ANWENDUNG DER STOCHASTISCHEN SIGNALERKENNUNG AUF DIE STICHPROBENPRÜFUNG KONTINUIERLICHER LOSE

DIPLOMARBEIT

Im Fachgebiet
Mathematische Methoden der Qualitätssicherung

FACHHOCHSCHULE GIEßEN / FRIEDBERG
BEREICH FRIEDBERG

Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und Datenverarbeitung
Studiengang Mathematik
Studienschwerpunkt Mathematik in der Wirtschaft

Sommersemester 2001

Diplomandin:	A. Funda Pekuyar
Referent:	Prof. Dr. Börgens
Korreferent:	Prof. Dr. Ruckelshaußen

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Diplomarbeit selbständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Literatur angefertigt habe.

Friedberg, den 23.2.2001

A. Funda Pekuyar

Danksagung

Für die Betreuung während meiner Diplomarbeit möchte ich meinem Referenten Herrn Prof. Dr. Börgens, meinem Korreferent Herrn Prof. Dr. Ruckelshaußen, für die freundliche Unterstützung und die großzügige Bereitstellung geeigneter Arbeitsmöglichkeiten herzlich danken.

INHALTSVERZEICHNIS

1 EINLEITUNG

In der heutigen Gesellschaft wird Qualitätssicherung immer wichtiger. Sie dient dazu, einen bestimmten Qualitätsstandard bei verschiedensten Produkten zu gewährleisten.
Dies ist nicht nur wichtig für den Hersteller, sondern auch für den Verbraucher. Der Hersteller kann sich dadurch die Abnahme der Produkte durch den Kunden sichern. Auf der anderen Seite kann der Verbraucher nicht nur seine Bedürfnisse befriedigen, sondern auch Gefahren für sich abwenden.
Bei der Sicherung von Qualität spielen verschiedene Faktoren eine Rolle, z. B. die Qualitätskosten, die besonders wichtig sind. Die Erfassung der Qualitätskosten hat grundsätzlich die Kostensenkung zum Ziel, ohne dass die Qualität der hergestellten Produkte darunter zu leiden hat. Der Hersteller wird stets bemüht sein, die Kosten zur Sicherung von Qualität gering zu halten.

Nach einer kurzen Einleitung und Beschreibung des Zieles der Diplomarbeit werden in Kapitel 2 grundlegende Begriffe aus dem Umfeld der Qualitätssicherung erläutert und notwendige mathematische Definitionen in Bezug auf die Qualitätssicherung dargestellt.

In Kapitel 3 wird die stochastische Signalerkennung für diskrete Verteilungen beschrieben. Es wird dabei auf die Grundzüge der stochastischen Signalerkennung, die Payoff-Matrix, den Erwartungswert, den Hauptsatz der Entscheidungstheorie und den erwarteten Gewinn eingegangen.

Die stochastische Signalerkennung auf die Stichprobenprüfung kontinuierlicher Lose wird in Kapitel 4 erläutert. Dies beinhaltet die Beschreibung von Qualitätssicherungs-Kennzahlen, der (r, c)-Optimierung zur Minimierung der Gesamtkosten, des Zusammenhanges zwischen stochastischer Signalerkennung und der (r, c)-Optimierung sowie die Darstellung von kostenminimalen Stichprobenplänen.

Die Berechnung optimaler Stichprobenpläne mit Mathematica wird in Kapitel 5 beschrieben. Es wird sowohl die verwendete Software als auch die damit erstellten Programme erläutert.

1.1 ZIEL DER DIPLOMARBEIT

Ziel der vorliegenden Diplomarbeit ist es, ein mathematisches Modell für die Kostenoptimierung mit Hilfe der stochastischen Signalerkennung für kontinuierliche Lose zu entwickeln und eine Anwendung für die automatische Berechnung dieses Modells unter Verwendung von Mathematica zu realisieren.
Durch diese Optimierung der Stichprobenpläne sollen die Gesamtkosten minimiert werden. Dadurch wird das Ziel verfolgt, für eine feste Stichprobengröße eine optimale Annahmezahl zu bestimmen.

1.2 VORGEHENSWEISE

Die vorliegende Diplomarbeit gliedert sich im wesentlichen in zwei Bereiche.
Im ersten Teil liegt der Schwerpunkt auf der mathematischen Entwicklung eines Kostenoptimierungsmodells für die stochastische Signalerkennung. Dabei wird gezeigt, wie sich die Methoden der Signalerkennung auf die Stichprobenplanung anwenden lassen.
Auf die technische Umsetzung mit Mathematica wird im zweiten Teil ausführlich eingegangen.

Es werden die wichtigsten Begriffe und die notwendigen mathematischen Formeln erläutert. Im Anschluss daran wird der kostenoptimale Stichprobenplan mathematisch definiert.
Die Berechnungsverfahren und Beispiele sind unter Anwendung von Mathematica technisch umgesetzt.

2 BEGRIFFE UND DEFINITIONEN

2.1 GRUNDLEGENDE BEGRIFFE

2.1.1 Qualität

<u>Definition des Begriffes Qualität:</u>
"**Qualität** ist die Gesamtheit von Eigenschaften und Merkmalen eines Produktes oder einer Tätigkeit, die sich auf deren Eignung zur Erfüllung gegebener Erfordernisse beziehen."[1]

Dies bedeutet, dass jeder Verbraucher an ein Produkt unterschiedliche Anforderungen stellt, die er erfüllt sehen möchte. Ein Produkt ist dann ein Qualitätsprodukt, wenn es alle Eigenschaften, die vom Kunden gefordert werden, **ohne „Wenn und Aber“** erfüllt.

Daraus folgt: **Qualität** ist die **Erfüllung von Kundenerwartungen.**

Hohe Qualität	=	Kunde zufrieden
Niedrige Qualität	=	Kunde unzufrieden

In der Vergangenheit waren nicht die Wünsche des Kunden die Grundlage bei der Entwicklung von Produkten, sondern es wurde das entwickelt, was die Ingenieure für technisch umsetzbar und unter Qualitätsgesichtspunkten optimal herstellbar hielten.

Im Lauf der Zeit hat sich aber die Bedeutung des Begriffes Qualität erweitert. Nunmehr spielen die Wünsche des Marktes eine wichtige Rolle. Neben dem Preis des Produktes werden zur Qualität auch Fertigungseigenschaften, wie z. B. Pünktlichkeit, Flexibilität oder Zuverlässigkeit gezählt.[2]

Unter statistischer Qualitätskontrolle versteht man die permanente Überwachung eines Produktionsprozesses mit Hilfe spezieller statistischer Methoden.

[1] Rinne / Mittag; Statistische Methoden der Qualitätssicherung; München 1989
[2] vgl. Wortberg Johannes; Qualitätssicherung in der Kunststoff-Verarbeitung; München 1996

Die Qualitätskontrolle dient somit der Einhaltung bestimmter vorgegebener Sollwerte oder Normen, wobei durch einen rechtzeitigen Eingriff in den Fertigungsprozess Ausschussware weitgehend vermieden oder zumindest auf ein Minimum beschränkt werden kann.[3]

In der folgenden Übersicht wird die Definition des Begriffes Qualität nach DIN 55350 dargestellt:

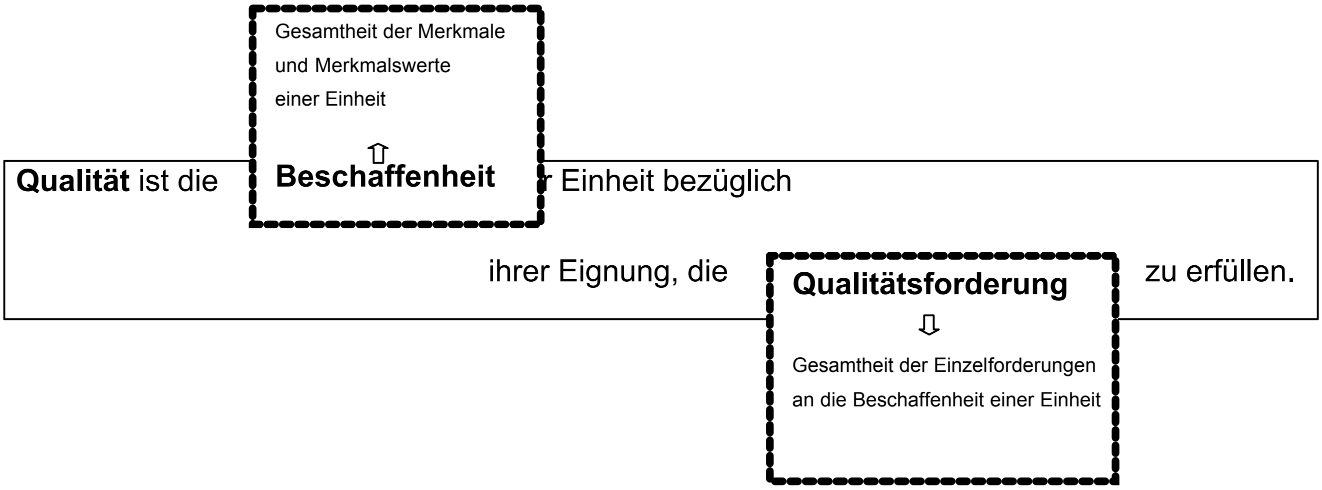

Abbildung 1: Definition der Qualität nach DIN 55350

2.1.2 Qualitätssicherung

Bis etwa 1992 wurde der Begriff Qualitätssicherung im Sinne von Qualitäts-management verwendet. Mit der Anwendung neuer Begriffsdefinitionen nach der DIN ISO 8402 wird Qualitätssicherung heute meist nur noch auf diejenigen produktionsbezogenen Aktivitäten des Qualitätsmanagements bezogen, die dem Nachweis der Erfüllung von Qualitätsforderungen dienen. Nach diesem Begriffsverständnis ist Qualitätssicherung eine Teilfunktion des Qualitätsmanagements. Methoden der Qualitätssicherung sind demnach Verfahren der Vorlaufauswertung, der laufenden Fertigungsüberwachung und der Abnahmeprüfung. Innerhalb der Qualitätssicherung kann man alle auf statistischen

[3] Papula; Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler; Wiesbaden 1999

Verfahren basierenden Aktivitäten unter dem Begriff statistische Qualitätssicherung (SQS) zusammenfassen.

Ziel der SQS:
Die SQS leitet anhand von Stichprobenprüfungen unter Verwendung mathematisch-statistischer Methoden Aussagen über den Grad der Erfüllung von Qualitätsforderungen ab.

Definition des Begriffes Qualitätssicherung:
"**Qualitätssicherung** umfasst alle organisatorischen und technischen Maßnahmen zur Sicherung der Qualität.
Die Qualitätssicherung dient der Einhaltung einer festgelegten Qualität. Sie stellt die Gesamtheit aller Tätigkeiten dar, die zu Erreichung einer bestimmten Qualität bei einem Produkt führen."

