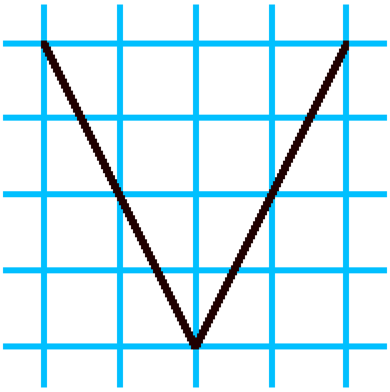


So sieht es von oben aus:

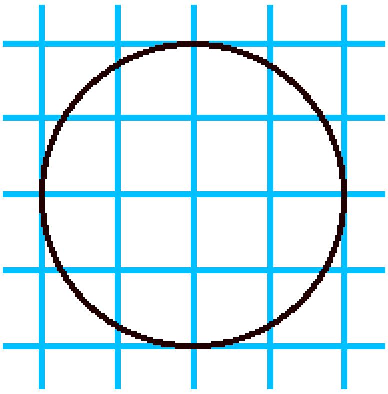


Wie sieht es von der Seite aus?

So sieht es von vorne aus:

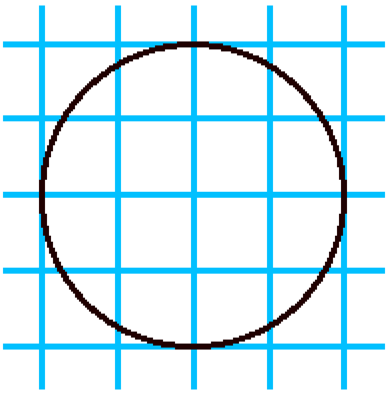


So sieht es von oben aus:

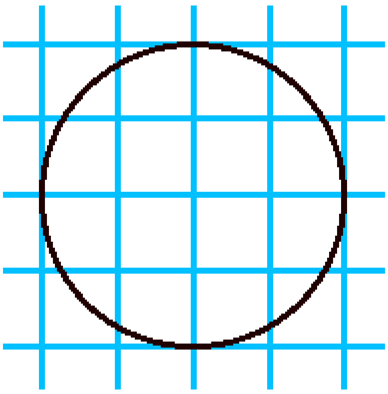


Wie sieht es von der Seite aus?

So sieht es von vorne aus:



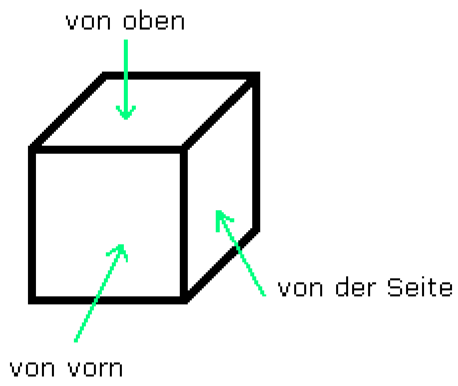
So sieht es von oben aus:



Wie sieht es von der Seite aus?

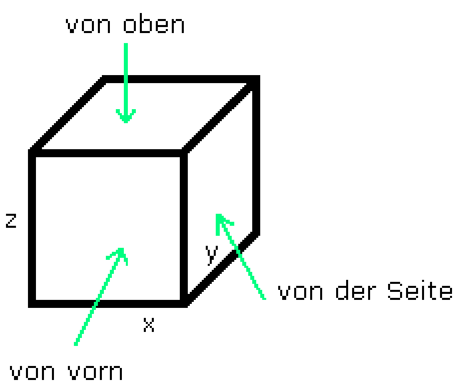
Sie können sich alle drei Gebilde als zusammenhängende Drahtkonstruktionen ohne freie Enden vorstellen, die innerhalb eines Würfels liegen. Legt man in den Bildern oben eine Einheit durch eine Kästchenseite fest, dann hat der Würfel die Kantenlänge 4.