Diese sehr allgemeine Begriffsdefinition macht deutlich, dass praktisch alle Unternehmensbereiche an der Qualitätssicherung beteiligt sind, wie z. B. Forschung und Entwicklung, Beschaffung, Produktion sowie Organisation. Qualitätsorientierte Maßnahmen während der Produktion allein können im Allgemeinen nicht das gesetzte Qualitätsziel garantieren.[4]

Das eigentliche Ziel der Qualitätssicherung ist es,

- die Fehler auszuschließen oder
- fehlerhafte Teile auszusortieren.[5]

Bezogen auf ihre Funktion lässt sich die Qualitätssicherung in drei Teilgebiete aufteilen:

- Qualitätsplanung
- Qualitätslenkung
- Qualitätsprüfung.[6]

---

[4] Claus W. / Jessenberger J.; Statistische Methoden zur Qualitätssicherung und -optimierung; New York 1999
[5] Taube, Karl; Statistik in der Qualitätssicherung; Wiesbaden 1996
[6] Massing; Handbuch der Qualitätssicherung; Wien 1980

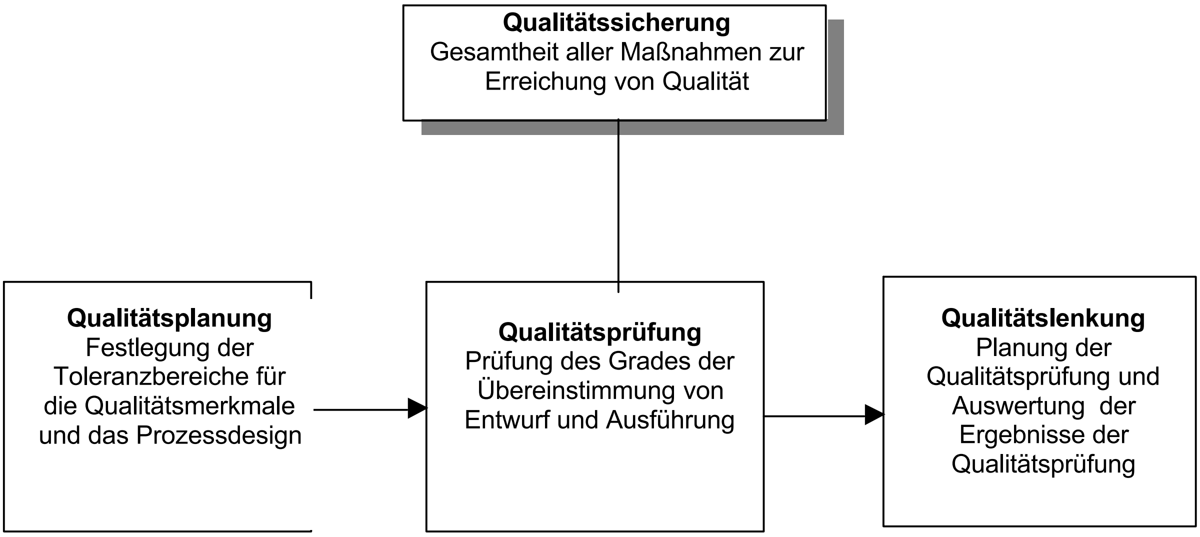

Abbildung 2: Qualitätssicherung und ihre Teilfunktionen

Qualitätsplanung beginnt bereits mit der Prozess- und Produktkonzeption und endet mit dem Herstellungsbeginn. Sie umfasst alle Maßnahmen, die die Produktmerkmale und die Produktherstellung charakterisieren und festlegen.

Bei der **Qualitätsprüfung** wird kontrolliert, in welchem Maße die in der Qualitätsplanung festgestellten Schwankungseigenschaften der Qualitätsmerkmale und die festgelegten Anforderungen während der Produktion gelten. Dafür werden die realisierten Werte der relevanten Merkmale mit den Vorgaben verglichen.

Die Aufgabe der **Qualitätslenkung** ist die Überwachung und mögliche Korrektur der Qualitätsanforderungen während der Herstellung des Produktes. Die Vorgaben kommen aus der Qualitätsplanung, und als Entscheidungshilfe für ein Eingreifen dienen die Ergebnisse der Qualitätsprüfung. Die Qualitätslenkung überspannt den gesamten Produktionsprozess mit Unterstützung der Qualitätsprüfung, die die Qualität an einzelnen Zeitpunkten kontrolliert.[7]

[7] Claus W. / Jessenberger J.; Statistische Methoden zur Qualitätssicherung und -optimierung; New York 1999

2.1.3 DIN-Normen

Um Qualität messbar zu machen, wurden sog. "Normen" eingeführt, die als Richtlinien und zur Sicherung von gewissen Qualitätsstandards dienen.

2.1.3.1 Internationale Normung

Die Internationale Organisation für Normung (ISO) ist die weltweite Vereinigung nationaler Normungsinstitute.
Sie ist ein weltweiter Zusammenschluss, dessen Mitglieder gewählte Vertreter von annähernd 100 nationalen Normungsorganisationen sind. Jede Körperschaft, die Mitglied in der ISO ist, vertritt die Normungsorganisation ihres eigenen Landes. Von jedem Land wird nur eine Körperschaft als Mitglied akzeptiert. Die Bundesrepublik Deutschland wird durch das Deutsche Institut für Normung e.V. (DIN), Österreich durch das Österreichische Normungsinstitut (ÖN) und die Schweiz durch die Schweizerische Normenvereinigung (SNV) vertreten.
Die ISO besteht aus 182 technischen Komitees und 633 Subkomitees, wobei jedes Komitee für ein Normungsprojekt zuständig und verantwortlich ist.[8]

Das Ziel der ISO ist es, die Entwicklung von Normungen zu fördern und den internationalen Austausch von Waren und Dienstleistungen zu erleichtern. Die Ergebnisse der ISO-Arbeit werden in Form von internationalen Normen, Leitfäden und ähnlichen Informationen veröffentlicht.

[8] DIN Taschenbuch 225 Qualitätsmanagement und Statistik; Berlin, Wien 1997

2.1.3.2 DIN ISO 2859

Die DIN ISO 2859 wurde schon in den 40er Jahren als "Military Standard" zur Kontrolle der Rüstungsindustrie in den USA genutzt.

Die ersten Stichprobentabellen und der Begriff Acceptable Quality Level (AQL) wurden unter dem Druck des 2. Weltkrieges von Arbeitsgruppen des amerikanischen Militärs im Jahre 1942 erarbeitet. 1949 wurde aus zunächst unterschiedlichen Normen von Heer und Marine der USA ein gemeinsamer Standard geschaffen, der MIL-STD-105. Weitere Überarbeitungen führten schließlich zum MIL-STD-105D und zum gleichlautenden ABC-STD-105, der nach einer 'American-British-Canadian' Arbeitsgruppe benannt wurde. Danach wurde diese Norm von vielen Ländern als nationale Norm, z.B. als DIN 40080, ÖNORM 6649 und als internationale Norm ISO 2859 übernommen.[9] Die im Jahre 1973 vom Ausschuss Qualitätssicherung und angewandte Statistik herausgegebene DIN 40080 ist eine Übersetzung der internationalen Norm ISO 2859. In den 50er Jahren wurde diese Norm schließlich ins Deutsche übersetzt als sog. DIN-Norm.

Die **DIN ISO 2859** enthält die Verfahren und Tabellen zur Stichprobenprüfung anhand qualitativer Merkmale, das heißt im wesentlichen stellt die Norm Stichprobenpläne und -tabellen bereit. Sie soll als Grundlage und Bezugsquelle für Vereinbarungen zwischen Produzenten und Abnehmern über Stichprobenkontrollen dienen und helfen, den Abschluss von Verträgen zwischen den beiden Partnern zu erleichtern. Von allen Normen zur Annahme-Stichprobenprüfung hat sich diese Norm am stärksten durchgesetzt.

[9] DGQ Statistische Methoden zur Entscheidungsfindung

2.2 MATHEMATISCHE BEGRIFFE

Im Folgenden wird auf die wichtigsten mathematischen Begriffe, die in der Qualitätssicherung Verwendung finden, eingegangen.

2.2.1 Binomial-Verteilung

Grundlage der Binomial-Verteilung ist ein Experiment, das aus einer n-fachen voneinander unabhängigen Wiederholung eines einzelnen Experiments besteht. Bei jedem Einzelexperiment interessieren nur zwei Ereignisse,

- das Eintreten eines zufälligen Ereignisses (A) oder
- das Nicht-Eintreten dieses Ereignisses ($\overline{A}$).

Da immer die gleichen Einzelexperimente wiederholt werden, wird davon ausgegangen, dass in den Einzelexperimenten die gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten.
Ein Experiment dieser Form nennt man **Bernoulli-Experiment**.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten für das Experiment mit beliebigem n (n=1, 2, ...) und p (0<p<1) lauten:

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k} \quad ,$$

wobei die Zufallsgröße $\mathbf{X_n}$ die zufällige Anzahl der Experimente (von insgesamt n), in denen A eintritt, angibt; **k** die Anzahl des Eintretens des Ereignisses A und **n** die Anzahl der durchgeführten Einzelexperimente.
Oft wird **p** auch als Erfolgswahrscheinlichkeit bezeichnet.

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X_n=k)$ mit k=0, 1, ... nennt man **Binomial-Verteilung** mit den Parametern n und p oder $\mathbf{b_{n,p}}$**-Verteilung**:

$$b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$$

Die Verteilungsfunktion der Binomial-Verteilung lautet:

$$B_{n,\,p}(j) = \sum_{k \leq j} b_{n,\,p}(k)$$

Die Binomial-Verteilung wird häufig in der Praxis angewendet, z. B. auch um die Verteilung für die Anzahl von fehlerhaften Stücken in Stichproben des gleichen Umfangs zu bestimmen, so wie es für die statistische Qualitätssicherung notwendig ist.
In der Qualitätssicherung bedeutet das, dass in einer Teilmenge der gesamten Produktion, die den Umfang n hat, jedes Stück mit der Wahrscheinlichkeit p fehlerhaft ist.
Die Wahrscheinlichkeit für genau i fehlerhafte Stücke in der binomialverteilten Teilmenge ist dann also: $b_{n,p}(i)$.

<u>Beispiel:</u>
Ein Winzer füllt seinen Wein zum Verkauf an seine Kunden in Flaschen ab. Bevor die Weinflaschen verkauft werden, will der Winzer wissen, ob der Wein in den Flaschen seinen Qualitätsanforderungen entspricht.
Diese Qualitätsprüfung erfolgt, indem zufällig 8 Flaschen Wein aus der Gesamtproduktion ausgewählt werden und für deren Inhalt die Menge des Alkoholgehaltes des Weines gemessen wird.
Der Wein ist nicht verwertbar, wenn er einen zu hohen oder zu niedrigen Alkoholgehalt aufweist.
Bei der Qualitätsprüfung stellt sich z. B die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass aus der Teilmenge von 8 Weinflaschen zwei oder mehr nicht verwertbar sind?
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche wegen falschen Alkoholgehalt nicht verwertbar ist, wird vom Winzer aus früherer Erfahrung mit 1% angenommen.

Ansatz zur Qualitätsprüfung:

Verwendung der Binomial-Verteilung, denn für jede Weinflasche gilt, dass sie zufällig ausgesucht wurde und dass die Ereignisse „Weinflasche enthält richtige Menge Alkohol“ und „Weinflasche enthält falsche Menge Alkohol“ jeweils mit gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten.

$n = 8$ Umfang der Teilmenge

$p = 0{,}01$ Wahrscheinlichkeit für eine Flasche mit falschem Alkoholgehalt

Berechnung:

$$b_{n,p}(i) = \binom{n}{i} p^i \, (1-p)^{n-i}$$

$$b_{8;0,01}(i) = \binom{8}{i} * 0{,}01^i * 0{,}99^{8-i}$$

$$\sum_{i=2}^{8} b_{8;0,01}(i) = 0{,}00269008$$

Ergebnis der Qualitätsprüfung:

Für den Winzer bedeutet dieses Ergebnis, dass mit circa 0,27% mindestens zwei der acht Weinflaschen nicht verwertbar sind.

2.2.2 Poisson-Verteilung

Die Binomial-Verteilung wird angewendet, wenn die Grundgesamtheit der zu prüfenden Stichprobe aus einer diskreten Menge besteht. Das heißt, die Grundgesamtheit wird als unendlich große Menge von Einzelstücken angenommen, z. B. Weinflaschen, Maschinen, u.s.w.

Soll dagegen eine Stichprobe geprüft werden, deren Grundgesamtheit aus einer kontinuierlichen Menge besteht, z. B. Draht, Pulver oder Flüssigkeit, eignet sich die **Poisson-Verteilung** unter den Voraussetzungen analog der Binomial-Verteilung.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Poisson-Verteilung lautet:

$$p_\lambda(k) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{für } k \in \mathrm{IN}_0$$

Die Verteilungsfunktion der Poisson-Verteilung lautet:

$$P_\lambda(j) = \sum_{k \le j} p_\lambda(k)$$

In der Qualitätssicherung wird die Poisson-Verteilung verwendet, wenn für kontinuierliche Mengen nur die Fehleranzahl in einer Teilmenge oder in einer Stichprobe wichtig ist.

Die Größe der Teilmenge der gesamten Produktion wird nicht angegeben, sondern sie wird als „Einheit" betrachtet. Die Anzahl der Fehler darf somit nicht nach oben beschränkt sein.

Treten im Mittel l Fehler in einer Einheit auf, so wird die Wahrscheinlichkeit für genau k Fehler in dieser Einheit mit **$p_l(k)$** bezeichnet.

Die Fehler müssen zufällig und unabhängig voneinander auftreten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau i Fehler in einer Stichprobe auftreten, die aus einem Anteil r von der Einheit besteht, bezeichnet man mit **$p_{rl}(i)$**.

<u>Beispiel:</u>
Ein Betrieb stellt Spiegel her. Um sicher zu sein, dass an Kunden nur gute Qualität geliefert wird, wurde ein Prüfverfahren eingerichtet.
Eine Teilmenge der Produktion wird vor der Lieferung an den Kunden auf Fehler überprüft.
Der Betrieb weiß aus Erfahrung, dass durchschnittlich pro 10 m^2 eine Luftblase vorkommt, was als Fehler bezeichnet wird.
Die Frage ist nun, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einer Spiegelfläche von 25 m^2 keine Fehler auftreten?

Ansatz zur Qualitätsprüfung:

Verwendung der Poisson-Verteilung, denn die Fehler treten in jeder Teilmenge gleich wahrscheinlich und zufällig voneinander auf.

l = 2,5 Anzahl der durchschnittlichen Fehler pro Teilmenge (d.h. 1 Fehler auf 10 m^2, damit 2,5 Fehler auf 25 m^2)

k = 0 Anzahl der Fehler in der Spiegelfläche von 25 m^2

Berechnung:

$$p_\lambda(k) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$p_{2,5}(0) = e^{-2,5} * \frac{2{,}5^0}{0!} \approx 0{,}0821$$

Ergebnis der Qualitätsprüfung:

Für den Betrieb bedeutet dieses Ergebnis, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von circa 8,2% kein Fehler in der Spiegelfläche mit 25 m^2 Größe auftritt.

2.3 LOSE

Die Teilmenge einer Grundgesamtheit, z. B. ein festgelegter Teil einer gesamten Produktion, wird als **Los** bezeichnet.

Ein Los stellt wiederum die Grundgesamtheit dar, aus der eine Stichprobe gezogen werden soll.

Lose müssen homogen sein, d.h. alle Einheiten eines Loses sollten von der gleichen Maschine und von den gleichen Arbeitskräften in einem bestimmten Zeitraum produziert worden sein. Auch das Ausgangsmaterial sollte das gleiche sein. Die Bildung von Losen kann die Wirksamkeit von Stichprobenkontrollen stark beeinflussen.

Unter der Berücksichtigung der festgelegten Reklamationsgrenze M kann ein Los entweder „gut“ oder „schlecht“ sein.

Ein Los wird als „gut“ bezeichnet, wenn weniger als M Fehler im Los vorhanden sind.

Dagegen wird ein Los als „schlecht“ bezeichnet, wenn im Los die Reklamationsgrenze M erreicht oder überschritten wird.

2.3.1 Diskrete Lose

Diskrete Lose basieren auf diskreten Mengen, die endlich oder abzählbar unendlich groß sind.

Eine diskrete Grundgesamtheit besteht aus der Menge aller Einzelstücke einer Produktion, z. B. aus in Serienfertigung oder Massenproduktion hergestellten Produkten wie beispielsweise Glühbirnen, Flaschen, Bauteilen u.s.w.
Aus dieser Grundgesamtheit wird ein diskretes Los bestimmt, das heißt eine Teilmenge, die aus einzelnen bewertbaren Einheiten einer Produktion besteht. Diese Teilmenge bzw. das diskrete Los kann beispielsweise eine Tages- oder Jahresproduktion, der Inhalt einer Packung oder auch eine Lieferung an einen Kunden sein.
Aus diesem Los wird zu Prüfzwecken eine Stichprobe zufällig gezogen. Das bedeutet, dass zur Prüfung einzelne Stücke als Stichprobe aus einer Teilmenge (diskretes Los) von einer Grundgesamtheit herangezogen werden.

Zur Berechnung der Verteilung der Anzahl der Fehler in einem diskreten Los wird die Binomial-Verteilung verwendet, da sie diskrete Mengen voraussetzt.

2.3.2 Kontinuierliche Lose

Kontinuierliche Lose basieren auf kontinuierlichen Mengen, die unendlich groß sind.

Eine kontinuierliche Grundgesamtheit besteht aus einer kontinuierlich hergestellten Gesamtmenge einer laufenden Produktion, dazu zählen Produkte wie beispielsweise Draht, Garn, Flüssigkeit, Pulver u.s.w.
Wird aus dieser Grundgesamtheit eine Teilmenge mit festgelegter Größe bestimmt, so betrachtet man sie als Einheit der Grundgesamtheit und nennt diese Teilmenge kontinuierliches Los.

Die Größe bzw. der Umfang des kontinuierlichen Loses muss genau festgelegt sein. Das kann beispielsweise der Umfang einer Tagesproduktion, einer Kundenlieferung, den Inhalt einer Flasche oder auch eine Rolle mit Draht sein.

Aus dem kontinuierlichen Los wird zu Prüfzwecken eine Stichprobe zufällig gezogen. Da hier nicht einzelne Stücke vorliegen, ist das „zufällige Ziehen“ einer Stichprobe wesentlich schwieriger als bei diskreten Losen.
In der Praxis wird man beispielsweise bei den Produkten Draht oder Garn wenige und zusammenhängende Stücke von verschiedenen Stellen auswählen.

Da die Poisson-Verteilung kontinuierliche Mengen voraussetzt, verwendet man sie bei der Betrachtung von kontinuierlichen Losen (Einheiten einer Produktion) zur Ermittlung von Verteilungen für Fehlerwahrscheinlichkeiten in einer Produktion bzw. in einer Einheit dieser Produktion.

2.3.3 Unterscheidung zwischen diskreten und kontinuierlichen Losen

In der Wirtschaft werden viele verschiedene Produkte hergestellt, die auf ihre Qualität und somit auf eine vorliegende Fehleranzahl in einer vorher festgelegten Menge zu prüfen sind.
Die hergestellten Produkte lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

- Produkte, die sich anhand von Einzelstücken zählen lassen, z. B. Maschinen, Flaschen, Lampen, u.s.w.
  ® diskrete Mengen
- Produkte, die sich nicht zählen, sondern messen lassen, z. B. Pulver, Flüssigkeit, Draht, u.s.w.
  ® kontinuierliche Mengen

Um nun die Stichproben aus diskreten und kontinuierlichen Losen mit mathematischen Verfahren prüfen zu können, ist es erforderlich, verschiedene wirtschaftliche Begriffe mathematisch zu definieren.

In der folgenden Tabelle werden die notwendigen Definitionen für diskrete und kontinuierliche Lose gegenüber gestellt:

	diskrete Lose	kontinuierliche Lose
Losumfang (Losgröße)	N	Ganzes Los
Durchschnittliche Fehleranzahl pro Los	$p * N$ (0<p<1; p = Wahrscheinlichkeit, dass ein Einzelstück fehlerhaft ist)	l (l Î IR+)
Stichprobenumfang (Stichprobengröße)	n (n£N)	---
Stichprobenanteil am Los	n/N	r (r Î (0,1])
Reklamationsgrenze	M (M = 1, 2, ..., N)	M (M e IN)
Annahmezahl	c (c = min(n- 1, M-1))	c (c = 0, 1..., M-1)
Fehleranzahl im Los	k (k = 0, 1..., N)	k (k e IN_0)
Fehleranzahl in der Stichprobe	i (i = 0, 1..., n)	i (i e IN_0)

2.4 STICHPROBENPRÜFUNG

Überall, wo Güter produziert oder vertrieben werden, wird auch kontrolliert, ob die Qualität der Güter den Anforderungen entspricht. Produzenten sowie Abnehmer sind an Lieferungen mit möglichst guter Qualität interessiert. Durch schlechte Qualität der Güter kann der „gute Name“ des Produzenten leiden und außerdem steigen seine Kosten durch häufige Reklamationen der Kunden.
Auch bei den Abnehmern steigen die Kosten, wenn sie Lieferungen mit schlechter Qualität erhalten. Zwischen Hersteller und Abnehmer wird vereinbart, welche Art von Kontrollen zur Überwachung der Qualität durchgeführt werden sollen.
Das am weitesten verbreitete qualitätssichernde Verfahren ist die Stichprobenprüfung, auch Annahme-Stichprobenprüfung genannt. Bei der Stichprobenprüfung wird nur ein Teil der Erzeugnisse (Stichprobe) geprüft und aus diesem Prüfergebnis auf die Qualität aller Erzeugnisse geschlossen.

Die verschiedenen Arten der Qualitätsprüfung sind im Folgenden dargestellt:

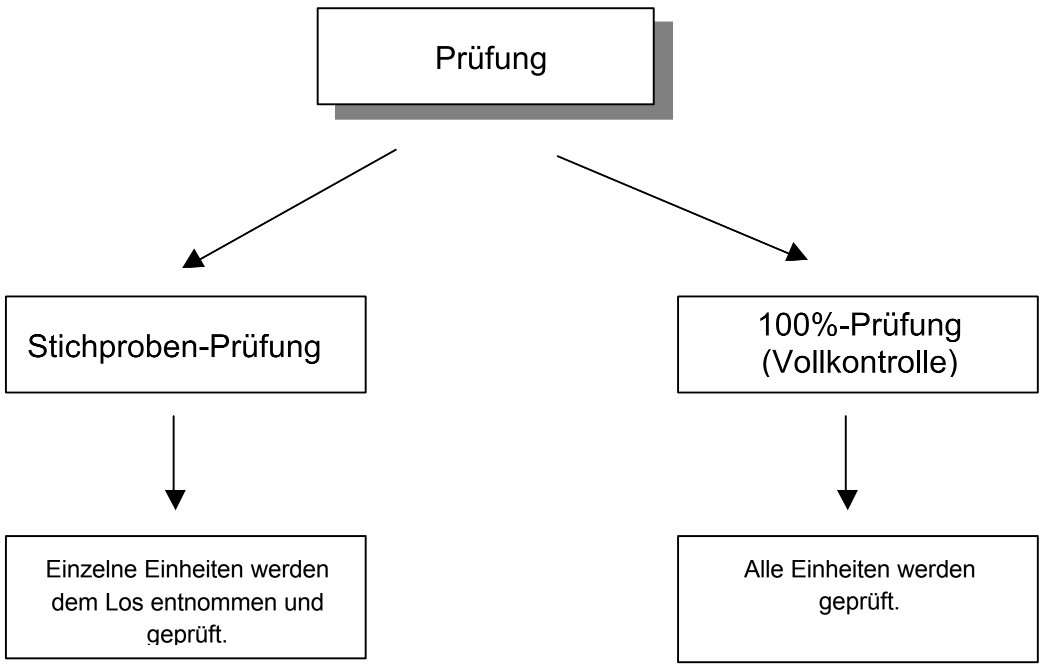

Abbildung 3: Verschiedene Arten der Qualitätsprüfung

Stichprobe:

Eine Stichprobe ist eine zufällig gezogene Teilmenge aus einer Grundgesamtheit oder einem Los. Diese Grundgesamtheit kann aus endlich vielen Elementen oder aus einer kontinuierlich hergestellten Gesamtmenge bestehen.

Die Stichprobenprüfung geschieht anhand von Stichproben mit sogenannten Stichprobenplänen oder Prüfplänen, die Anweisungen enthalten, mit denen über Annahme oder Rückweisung eines Loses[10] entschieden wird.

Eine Stichprobenanweisung enthält den Stichprobenumfang und die Kriterien für die Annahme und die Rückweisung des Loses. Im Stichprobenplan sind Stichproben-anweisungen nach übergeordneten Gesichtspunkten zusammengestellt, beispielsweise nach der annehmbaren Qualitätsgrenze.