Die Perspektiven soll man sich so vorstellen:



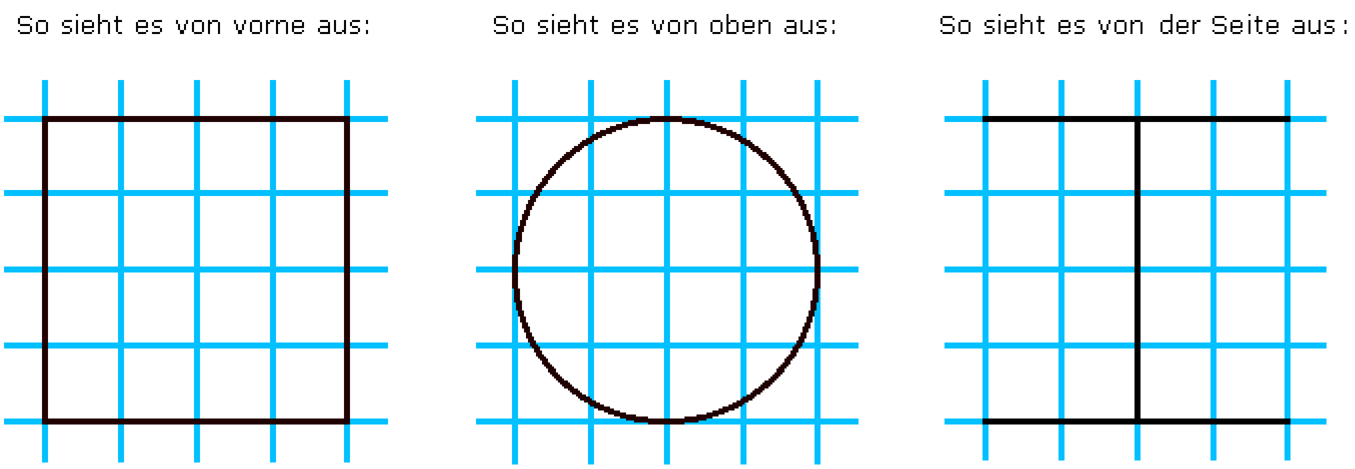
Lösung

Der Einfachheit halber kann man sich den Würfel in R^3 als die Teilmenge [-2,2] x [-2,2] x [-2,2] vorstellen, so dass der Würfelmittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Von oben schaut man dann auf die (x,y)-Ebene, von vorne auf die (x,z)-Ebene und von der Seite auf die (y,z)-Ebene.

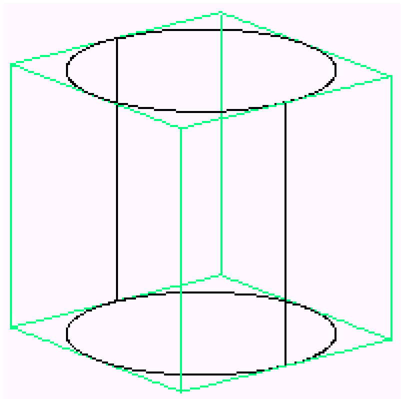


Hier sind die Lösungen:

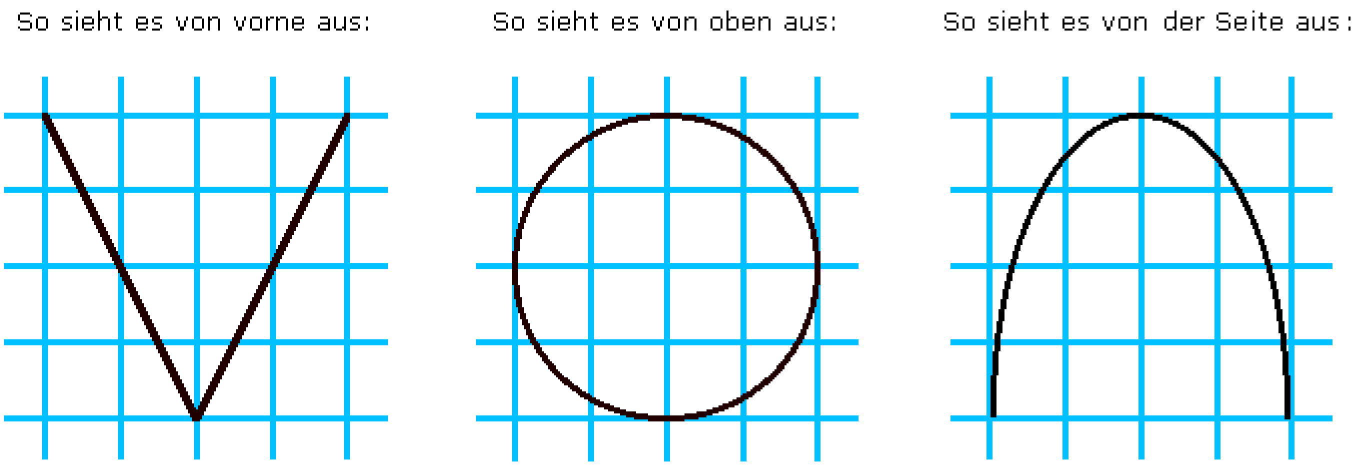
1. Konstruktion



Darstellung aus anderer Perspektive:

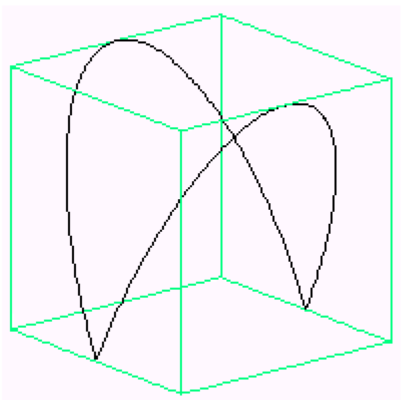


2. Konstruktion



Bei der Seitenansicht handelt sich um eine Halbellipse mit den Halbachsen 2 und 4. Dies wird weiter unten erläutert.

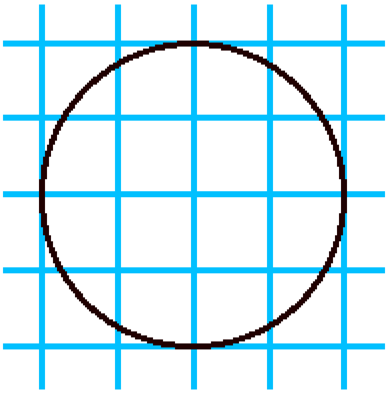
Darstellung aus anderer Perspektive:



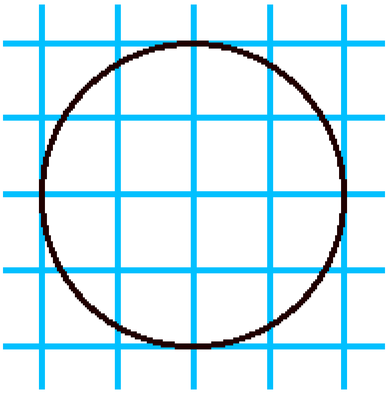
Durch den Kreis (Ansicht von oben) wird aus dem Würfel ein Zylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ ausgeschnitten. Die Ansicht von vorne führt zu zwei Ebenen durch den Würfel mit den Gleichungen $z = -2 - 2x$ und $z = -2 + 2x$. Löst man diese Gleichungen nach x auf und setzt dann in die Zylindergleichung ein, so erhält man $y^2 / 4 + (z + 2)^2 / 16 = 1$. Dies gibt die Seitenansicht wieder und ist die Gleichung der Ellipse mit Mittelpunkt $y = 0, z = -2$ und den Halbachsen 2 und 4. Innerhalb des Würfels kommt $z < -2$ nicht vor, so dass es sich nur um eine Hälfte der Ellipse handelt.