Der Stichprobenprüfung steht die 100%-Prüfung (Vollkontrolle) gegenüber.

Eine 100% - Prüfung wird verwendet,

- wenn nur wenige Teile geliefert werden,
- wenn die Folgen von Fehlern die Prüfkosten übersteigen,
- wenn dazu eine Verpflichtung besteht,
- wenn auftretende Fehler zu kritischen Situationen führen können.

Von dieser Methode wird jedoch meist Abstand genommen, weil sie zu zeit- und kostenaufwendig ist.

Vorteile der Stichprobenprüfung:

- geringere Prüfkosten (Prüfzeit, Prüfmittel, Prüfpersonal)
- weniger Bedienungsfehler
- schneller verfügbare Lose
- wenig Prüfpersonal mit besserer Qualifikation
- Motivation durch höherwertige Arbeit
- Signalwirkung durch Rückweisung von Losen
- Bestandsaufnahme bei Hersteller und Abnehmer[11]

---

[10] Los: siehe Kapitel 2.3.1

[11] DGQ 3-18

Nachteile der Stichprobenprüfung:

Bei der Annahme-Stichprobenprüfung nimmt man in Kauf, dass ein Anteil der fehlerhaften Einheiten nicht erkannt wird, denn es wird nicht das gesamte Los, sondern nur eine Teilmenge, die Stichprobe, geprüft. Die damit verbundenen Risiken lassen sich jedoch abschätzen. Kritische Fehler werden jedoch soweit möglich stets in einer 100%-Prüfung geprüft.

Einsatz der Stichprobenprüfung in der Praxis:

Stichprobenprüfung

↓

kann eingesetzt werden

↓

- bei der Eingangsprüfung
- bei der Annahmeprüfung während der Herstellung
- bei der Endprüfung
- im Verwaltungsbereich, z. B. bei Inventuren
- bei der Auswertung von Daten und Berichten

Abbildung 4: Stichprobenprüfung[12]

Die Qualitätsprüfung mit Stichproben kann weitgehend dazu verwendet werden, die Qualität und Annahmefähigkeit eines Produktes zu bestimmen. Es ist fast immer möglich, für diesen Zweck die Stichprobenprüfung zu benutzen. Wenn die Prüfung zerstörend wirkt oder sehr kostspielig ist, kann die Stichprobenprüfung sogar der einzig gangbare Weg sein.

[12]Taube, Karl; Statistik in der Qualitätssicherung; Wiesbaden 1996

Die vier Hauptanwendungsgebiete der Stichprobenprüfung in der Industrie sind:

- <u>Wareneingangskontrolle</u>
  Bestimmung der Qualität und Annahmefähigkeit von eingehendem Rohmaterial, eingehenden Halbfertigprodukten und eingehenden Fertigprodukten.
- <u>Ausgangskontrolle</u>
  Bestimmung der Qualität und Annahmefähigkeit eines den Betrieb verlassenden Produktes.
- <u>Fertigungskontrolle</u>
  Bestimmung der Qualität und Annahmefähigkeit von hergestellten Halbfertigprodukten, die für die Weiterverarbeitung in anderen Betrieben bestimmt sind.
- <u>Qualitätssteuerung im engeren Sinne</u>
  Verbesserung und Kontrolle der Qualität des Produktes.

Für die Prüfung muss eindeutig festgelegt sein, welche Ist-Werte für das zu prüfende Merkmal zugelassen sind. Diese Angaben werden der Prüfspezifikation entnommen.

Erfüllt ein Merkmalswert diese Anforderungen nicht, so handelt es sich um einen Fehler. Jede Einheit der Stichprobe ist gemäß der Prüfspezifikation zu prüfen. Eine Einheit mit einem oder mehreren Fehlern ist eine fehlerhafte Einheit. Eine derartige Prüfung wird an folgenden Beispielen erläutert.

<u>Beispiel 1:</u>
In der Eingangsprüfung werden quadratische Metallplatten auf ihre Maße geprüft. Durch Vergleich der Messwerte der Stärke der Metallplatten mit den Grenzwerten wird festgestellt, ob die Prüflinge die Forderung an die Stärke erfüllen oder nicht. Erfüllt ein Prüfling die Anforderungen nicht, so ist er fehlerhaft.

<u>Beispiel 2:</u>

In einem anschließenden Fertigungseingang werden die Metallplatten lackiert. Die Oberfläche wird danach auf Fehler untersucht. Unter Fehlern versteht man hier die Abweichungen der Homogenität der Oberfläche (z.B. Blasen), die vorgegebene Grenzwerte überschreiten. Die Grenzwerte werden durch Grenzmuster festgelegt. Anhand dieser Grenzmuster wird die Oberfläche begutachtet. Die Anzahl der Fehlstellen = Fehler wird festgestellt. Werden an einer lackierten Metallplatte drei Fehlstellen auf der Oberfläche festgestellt, so handelt es sich um eine Einheit mit drei Fehlern, also um eine fehlerhafte Einheit.

Die Auftragsunterlagen oder die Lieferbedingungen müssen festlegen, ob in der Qualitätsprüfung der Stichprobe die „Fehleranzahl“ oder die „Anzahl der fehlerhaften Einheiten“ festzustellen sind.

2.4.1 Fehlerklassifizierung in Stichproben

Die Bedeutung der möglichen Folgeschäden von unbemerkt gebliebenen Fehlern kann sehr unterschiedlich sein. Die Schwankungsbreite reicht von der Lebensgefahr bis zur Belanglosigkeit. Demzufolge ist es notwendig, für jedes Qualitätsmerkmal festzulegen, welche Bedeutung ein eventuell auftretender Fehler besitzt. Das geschieht durch Zuordnung zu einer Fehlerklasse.

Diese Zuordnung muss im Einzelfall vereinbart werden, wobei mehrere Möglichkeiten bestehen:

- Kritischer Fehler:
  Voraussichtlich Gefährdung von Menschenleben
- Hauptfehler:
  Brauchbarkeit voraussichtlich stark vermindert
- Nebenfehler
  Brauchbarkeit voraussichtlich wenig vermindert

In den Fällen, in denen diese Einteilung nicht ausreicht, kann man die Fehlerarten nochmals unterteilen:

- den Hauptfehler in den
  - Hauptfehler A, der den Verlust des Produktes oder seine Unbrauchbarkeit zur Folge hat
  - Hauptfehler B, der die Brauchbarkeit teilweise beeinträchtigt
- den Nebenfehler in den
  - Nebenfehler A, der die Brauchbarkeit nur wenig beeinträchtigt
  - Nebenfehler B, der die Brauchbarkeit nicht beeinträchtigt, aber nicht vorkommen sollte.

2.4.2 Stichprobenplan

Stichprobenpläne werden bei der Qualitätsprüfung benutzt, um das vorgestellte Material anzunehmen oder zurückzuweisen. Gute Stichprobenpläne werden im Allgemeinen die Annahme von Losen höherer Qualität und die Zurückweisung von Losen niederer Qualität bewirken. Wenn Stichprobenpläne benutzt werden, um Entscheidungen über Lose eines Produktes zu fällen, ist es selbstverständlich notwendig, zu entscheiden, was als hohe bzw. niedrige Qualität eines Loses betrachtet werden soll.

Es gibt einfache, doppelte und mehrfache Stichprobenpläne. Die einfachste Form der Annahme-Stichprobenprüfung ist die Einfach-Stichprobenprüfung, auf die in dieser Diplomarbeit ausführlich eingegangen wird.

Bei dieser Form der Stichprobenprüfung erfolgt die Entscheidung über die Annahme und die Rückweisung des vorgestellten Loses durch die Prüfung einer einzigen Stichprobe. Die Annahme bzw. Zurückweisung des Loses hängt von der Fehleranzahl ab. Ein einfacher Stichprobenplan ist vollkommen festgelegt durch die Losgröße, die Stichprobengröße und durch die Annahme- und Rückweisezahl.

Stichprobenanweisung

- Umfang der zu entnehmenden Stichprobe
- Kriterien für die Feststellung der Annehmbarkeit eines Loses

Annahme	Feststellung, dass die Kriterien des Loses erfüllt sind
Annahmezahl	Höchste Zahl fehlerhafter Einheiten oder höchste Zahl von Fehlern in der Stichprobe (Gutzahl)

Rückweisung	Feststellung, dass die Kriterien des Loses nicht erfüllt sind
Rückweisezahl	Niedrigste Anzahl fehlerhafter Einheiten oder Fehler in der Stichprobe (Schlechtzahl)

Abbildung 5: Stichprobenanweisung, Annahme, Rückweisung[13]

Die Stichprobenanweisung zur Einfach-Stichprobenprüfung für den Anteil fehlerhafter Einheiten lautet:

Stichprobenplan: (r, c)

r: Dies ist die Größe der Stichprobe, welche man als Untermenge aus der Gesamtmenge des ganzen Loses wählt, damit bezeichnet r den zu prüfenden Anteil des Loses. Die Untermenge wird dann auf Fehler geprüft.
Es sollte immer $0 < r < 1$ gelten.

c: Dies ist die Annahmezahl. Das Los wird bei weniger als c oder genau c Fehlern in der Stichprobe "angenommen", dagegen wird bei mehr als c Fehlern das Los "zurückgewiesen" (Rückweisezahl = c+1). Es sollte immer $0 \leq c < M$ gelten.

[13] Taube, Karl; Statistik in der Qualitätssicherung; Wiesbaden 1996

Daraus folgt, dass ein Stichprobenplan (r, c) der folgenden Anweisung entspricht: Ziehe aus jedem Los zufällig einen Anteil r; prüfe Anteil r; zähle die darin festgestellten Fehler. Nimm das Los an, falls weniger als c oder genau c Fehler und weise das Los zurück, falls mehr als c Fehler in der Stichprobe vorhanden sind.

Die durchschnittliche Fehleranzahl pro Los wird als betrieblicher Grundparameter l bezeichnet wobei l Î IR^{+}.
l existiert nur dann, wenn der Produktionsprozess beherrscht ist.
„Produktionsprozess beherrscht“ bedeutet, dass die Gesamte Produktion in Übereinstimmung mit einer theoretischen Verteilung steht; hier mit der Poisson-Verteilung (Fehleranzahl). Die Fehleranzahl bleibt weitgehend konstant und streut zufällig. Die Stabilität der Fehlerzahl kann mit statistischen Messverfahren kontrolliert werden.

<u>Beispiel für einen Stichprobenplan (r, c):</u>
Ein Betrieb produziert einen fortlaufenden Metalldraht. Die Grundgesamtheit besteht hier folglich aus einem unendlich langen Draht. Ein Los sei eine Rolle mit einer festgelegten Drahtlänge. Diese Rollen werden an den Großhandel verkauft.
Aus jedem Los wird vor der Freigabe eine Stichprobe von 4% gezogen. Diese Stichprobe besteht aus mehreren, kleineren, zufällig ausgewählten Drahtabschnitten. Diese werden durch eine optische Kontrolle erfasst, und zu dünne oder zu dicke Drahtstellen, Knötchen, Risse usw. werden erkannt und gezählt.
Der Parameter r beträgt in diesem Fall 4% (r=0,04).
Mit einem bestimmten Großkunden wird eine vertragliche Vereinbarung über die Stichprobenprüfung beim Warenausgang abgeschlossen. Es wird vereinbart, dass bei 2 oder weniger Fehlern in der Stichprobe das Los angenommen wird.

Der Stichprobenplan heißt somit (r, c) = (0,04; 2). Dies bedeutet, dass der Hersteller Packungen beim Warenausgang zurückweist, die 3 oder mehr Fehler in der Stichprobe enthalten.

Folgende Graphik erläutert den Verlauf einer Stichprobenprüfung:

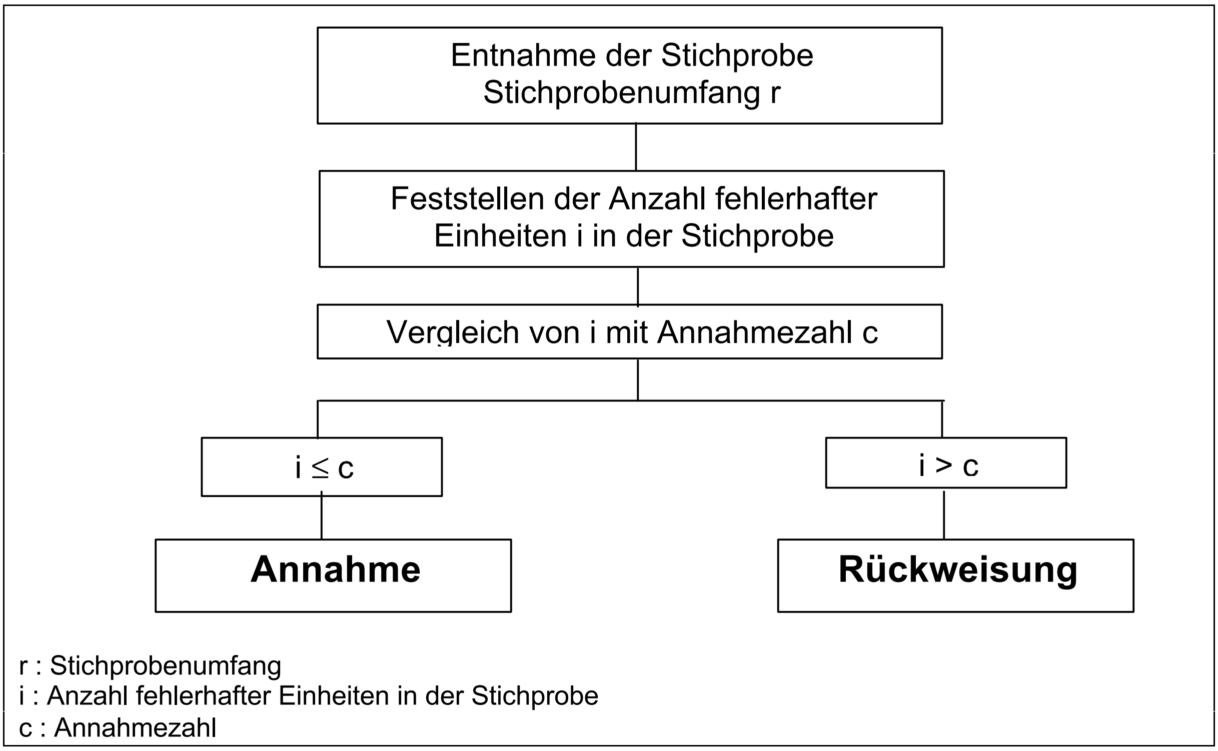

Abbildung 6: Ablauf einer Einfachstichprobenprüfung für qualitative Merkmale[14]

Für ein bestimmtes Produkt gibt es eine Reihe von möglichen Auswahlkriterien für die Parameter r und c.

Auswahlkriterien für Stichprobenpläne sind:

- Kostenaufwand für die Prüfung eines Einzelstücks
- Folgekosten der Annahme
- Zeitlicher Aufwand für die Prüfung eines Einzelstücks
- Durchschnittliche Fehlerquote
- Maß für Prozessbeherrschung, d.h. inwieweit treten Fehler im Produktionsprozess zufällig und unabhängig voneinander auf und sind Fehleranzahlen im Mittel konstant
- Vertragliche Vereinbarungen

[14] Reineck, H. ; Stichprobenprüfung; Der Qualitätssicherungs-Berater 11200; Köln 1994

Der Kostenaufwand eines Stichprobenplans wird vordergründig bestimmt durch die Prüfkosten selbst. Dadurch ist der Stichprobenumfang sicherlich häufig ein wesentlicher Kostenfaktor. Allerdings steigen mit der Senkung des Umfangs auch eine Reihe von Risiken.

Folgekosten sind die durch Fehlentscheidungen entstehenden Kosten.
Im Wesentlichen gibt es zwei Fehlentscheidungen:
Entweder ein angenommenes Los erfüllt das vorgegebene Gütekriterium nicht oder ein zurückgewiesenes Los erfüllt dieses Gütekriterium.
Beide Fälle entstehen aus dem Charakter von Entscheidungen aufgrund von Stichprobenergebnissen. Diese Entscheidungen bergen eine statistische Irrtumswahrscheinlichkeit, allerdings eine in der Regel berechenbare, so dass sich im Prinzip die Anzahl der Fehlentscheidungen minimieren lässt.

Für jeden Betrieb, der Annahme-Stichprobenprüfungen durchführt oder aufgrund vertraglicher Absprachen durchführen muss, ist es wichtig, grundlegende Kennzahlen berechnen zu können. Diese Kennzahlen geben Aufschluss über die Konsequenzen und Risiken, die mit der Wahl eines bestimmten Stichprobenplans verbunden sind.

A-priori-Fall (a priori = im vorhinein)
Dies bedeutet, dass der Zustand der Lose zum Zeitpunkt der Fertigung, also vor der Stichprobenprüfung, berücksichtigt wurde.

A-posteriori-Fall (a posteriori = im nachhinein)
Dies bedeutet, dass der Zustand der Lose vor der Auslieferung berücksichtigt wird.
Im wesentlichen lassen sich zwei Maßnahmen treffen, die die Qualitätslage a posteriori verbessern:
Bei angenommenen Losen kann man die Stichprobe bereinigen, d.h. den fehlerhaften Anteil durch einen fehlerfreien ersetzen.
Bei zurückgewiesenen Losen kann man eine Vollkontrolle mit Bereinigung durchführen, d.h. man führt eine 100%-Prüfung des Loses durch und ersetzt alle fehlerhaften Anteile durch fehlerfreie.

2.4.2.1 Anwendung von Prüfplänen in der Praxis

In der Wirtschaft gibt es verschiedene Arten von Prüfplänen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten angewendet werden.

Die Eingangsprüfung wird für zugelieferte Produkte vor der Verwendung in der Produktion durchgeführt und dient als Abnahmeprüfung dieser Produkte.
Die Durchführung dieser Prüfung erfolgt durch den Abnehmer selber oder durch eine beauftragte Stelle.

Die Zwischenprüfung ist eine Qualitätsprüfung, die bereits während der Produktion der zu prüfenden Produkte erfolgt. Diese Prüfung kann sowohl unter der Beteiligung des späteren Abnehmers bzw. der beauftragten Stelle wie auch vom Hersteller allein durchgeführt werden.

Die Endprüfung ist die letzte Qualitätsprüfung der Produkte durch den Hersteller bevor sie an den Abnehmer übergeben werden.

In der Regel wird als Abnehmer der im Geschäftsverkehr belieferte Vertragspartner bezeichnet bzw. der zu beliefernde Partner im unternehmensinternen Lieferverkehr.

2.4.2.2 Weitere Stichprobenpläne[15]

Manche Betriebe verwenden auch andere Typen von Stichprobenplänen, beispielsweise Doppel Stichprobenpläne, mehrfache Stichprobenpläne, Stichprobenpläne für quantitative Merkmale, Skip-Lot-Verfahren.

Mehrfache Stichprobenpläne:
Neben der Annahme und Zurückweisung eines Loses aufgrund von Stichproben gibt es eine „Grauzone“. Bei dieser „Grauzone“ werden eine oder mehrere „Ergänzungsstichproben“ bis zur endgültigen Entscheidung gezogen.

Stichprobenpläne für quantitative Merkmale:
Bei diesen Plänen wird von metrischen Messwerten ausgegangen. Es werden nicht nur die qualitativen Merkmale „fehlerfrei“ oder „fehlerhaft“ von einzelnen geprüften Stücken berücksichtigt.

Skip-Lot-Stichprobenprüfung (Skip-Lot-Verfahren)[16]:
Das Skip-Lot-Verfahren kann zur Annahmeprüfung einer Serie von Losen angewendet werden. Wenn eine bestimmte Anzahl von nacheinander gelieferten Losen durch die Stichprobenprüfung angenommen wurde, wird dazu übergangen nach einem festgelegten Verfahren einzelne Lose ohne Prüfung anzunehmen.
Als Voraussetzung für das Skip-Lot-Verfahren gilt, dass genügend oft hintereinander die Annahme der Lose erfolgte.
Das Skip-Lot-Verfahren besagt also, dass jedes j-te Los geprüft wird, bis erstmalig eine Zurückweisung erfolgt.

Alle diese Typen sind auch in DIN- und ISO-Normen enthalten.

[15] Börgens M.; Mathematische Methoden der Qualitätssicherung
[16] DGQ, Stichprobenprüfung anhand qualitativer Merkmale

2.5 BETRIEBLICHE SZENARIEN[17]

Jeder Betrieb kann unter Berücksichtigung der vertraglichen Vereinbarungen individuell entscheiden, wie bei der Annahme-Stichprobenprüfung angenommene und zurückgewiesene Lose behandelt werden. Man unterscheidet verschiedene Szenarien, wobei sich die Szenarien I bis IV auf diskrete Lose beziehen, also für Lose von unterscheidbaren Einzelstücken, die fehlerfrei oder fehlerhaft sein können.

Das Szenario V entspricht dem Szenario I, allerdings für kontinuierliche Lose[18], bei denen die Anzahl der Fehler gezählt werden. Im Folgenden sollen nun die einzelnen Szenarien erläutert werden.

2.5.1 Szenario I

Im Annahmefall wird das Los unverändert ausgeliefert, d.h. die Stichprobe wird nicht bereinigt. Im Rückweisungsfall wird das Los dagegen eliminiert.
Nach der Stichprobennahme werden die Lose nicht verändert. Dies bedeutet insbesondere, dass die gezogenen Stichproben nicht bereinigt also Ausschusstücke nicht durch gute Stücke ersetzt werden (zurückgewiesene Lose werden eliminiert und nicht ausgeliefert).
Das Szenario I betrachtet den "a-priori"-Fall, d.h. es wird nur der Zustand der Lose unmittelbar nach der Fertigung betrachtet.

[17] Börgens, M., Stichprobenprüfung in beherrschten und nicht beherrschten Prozessen, Aachen 2000
[18] siehe Kapitel 2.3.2

2.5.2 Szenario II

Die Lose, die nach der Stichprobenprüfung angenommen worden sind, werden unverändert ausgeliefert. Hier werden die gezogenen Stichproben nicht bereinigt.

Zurückgewiesene Lose werden einer 100%-Prüfung unterzogen und bereinigt, d.h. alle fehlerhaften Stücke werden durch fehlerfreie ersetzt.
In dem Szenario II werden alle Lose ausgeliefert, d.h. es beschreibt einen "a-posteriori"-Fall, da die Qualitätslage der ausgelieferten Lose gegenüber Szenario I nach der Fertigung verbessert wird.

2.5.3 Szenario III

Die Lose, die nach der Stichprobenprüfung angenommen worden sind, werden erst nach der Bereinigung der Stichprobe ausgeliefert. Alle fehlerhaften Stücke in der Stichprobe werden durch fehlerfreie ersetzt. Lose die zurückgewiesen wurden, werden eliminiert und nicht ausgeliefert.
Dieses Szenario beschreibt einen "a-posteriori"-Fall, da die Qualitätslage der ausgelieferten Lose gegenüber Szenario I nach der Fertigung verbessert wird.

2.5.4 Szenario IV

Die Lose, die nach der Stichprobenprüfung angenommen worden sind, werden erst nach Bereinigung der Stichprobe ausgeliefert. Alle fehlerhaften Stücke in der Stichprobe werden durch fehlerfreie ersetzt. Lose, die zurückgewiesen wurden, werden einer 100%-Prüfung unterzogen und bereinigt. Hier werden alle fehlerhaften Stücke durch fehlerfreie ersetzt.
In diesem Szenario werden alle Lose ausgeliefert, d.h. es wird ein "a-posteriori"-Fall dargestellt, da die Qualitätslage der ausgelieferten Lose gegenüber Szenario I nach der Fertigung verbessert wird.
Das Szenario IV beschreibt die kundenfreundlichste, aber auch die aufwendigste Vorgehensweise.