3. Konstruktion

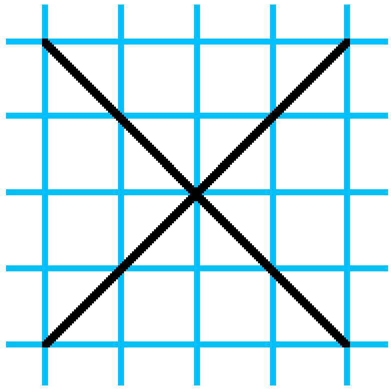
So sieht es von vorne aus:



So sieht es von oben aus:

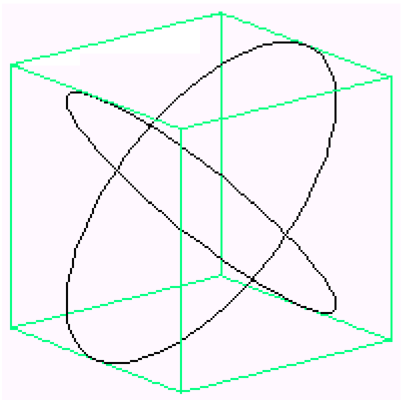


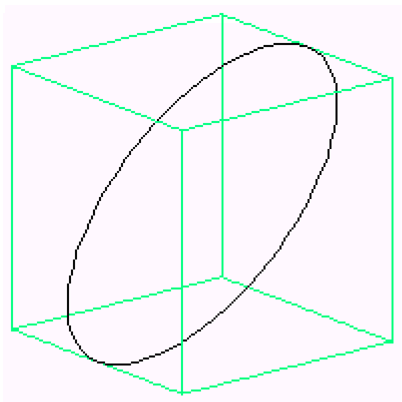
So sieht es von der Seite aus:

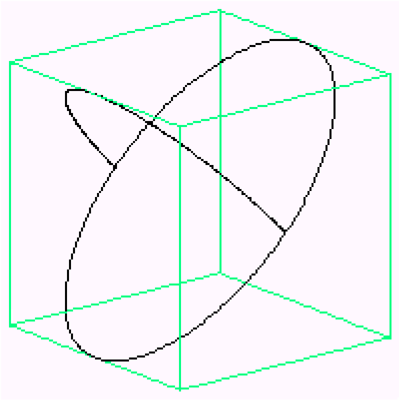


Es gibt auch andere Lösungen für die Seitenansicht:

Darstellungen aus anderer Perspektive:







Die anderen Lösungen erhält man aus den beiden letzten Bildern durch sukzessive 90°-Drehungen um die x-Achse.

---

nächstes Problem Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 23 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Oktober 2002.

24

17 Kamele

Die folgende kleine mathematische Erzählung ist sehr bekannt und sehr alt.

Es lebte in Arabien ein alter Vater, der drei Söhne und 17 Kamele hatte. Als der Greis sein Ende nahen fühlte, versammelte er die Söhne um sich und sprach zu ihnen: "Alles, was ich euch hinterlasse, sind meine Kamele. Teilt sie so, dass der Älteste die Hälfte, der Mittlere ein Drittel und der Jüngste ein Neuntel erhält." Kaum war dies verkündet, da schloss er die Augen, und die Söhne konnten ihn nicht mehr darauf aufmerksam machen, dass sein letzter Wille offenbar unvollstreckbar sei. Siebzehn ist doch eine störrische Zahl und lässt sich weder durch zwei noch durch drei und schon gar nicht durch neun teilen! Doch der letzte Wille des Vaters ist jedem braven Araber heilig. Da kam zum Glück ein weiser Pilger auf seinem Kamel daher geritten, der sah die Ratlosigkeit der drei Erben und bot ihnen seine Hilfe an. Sie trugen ihm den verzwickten Fall vor, und der Weise riet lächelnd, sein eigenes Kamel zu den hinterlassenen zu stellen und die gesamte Herde nach dem letzten Willen des Vaters zu teilen, und siehe da - der Älteste bekam neun der Tiere, der Mittlere sechs, der Jüngste zwei, das waren eben die Hälfte, ein Drittel und ein Neuntel, und auf dem Kamel, das übrig blieb, ritt der Weise - denn es war das seine - lächelnd davon.

In den Überlieferungen wechseln manchmal die Zahlen, z.B. funktioniert die Sache auch mit 11 Kamelen und den Anteilen $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_6$ oder mit 23 Kamelen und den Anteilen $^3/_8$, $^1/_3$, $^1/_4$.

Es stellen sich zwei Fragen:

1.
Nach der Aufteilung des Erbes sind offenbar alle zufrieden. **Aber ist die Aufteilung auch gerecht?**

2.
Warum klappt der Trick des Pilgers eigentlich so gut? Man findet leicht ähnliche Beispiele, bei denen selbst nach der Zugabe von mehreren Kamelen eine ganzzahlige und vollständige Aufteilung des Erbes nicht möglich ist, etwa mit 27 Kamelen und den Anteilen $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_7$. Deshalb lautet die Verallgemeinerung des Problems:

Der Vater vererbt n Kamele auf m Erben, deren Erbanteile rational sind und in der Summe weniger als 1 ergeben. Der Pilger darf k Kamele hinzu geben und erhält sie nach der Erbaufteilung wieder zurück.

Wann geht unter diesen Umständen die Teilung des Erbes glatt auf?

Lösung

Zu 1.

Aus der Erzählung geht hervor, dass vom Erbe nichts übrig bleiben soll, d.h. das Erbe muss vollständig auf die drei Söhne aufgeteilt werden. Durch die Anteile $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_9$ ist aber nur über $^{17}/_{18}$ des Erbes verfügt worden. Die gerechte Lösung ist wohl, die Verhältnisse der Erbanteile untereinander zu wahren (d.h. beispielsweise, dass der zweite Sohn dreimal so viel erhalten muss wie der dritte), indem man sie alle mit dem gleichen Faktor, nämlich $^{18}/_{17}$ multipliziert: Man erhält $^9/_{17}$, $^6/_{17}$, $^2/_{17}$. Das ergibt in der Summe 1 und führt auf genau die gleiche Aufteilung wie die des Pilgers. Hätten die Brüder also einen weisen und mathematisch beschlagenen Richter befragt, hätten sie nicht der Hilfe des Pilgers bedurft.

Fazit: Die Aufteilung ist gerecht, und der Vater war nicht so dumm, wie mancher vielleicht denken mag.

Gilt das auch für andere Zahlenbeispiele?

In 2. wird eine Verallgemeinerung untersucht mit n Kamelen, m Erben und weiteren k Kamelen, die der Pilger hinzu gibt. Die Teilung nach dem Verfahren des Pilgers ist dann immer gerecht (falls sie funktioniert, d.h. wenn nur ganze Kamele verteilt werden und wenn für den Pilger genau seine k Kamele übrig bleiben): Die Erbanteile bezeichnen wir mit $r_1, r_2, \dots r_m$. Dann erhält der i-te Erbe $r_i \cdot (n+k)$ Kamele. Da der Faktor $n+k$ bei allen Erben gleich ist, werden die Verhältnisse der Erbanteile untereinander gewahrt. Die genaue Rechnung sieht so aus:

Gerechterweise zustehen würden dem i-ten Erben

$$\frac{r_i}{\sum_{j=1}^{m} r_j} \cdot n$$

Kamele. Da der Pilger seine k Kamele zurückerhalten soll, muss außerdem gelten:

$$(n+k) \cdot \sum_{j=1}^{m} r_j = n$$

Daraus folgt aber

$$\frac{r_i}{\sum_{j=1}^{m} r_j} \cdot n = r_i \cdot (n+k)$$

Also ist die Erbaufteilung gerecht.

Zu 2.

Das Verfahren des Pilgers ist genau dann erfolgreich, wenn gilt:

a) Nach der Erbaufteilung bleiben genau k Kamele übrig.

b) Die Erbaufteilung ist ganzzahlig.

Da die Erbanteile r_i und die Zahl n vorgegeben sind, ist also nur ein passendes k zu suchen.