2.5.5 Szenario V

In diesem Szenario werden Fehler gezählt. Daher müssen keine Lose mit konkreten Einzelstücken vorliegen, sondern die Lose können "kontinuierlich" sein. Solche Lose sind beispielsweise abgepackte Flüssigkeiten, Pulver, Kabel, Garne oder Gewebe.

Auch Lose mit Einzelstücken können wie kontinuierliche Lose behandelt werden, wenn pro Stück mehrere Fehler auftreten können und nur die Gesamtzahl aller Fehler von Interesse ist. Stichprobennahme bedeutet hier, dass ein bestimmter, aber zufällig ausgewählter Anteil des Loses geprüft wird.

Die Fehlerzahl im Los oder in der Stichprobe ist dann im Gegensatz zu den ersten vier Szenarien nicht nach oben beschränkt. In der Regel ist bei kontinuierlichen Losen eine Fehlerbereinigung nicht möglich oder nicht sinnvoll.

Lose werden also nach der Stichprobennahme nicht verändert und Stichproben insbesondere nicht bereinigt. Zurückgewiesene Lose werden eliminiert und nicht ausgeliefert.
Das Szenario V beschreibt wie auch das Szenario I den "a-priori"-Fall, also den Zustand der Lose unmittelbar nach der Fertigung.

Schematisch lassen sich die fünf Szenarien in den folgenden Ablaufplan einordnen (A steht für "Annahme", Z für "Zurückweisung").

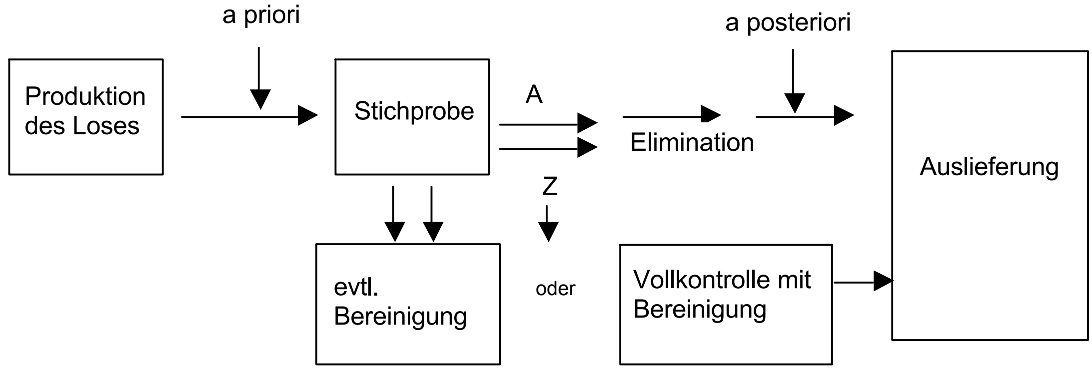

Abbildung 7: Ablaufplan für die Szenarien

Im Folgenden werden die einzelnen Szenarien übersichtlich dargestellt:

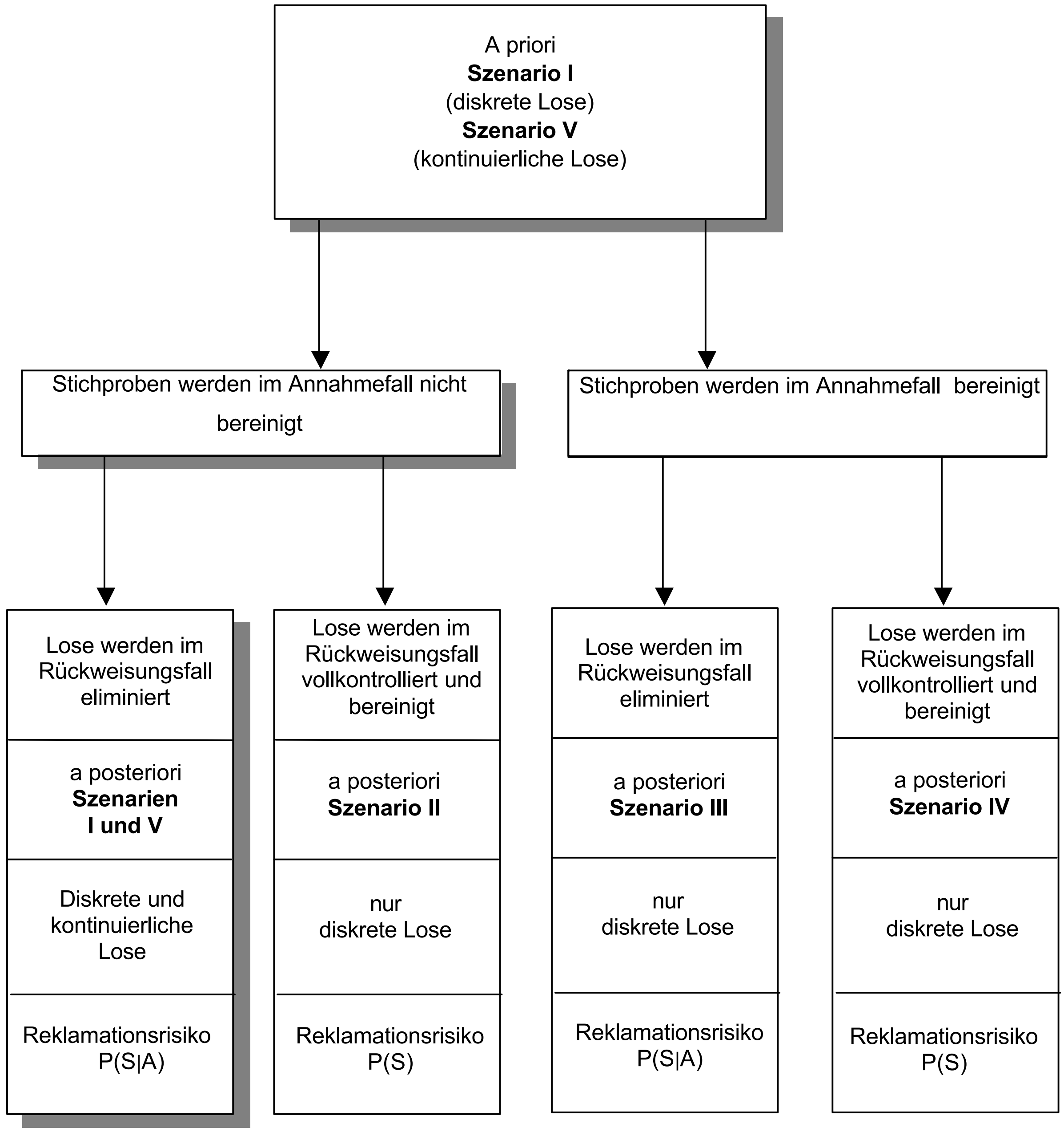

Abbildung 8: Übersicht über die einzelnen Szenarien

2.6 QUALITÄTSKOSTEN

Qualitätskosten sind "Kosten, die vorwiegend eine Folge vorgegebener Qualitätsforderungen sind"[19].

Nach dieser Definition sind also damit nicht nur die reinen Prüfkosten gemeint, sondern auch Kosten, die durch Maßnahmen der Fehlerverhütung entstehen sowie die Fehlerfolgekosten.
Nach "Masser" (USA)[20] werden demnach die Qualitätskosten grundsätzlich unterteilt in Fehlerverhütungs-, Prüf- und Fehlerfolgekosten.
Zu Fehlerverhütungskosten zählen alle Kosten, die durch vorbeugende Maßnahmen im Bereich der Qualitätssicherung verursacht werden. Sie bestehen zum größten Teil aus Personalkosten und sind in der Regel schwer zu erfassen, weil es sich meist um Kosten für Personal handelt, das nicht ausschließlich zur Qualitätssicherung eingesetzt ist. Außerdem kommen dazu Lehrgangsgebühren, Materialkosten, Kosten für den Einsatz von Maschinen, u.s.w.
Prüfkosten werden durch die eigentliche Qualitätsprüfung verursacht und bestehen zum größten Teil aus Personal- und Prüfmittelkosten.
Die Fehlerkosten werden meist weiter unterteilt in innerbetriebliche und außerbetriebliche Kosten. Sie fallen dann an, wenn Produkte oder Verfahren den Qualitätsanforderungen nicht entsprechen.
Zu den externen Fehlerfolgekosten gehören hauptsächlich Kosten für Garantieleistungen und Produzentenhaftung.
Die systematische Erfassung von Qualitätskosten ist vom wirtschaftlichen Standpunkt gesehen sinnvoll, weil die tatsächliche Höhe der anfallenden Kosten dieser Art in den meisten Fällen unterschätzt wird. Das Ziel einer Erfassung der Qualitätskosten ist grundsätzlich die Kostensenkung, ohne dass die Qualität der hergestellten Produkte darunter zu leiden hat.

Eine Übersicht über die Elemente der Qualitätskosten ist auf der folgenden Seite dargestellt.

[19] DGQ - Schrift 11-04 S.29
[20] DGQ - Schrift 14-17 S.10

Qualitätskosten

<u>Fehlerverhütungskosten</u>

- Qualitätsplanung
- Qualitätsfähigkeitsuntersuchungen
- Lieferantenbeurteilung und Beratung
- Prüfplanung
- Qualitätsaudit
- Leitung des Qualitätswesen
- Qualitätslenkung
- Schulung in Qualitätssicherung
- Qualitätsforderungsprogramme
- Qualitätsvergleiche mit dem Wettbewerb
- sonstige Maßnahmen der Fehlerverhütung

<u>Prüfkosten</u>

- Eingangsprüfung
- Fertigungsprüfung
- Endprüfung
- Annahmeprüfung
- Instandhaltung der Prüfmittel
- Prüfmittel
- Qualitätsgutachten
- Laboruntersuchungen
- sonstige Maßnahmen und Anschaffungen zur Qualitätsprüfung

3 STOCHASTISCHE SIGNALERKENNUNG FÜR DISKRETE VERTEILUNGEN

3.1 GRUNDZÜGE DER STOCHASTISCHEN SIGNALERKENNUNG

Die Signalerkennung dient der Lösung bestimmter Entscheidungsprobleme. Das Ziel der Signalerkennung ist es, eine optimale Entscheidung zu treffen. Es soll eine Entscheidung zwischen zwei Zuständen aufgrund eines zu beurteilenden Objekts getroffen werden. Ein Zustand wird dabei als "Signal", der andere als "Nicht-Signal" bezeichnet. Dies bedeutet, dass eine Merkmalsgröße X einmal erhoben wird und aufgrund ihres Wertes x eine Entscheidung getroffen wird, ob ein "Signal" vorliegt oder nicht. Diese Zustände treten stets mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf. Die Entscheidung hängt vom Auftreten bzw. Fehlen des "Signals" ab und von den Risiken einer Fehlentscheidung bzw. vom Nutzen einer richtigen Entscheidung.

Die Fragestellung hierbei lautet, ab welchem Wert x der Merkmalsgröße X auf Signal entschieden werden soll, damit ein maximaler Gewinn bzw. ein minimaler Verlust erzielt wird.

<u>Beispiel:</u>
In einem Krankenhaus wird beschlossen, bei jedem Patienten eine Untersuchung der Blutwerte durchzuführen. Die Kosten dafür will die Krankenhausleitung selber bezahlen. Bei der Untersuchung werden unter anderem auch die Leberwerte bestimmt.
Anhand des Ergebnisses der Leberwerte wollen die Ärzte entscheiden, ob ein Patient alkoholabhängig ist und eine Therapie auf Alkoholentzug machen soll.

In diesem Beispiel stellt die Blutuntersuchung die Merkmalsgröße X dar und die Ergebnisse der Untersuchung die Werte x der Merkmalsgröße X.