Mit den Bezeichnungen

$$r_i = \frac{a_i}{b_i} \quad , \quad \sum_{j=1}^{m} r_j = \frac{a}{b}$$

(a_i, b_i teilerfremd) muss dann wie in 1. gelten: $a / b = n / (n+k)$ und $r_i \cdot (n+k)$ ganzzahlig; letzteres bedeutet, dass alle b_i Teiler von $n+k$ sind. Somit ist (in mathematischer Formulierung) das Verfahren des Pilgers genau dann durchführbar, wenn es eine natürliche Zahl k gibt mit:

a1) $\quad \frac{a}{b} = \frac{n}{n+k}$

b1) $\quad \mathrm{kgV}\{ b_i \}$ ist Teiler von $n+k$

kgV ist dabei das kleinste gemeinsame Vielfache, also hier der Hauptnenner der Brüche. Da in a1) die Darstellung von a / b beliebig ist, lässt sich auch $b = \mathrm{kgV}\{ b_i \}$ wählen. Dann muss aber a ein Teiler von n sein, so dass wir zur folgenden Lösung kommen:

Man addiert alle Erbanteile zu einem Bruch unter Verwendung des Hauptnenners und prüft, ob der Zähler ein Teiler von n ist. Genau in diesem Falle ist eine Erbaufteilung nach dem Verfahren des Pilgers möglich.

Nach a1) ist dann $\mathbf{k = n \cdot ({}^{b}/_{a} - 1)}$.

Falls das zu schnell ging, hier noch einmal der Nachweis der Äquivalenz:

Wenn a1), b1) gilt, dann ist b Teiler von $n + k$ und somit a Teiler von n.

Umgekehrt: Wenn a ein Teiler von n ist, dann wählt man $k = n \cdot (b/a - 1)$ und erhält a1); b teilt dann $n + k$, also ist b1) erfüllt.

Pilger-Trick im engeren Sinne: k = 1

Natürlich lässt sich darüber streiten, ob der Pilger wirklich beliebig viele Kamele hinzu stellen darf. Wem das zu weit von der alten Erzählung weg führt, der mag sich fragen, welche Lösungen es für genau ein Pilger-Kamel gibt. Das lässt sich nun mit den Bezeichnungen von oben leicht angeben, es muss gelten: $a / b = n / (n + 1)$ und b teilt $n + 1$. Da sich aber $n / (n + 1)$ nicht kürzen lässt, wird die Sache einfach:

$\mathbf{a = n}$ und $\mathbf{b = n + 1}$.

"Schöne" Lösungen

Als "schöne" Lösungen werden hier solche bezeichnet, die dem ursprünglichen Problem ganz ähnlich sind, also soll $m = 3$ und $k = 1$ gelten; außerdem sollen nur Stammbrüche (d.h. mit Zähler 1) für die Erbanteile vorkommen. Dann ist klar, dass nur endlich viele "schöne" Lösungen existieren, denn die Nenner dieser Stammbrüche können nicht beliebig groß werden. Genauer: Es muss gelten

$1 / b_1 + 1 / b_2 + 1 / b_3 = n / (n + 1)$ oder $1 / b_1 + 1 / b_2 + 1 / b_3 + 1 / (n + 1) = 1$

Für diese Gleichung findet man schnell genau 12 Lösungen. Unter diesen sind natürlich diejenigen aus der Problemstellung mit 17 und mit 11 Kamelen, aber es geht auch z.B. mit 41 Kamelen und den Anteilen ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_7$.