Auf Basis der Werte x entscheiden die Ärzte, ob ein Signal oder ein Nicht-Signal vorliegt. Wenn der Wert x eine bestimmte Größe übersteigt, wird von den Ärzten die Diagnose „alkoholabhängig“ (Signal) gestellt. Liegt der Wert dagegen unter der festgelegten Größe, lautet die Diagnose „nicht alkoholabhängig“ (Nicht-Signal).
Auf die Merkmalsgröße X, die man auch als Zufallsvariable bezeichnet, wird im weiteren Verlauf näher eingegangen.

3.2 DIE PAYOFF-MATRIX

Eine Merkmalsgröße X kann verschiedene Werte x annehmen. Auf Basis der Werte x ist nun die Entscheidung zu treffen, ob ein Signal oder ein Nicht-Signal vorliegt, wobei die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Signal (p(S)) oder Nicht-Signal (p(N)) in der Grundgesamtheit wichtig ist.
Die Entscheidung auf Signal oder Nicht-Signal hängt dabei auch noch von den Risiken einer Fehlentscheidung bzw. vom Nutzen einer richtigen Entscheidung ab.
Mit Hilfe der Payoff-Matrix läßt sich das Problem dieser Entscheidung mathematisch darstellen.

Die Payoff-Matrix ist eine 2x2-Matrix. Die Spalten dieser Matrix beinhalten zwei alternative Zustände (Signal, Nicht-Signal). Die Zeilen hingegen beinhalten zwei alternative Handlungsweisen (Entscheidung auf Signal = E_S, Entscheidung auf Nicht-Signal = E_N). Die Werte der Matrixelemente geben Auskunft über die Folgen der jeweiligen Entscheidung.

<u>Die Payoff-Matrix ist im Folgenden dargestellt :</u>

	Signal	Nicht-Signal
E_S	a_{11}	a_{12}
E_N	a_{21}	a_{22}

Eine Entscheidung kann vier verschiedene Folgen haben:

Signal / E_S mit dem Wert a_{11}:
Dies entspricht einer richtigen Entscheidung auf Signal, welche auch als "Treffer" bezeichnet wird.
a_{11} gibt den Wert eines "Treffers" an.

Nicht-Signal / E_N mit dem Wert a_{22}:
Dies entspricht einer richtigen Entscheidung auf Nichtsignal, welche auch als "Berechtigte Abweisung" bezeichnet wird.
a_{22} gibt den Wert einer "Berechtigten Abweisung" an.

Nicht-Signal / E_S mit dem Wert a_{12}:
Dies entspricht einer falschen Entscheidung auf Signal, welche auch als "Falscher Alarm" bezeichnet wird.
a_{12} gibt den Wert eines "Falschen Alarms" an.

Signal / E_N mit dem Wert a_{21}:
Dies entspricht einer falschen Entscheidung auf Nichtsignal, welche auch als "Verfehlen" bezeichnet wird.
a_{21} gibt den Wert eines "Verfehlens" an.

Eine Entscheidung bringt gewisse Risiken oder Nutzen mit sich. Auf der einen Seite können durch eine richtige Entscheidung Gewinne entstehen oder Kosten vermieden werden. Auf der anderen Seite können durch eine falsche Entscheidung Verluste oder Kosten entstehen.

Anmerkung:

1. Es wird vorausgesetzt, dass $a_{11} > a_{21}$, da sonst eine falsche Entscheidung auf E_N sinnvoller wäre als eine korrekte Entscheidung auf E_S.

2. Es wird vorausgesetzt, dass $a_{22} > a_{12}$, damit auch hier die richtige Entscheidung auf E_N sinnvoller ist als die falsche auf E_S.

Um eine optimale Entscheidung treffen zu können, müssen verschiedene Faktoren berücksichtigt werden:

- Das Auftreten oder das Fehlen eines Signals
- p(S): Wahrscheinlichkeit, dass das Signal auftritt.
  p(N): Wahrscheinlichkeit, dass das Signal nicht auftritt.
  $p(N) = 1 - p(S)$
- Der Nutzen richtiger Entscheidungen und das Risiko falscher Entscheidungen.

Die Berechnung der Erwartungswerte E_1 (für die obere Zeile) und E_2 (für die untere Zeile) erfolgt durch die folgenden Formeln:

$$E_1 = a_{11} * p(S) + a_{12} * p(N)$$

$$E_2 = a_{21} * p(S) + a_{22} * p(N)$$

Grundsätzlich ist es nur sinnvoll auf Signal zu entscheiden, wenn der daraus entstehende Gewinn (bzw. die entstehende Kostenreduzierung) größer oder mindestens gleich groß ist, wie bei der Entscheidung auf Nicht-Signal.
Das bedeutet, dass die Handlungsweise mit dem größten Erwartungswert bevorzugt wird.

Somit wird eine Entscheidung auf Signal getroffen, wenn der Erwartungswert für E_S ($=E_1$) gleich oder größer ist als der Erwartungswert für E_N ($=E_2$), d.h. $E_1 \geq E_2$.

Beispiel für eine Payoff-Matrix (vgl. Seite 37):

In dem Beispiel mit dem Krankenhaus entscheiden die Ärzte anhand einer Blutuntersuchung bei jedem Patienten, ob er aufgrund seiner Werte alkoholabhängig ist oder nicht. Das heißt, es wird bei einem Blutwert über dem festgelegten „Normalbereich“ auf „alkoholabhängig“ bzw. auf krank (Signal) entschieden.
Liegt der Wert im Normalbereich, wird entschieden, dass der Patient „nicht alkoholabhängig“ also gesund (Nicht-Signal) ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter allen untersuchten Patienten einer „alkoholabhängig“ also krank ist wird mit 5 % (p(S)=0,05) angenommen. Das heißt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % (p(N)=0,95) ist ein Patient gesund.

Für die Krankenhausleitung stellt sich nun die Frage, ob es aus betriebswirtschaftlicher Sicht sinnvoll ist, bei jedem Patienten diese Untersuchung auf Krankenhauskosten vorsorglich durchzuführen.

Folgende Informationen über die Kosten bzw. nachfolgende Einnahmen liegen vor:

- bei Durchführung der Untersuchung:
  Patient ist krank: Kosten in Höhe von 500 DM
  Einnahmen in Höhe von 80.500 DM
  (Krankenkassen-Zahlung für eine notwendige Therapie)
  Patient ist gesund: Kosten in Höhe von 500 DM

- Verzicht auf die Durchführung der Untersuchung:
  Patient ist krank: spätere Einnahme von durchschnittlich 10.000 DM
  Patient ist gesund: keine Kosten

Die Entscheidung, dass die Untersuchung durchgeführt wird, bezeichnet man mit E_S und dass sie nicht durchgeführt wird mit E_N.

Für dieses Beispiel sieht die Payoff-Matrix wie folgt aus:

	Signal krank	Nicht-Signal gesund
Untersuchung (E_S)	+ 80.000 DM	- 500 DM
keine Untersuchung (E_N)	+ 10.000 DM	0 DM

Der Erwartungswert E_1 für die obere Zeile E_S ist:

$E_1 = a_{11} * p(S) + a_{12} * p(N)$

$E_1 = 80.000 * 0,05 + (-500) * (0,95)$

$E_1 = 4.000 - 475$

$E_1 = 3.525$

Der Erwartungswert E_2 für die untere Zeile E_N ist:

$E_2 = a_{21} * p(S) + a_{22} * p(N)$

$E_2 = 10.000 * (0,05) + 0 * (0,95)$

$E_2 = 500$

$\Rightarrow E_1 \geq E_2$, denn $3.525 \geq 500$

Entscheidung:

Die Krankenhausleitung entscheidet sich für die Handlungsweise in der oberen Zeile. Das heißt die Untersuchung wird bei jedem Patienten auf Kosten des Krankenhauses durchgeführt, denn bei dieser Handlungsweise sind die Einnahmen größer.

3.3 HAUPTSATZ DER ENTSCHEIDUNGSTHEORIE

$P_S(x)$ sei eine „Signalverteilung“, welche die Wahrscheinlichkeit für jeden x-Wert, unter der Voraussetzung, dass ein Signal vorliegt, angibt.
$P_N(x)$ sei eine „Nichtsignalverteilung“, welche die Wahrscheinlichkeit für jeden x-Wert, unter der Voraussetzung, dass kein Signal vorliegt, angibt.

Das Verhältnis von Signal- und Nichtsignalverteilung zueinander wird durch l(x) beschrieben:

$$l : D \rightarrow IR \cup \{+\infty\}; \quad \text{mit} \quad D = \{x \in IR \ / \ P_N(x) \neq 0 \quad \text{oder} \ P_S(x) \neq 0\}$$

$$l(x) = \begin{cases} \dfrac{P_S(x)}{P_N(x)} & \text{falls} \ P_N(x) \neq 0 \\ +\infty & \text{falls} \ P_N(x) = 0 \end{cases}$$

Damit ein maximaler Gewinn bzw. ein minimaler Verlust erzielt werden kann, muss bekannt sein, ab welchem Wert x der Merkmalsgröße X auf Signal entschieden werden soll.

Es stellt sich die Frage, ob E_S oder E_N den größten Gewinn bzw. geringsten Verlust bringt.

B sei nun das Ereignis, dass der Messwert x ist.
E(S|B): Durchschnittlicher Wert der Entscheidung E_S, falls das Ereignis B vorliegt.
E(N|B): Durchschnittlicher Wert der Entscheidung E_N, falls das Ereignis B vorliegt.

Unter der Voraussetzung $a_{11} > a_{21}$ und $a_{22} > a_{12}$ gilt für die Erwartungswerte:

(1) $E(S|B) = p(S|B) * a_{11} + p(N|B) * a_{12}$

(2) $E(N|B) = p(S|B) * a_{21} + p(N|B) * a_{22}$

Man entscheidet sich für Signal E_S, falls $E(S|B) \geq E(N|B)$ und für Nicht-Signal E_N, falls $E(S|B) < E(N|B)$.

Gemäß dem Satz von Bayes gilt für die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(S|B)$ und $p(N|B)$:

$$(3) \quad p(S|B) = \frac{p(S) * p(B|S)}{p(B)}$$

$$(4) \quad p(N|B) = \frac{p(N) * p(B|N)}{p(B)}$$

$E(S|B) \geq E(N|B)$ ist nach (1), (2), (3), (4) äquivalent zu:

$$p(S|B) * a_{11} + p(N|B) * a_{12} \quad \geq \quad p(S|B) * a_{21} + p(N|B) * a_{22}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(S|B) * (a_{11} - a_{21}) \quad \geq \quad p(N|B) * (a_{22} - a_{12})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p(S\,|\,B)}{p(N\,|\,B)} \geq \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}}$$

Für das Ereignis B gilt:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p(B\,|\,S)}{p(B\,|\,N)} \geq \frac{p(N)}{p(S)} * \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}}$$

Nach der Definition von B lässt sich l auch so schreiben:

$$l(x) = \begin{cases} \dfrac{p(B\,|\,S)}{p(B\,|\,N)} & \text{für } p(B|N) \neq 0 \\ +\infty & \text{für } p(B|N) = 0 \end{cases}$$

Falls $l(x) \geq \beta$ ist, entscheidet man sich zugunsten von E_S und im Fall von $l(x) < \beta$ für E_N.

Der Wert β wird bestimmt durch:

$$l(x) \geq \underbrace{\frac{p(N)}{p(S)} * \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}}}_{ß}$$

Ist l(x)=b, dann wird der Wert x als "Schwellenwert" für Entscheidung auf Signal bezeichnet. Dabei stellt β das „Maß für die Bereitschaft auf Signal zu erkennen“ dar und ist unabhängig von p(B|S) und p(B|N). Allerdings wird β von einer falschen oder einer richtigen Entscheidung auf Signal oder Nichtsignal beeinflusst.

3.4 DER ERWARTETE GEWINN

Als erwarteten Gewinn bezeichnet man den Wert, der sich als Mittelwert bei häufiger Anwendung eines Entscheidungsverfahrens aus den tatsächlichen Ergebnissen pro Entscheidung ermitteln lässt (analog dem Erwartungswert in der Wahrscheinlichkeits-theorie).
In der Praxis bedeutet das, dass man diesen Wert als erwarteten Gewinn bzw. als Wert für eine Kostenreduzierung in die Kalkulation einbeziehen kann.