Aber sind diese wirklich alle "schön"? Offenbar möchte der Vater seine Söhne dem Alter nach in wachsender Höhe bedenken, so dass der Älteste die meisten und der mittlere Sohn die zweitmeisten Kamele erbt. Also sollten keine gleichen Erbanteile vorkommen, wie zum Beispiel in der Lösung mit 9 Kamelen und den Anteilen ${}^1/_2$, ${}^1/_5$, ${}^1/_5$. Dann bleiben nur noch 7 Lösungen übrig:

7 Kamele, Erbteilung ${}^1/_2$, ${}^1/_4$, ${}^1/_8$

11 Kamele, Erbteilung ${}^1/_2$, ${}^1/_4$, ${}^1/_6$ oder ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_{12}$

17 Kamele, Erbteilung ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_9$

19 Kamele, Erbteilung ${}^1/_2$, ${}^1/_4$, ${}^1/_5$

23 Kamele, Erbteilung ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_8$

41 Kamele, Erbteilung ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_7$

Die Pilger-Gewinn-Variante und eine stochastische Lösung

Im Buch *Beremis der Zahlenkünstler* von Malba Tahan gibt es eine Variante unserer Erzählung, in der der Pilger einen Profit einheimst. Dort steht $n = 35$ statt $n = 17$, die Erbanteile sind wie oben. Da 17 kein Teiler von 35 ist, lässt sich das Problem eigentlich nicht lösen, aber im Buch lesen wir, dass der Pilger ein Kamel hinzugibt, den Brüdern ihre Erbschaft zuteilt, nämlich 18, 12 und 4 Kamele, und somit außer seinem eigenen noch ein weiteres Kamel übrig behält. Von diesem Kamel heißt es im Buch:

" ... das andere gehört billigerweise mir, weil ich Euer Problem mit der Erbschaft zur allgemeinen Zufriedenheit gelöst habe." - "Ihr seid wahrhaftig klug, o Fremder!" rief der älteste der Brüder aus. "Mit Eurer Einteilung sind wir vollauf zufrieden, und wir sind auch überzeugt, dass sie gerecht durchgeführt worden ist!" Der listige Beremis - ein Meister der Zahlen - suchte sich alsdann eines der schönsten Kamele der Herde aus ...

Was hätten die Brüder auch anders sagen können? Vielleicht hätte ein weiser Richter ihnen empfohlen, die Aufteilung von 34 Kamelen wie Beremis vorzunehmen und dann für das 35. Kamel 9 weiße Perlen für den Ältesten, 6 blaue Perlen für den Mittleren und 2 gelbe Perlen für den Jüngsten in einen Beutel zu füllen und damit den glücklichen Erben dieses letzten Kamels auszulosen.

Schlussbemerkung zu der alten Erzählung, wie sie in der Aufgabenstellung wiedergegeben wird:

Ist "störrische Zahl" nicht eine hübsche Umschreibung für eine Primzahl?

---

nächstes Problem   Inhaltsverzeichnis

Als E-Dokument veröffentlicht im November 2002.

25

Make 24

Alle, die ungeduldig auf Weihnachten warten, können sich die Zeit mit einem Zahlenspiel vertreiben, das passenderweise "MAKE 24" heißt. Es ist ganz einfach: Man lost vier Zahlen zwischen 1 und 9 aus und muss sie durch die Grundrechenarten zum Ergebnis 24 verbinden.

Ein Beispiel: Gegeben sind 6, 3, 6, 4 .
Dann ist $6 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 24$.

Nun versuchen Sie es selbst mit:

6, 8, 9, 9

1, 3, 4, 6

3, 3, 7, 7

Keine Tricks! Nicht erlaubt sind Fakultäten, Potenzen, Wurzeln usw. Auch dürfen zwei oder drei der vorgegebenen Zahlen nicht zu einer mehrstelligen Zahl zusammengesetzt werden, also wäre etwa $38 - 14$ keine korrekte Lösung, wenn 1, 3, 4, 8 vorgegeben sind. Erlaubt sind nur die vier Grundrechenarten und das Setzen von Klammern.

Lösung

$8 \cdot 9 / (9 - 6) = 24$

$6 / (1 - 3/4) = 24$

$(3/7 + 3) \cdot 7 = 24$

Eine korrekte Lösung für 1, 3, 4, 8 (siehe Aufgabentext) wäre übrigens $8 / (4/3 - 1) = 24$.

Inhaltsverzeichnis

Manfred Börgens - Problem 25 mit Lösung

Als E-Dokument veröffentlicht im Dezember 2002.