Der erwartete Gewinn lässt sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten für "Treffer", "Falscher Alarm", "Verfehlen", "Berechtigte Abweisung" multipliziert mit den diesen Folgen zuzurechnenden Werten aus der Payoff-Matrix berechnen.

Mit p(AÈB) = p(A|B) $*$ p(B) gilt für:

- Wahrscheinlichkeit für einen Treffer (E_S ist richtig):

$$\left(\sum_{l(x) \geq \beta} P_S(x) \right) * p(S)$$

- Wahrscheinlichkeit für einen falschen Alarm (E_S ist falsch):

$$\left(\sum_{l(x) \geq \beta} P_N(x) \right) * p(N)$$

- Wahrscheinlichkeit für ein Verfehlen (E_N ist falsch):

$$\left(\sum_{l(x)<\beta} P_S(x)\right) * p(S)$$

- Wahrscheinlichkeit für eine berechtigte Abweisung (E_N ist richtig):

$$\left(\sum_{l(x)<\beta} P_N(x)\right) * p(N)$$

Für den erwarteten Gewinn gilt damit:

$$E = \left(\sum_{l(x)\geq\beta} P_S(x)\right) * p(S) * a_{11} + \left(\sum_{l(x)\geq\beta} P_N(x)\right) * p(N) * a_{12}$$
$$+ \left(\sum_{l(x)<\beta} P_S(x)\right) * p(S) * a_{21} + \left(\sum_{l(x)<\beta} P_N(x)\right) * p(N) * a_{22}$$

4 ANWENDUNG DER STOCHASTISCHEN SIGNAL-ERKENNUNG AUF DIE STICHPROBENPRÜFUNG KONTINUIERLICHER LOSE

Die Annahme oder Zurückweisung eines kontinuierlichen Loses[21] basiert auf der Analyse einer Stichprobe, welche zufällig aus dem Los gezogen wird. Bei diesen Stichproben wird nur die Anzahl der „Fehler“ berücksichtigt.

Dies sind Fehler, deren Anzahl in jedem Los gezählt werden kann, wie z.B. die Anzahl von Blasen auf der Oberfläche plattierten Bleches.

Bei der Untersuchung der Qualität dieser Stichproben entstehen Kosten. Diese Kosten sollten so gering wie möglich gehalten werden. Um nun die geringsten Kosten zu finden, wird die (r, c)-Optimierung angewendet, für welche Qualitätssicherungs-Kennzahlen benötigt werden.

4.1 QUALITÄTSSICHERUNGS-KENNZAHLEN FÜR KONTINUIERLICHE LOSE

In jedem Unternehmen ist die Berechnung von Qualitätssicherungs-Kennzahlen für die einzelnen verwendeten Stichprobenanweisungen erforderlich. Diese dienen dem Qualitätsmanagement dazu, die zu erwartenden Folgen dieser Anweisungen besser abschätzen zu können.

Diese Qualitätssicherungs-Kennzahlen stellen auch eine Grundlage für eine Qualitätssicherungsvereinbarung zwischen Hersteller, Lieferant und Kunde dar.

[21] siehe Kapitel 2.5.5 Szenario V

$p(G)$	:	Anteil guter Lose
$p(S)$	:	Anteil schlechter Lose
$p(A)$	:	Anteil angenommener Lose
$p(Z)$	:	Anteil zurückgewiesener Lose
$p(G \cap A)$	:	Anteil guter und angenommener Lose
$p(G \cap Z)$	:	Anteil guter und zurückgewiesener Lose
$p(S \cap A)$	:	Anteil schlechter und angenommener Lose
$p(S \cap Z)$	:	Anteil schlechter und zurückgewiesener Lose
$p(R)$	:	Reklamationsrisiko (Anteil schlechter Lose unter den ausgelieferten Losen)
D	:	Durchschlupf (mittlerer Ausschussanteil bei Auslieferung)

Die Annahme eines Loses bedeutet, dass das Los unverändert ausgeliefert wird.
Die Wahrscheinlichkeit für die Auslieferung eines Loses ist $p(A)$.

Die Zurückweisung eines Loses bedeutet, dass das Los nicht ausgeliefert bzw. eliminiert wird.
Die Wahrscheinlichkeit für die Zurückweisung eines Loses ist $p(Z)$.

Zur Erinnerung:
Szenario V wird nur auf Lose angewendet, welche nach der Stichprobennahme nicht verändert werden. Dies bedeutet, dass zurückgewiesene Lose eliminiert und die Stichproben nicht bereinigt werden. Szenario V stellt den "a-priori"-Fall dar, es beschreibt daher sowohl den Zustand des Loses nach der Fertigung als auch bei Auslieferung.

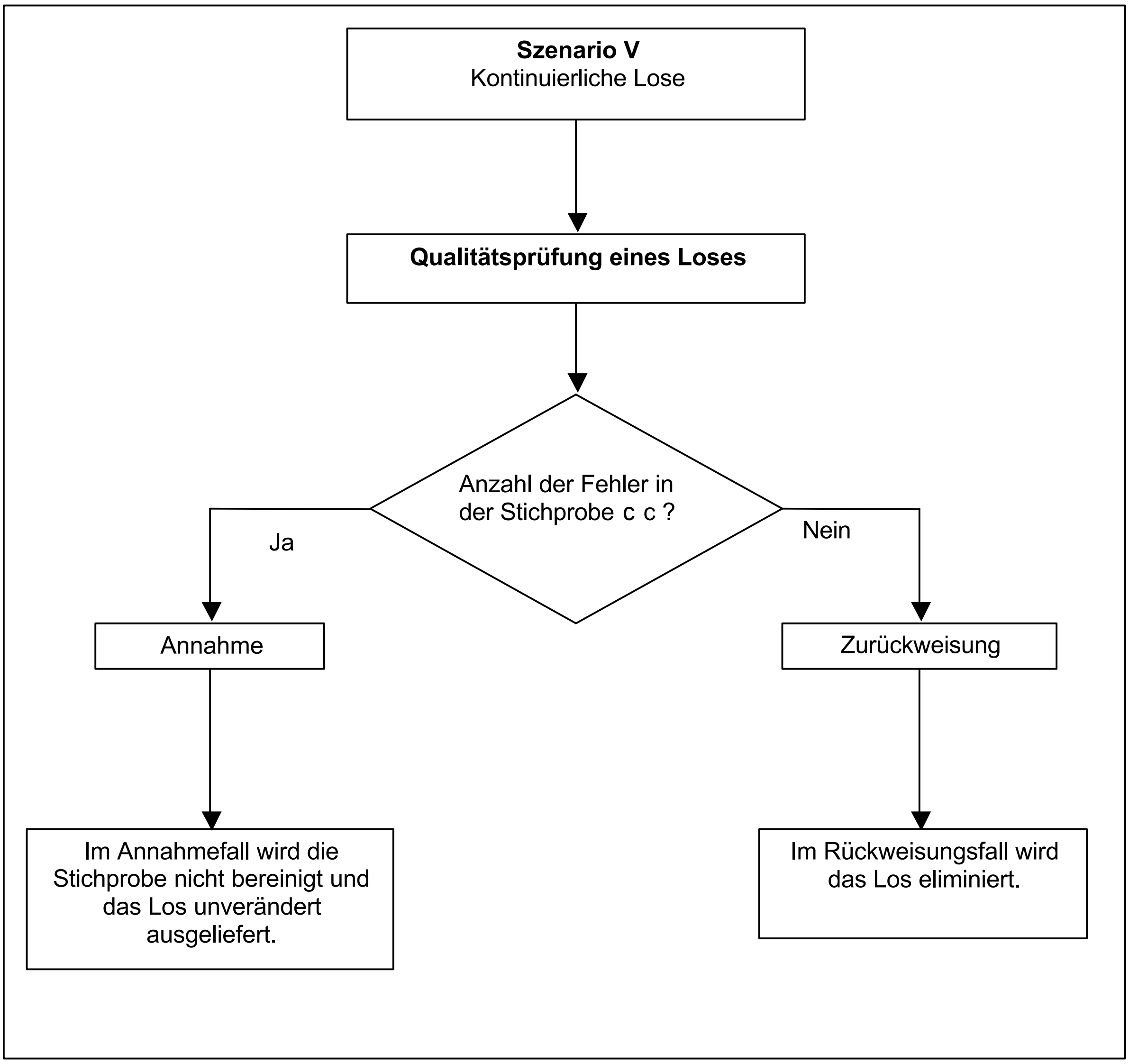

Abbildung 9: Die Behandlung von kontinuierlichen Losen und Stichproben

Für Szenario V genügt es, die vier Grundwahrscheinlichkeiten p(G), p(A), $p(G \cap A)$ und D zu berechnen.

Berechnung der verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für kontinuierliche Lose[22]:

<u>Grundwahrscheinlichkeiten:</u>

p(G) ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los gut ist, d.h. im Los sind weniger als M Fehler.

$$p(G) = P_{\lambda}(M-1)$$

p(A) ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los angenommen wird, d.h. in der Stichprobe sind maximal c Fehler.

$$p(A) = P_{r\lambda}(c)$$

p(GÈA) ist die Wahrscheinlichkeit , dass das Los gut ist und angenommen wird, d.h. in der Stichprobe sind i Fehler mit i £ c und im Rest der Größe 1-r sind maximal M-1-i Fehler.

$$p(G \cap A) = \sum_{i=0}^{c} p_{r\lambda}(i) * P_{(1-r)\lambda}(M-1-i)$$

D ist die Anzahl der Fehler, die im Durchschnitt pro ausgeliefertem Los auftreten.

$$D = \lambda * (1-r) + \frac{1}{p(A)} * \sum_{i=1}^{c} i * p_{r\lambda}(i)$$

---

[22] Vgl. Börgens, M.; Stichprobenprüfung in beherrschten und nicht beherrschten Prozessen, Aachen 2000

Alle übrigen Wahrscheinlichkeiten lassen sich wie folgt aus diesen Grundwahrscheinlichkeiten ableiten:

p(S) ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los schlecht ist, d.h. im Los sind M oder mehr Fehler.

$$p(S) = 1 - p(G) = 1 - P_{\lambda}(M-1)$$

p(Z) ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los zurückgewiesen wird, d.h. in der Stichprobe sind mehr als c Fehler.

$$p(Z) = 1 - p(A) = 1 - P_{r\lambda}(c)$$

p(G∩Z) ist die Wahrscheinlichkeit , dass das Los gut ist und zurückgewiesen wird, d.h. in der Stichprobe sind i Fehler mit c+1 £ i < ∞ und im Rest der Größe 1-r sind maximal M-1-i Fehler.

$$p(G \cap Z) = \sum_{i=c+1}^{\infty} p_{r\lambda}(i) * P_{(1-r)\lambda}(M-1-i)$$

p(S∩A) ist die Wahrscheinlichkeit , dass das Los schlecht ist und angenommen wird, d.h. in der Stichprobe sind i Fehler mit i £ c und im Rest der Größe 1-r sind maximal M-1-i Fehler.

$$p(S \cap A) = \sum_{i=0}^{c} p_{r\lambda}(i) * (1 - P_{(1-r)\lambda}(M-1-i))$$

p(S∩Z) ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los schlecht ist und zurückgewiesen wird, d.h. in der Stichprobe sind i Fehler mit c+1 £ i < ∞ und im Rest der Größe 1-r sind maximal M-1-i Fehler.

$$p(S \cap Z) = \sum_{i=c+1}^{\infty} p_{r\lambda}(i) * (1 - P_{(1-r)\lambda}(M-1-i))$$

p(G|A) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bereits angenommenes Los gut ist (bedingtes Käuferrisiko).

$$p(G \mid A) = \frac{p(G \cap A)}{p(A)}$$

p(S|A) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bereits angenommenes Los schlecht ist (bedingtes Herstellerrisiko).

$$p(S \mid A) = \frac{p(S \cap A)}{p(A)}$$

p(G|Z) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bereits zurückgewiesenes Los gut ist.

$$p(G \mid Z) = \frac{p(G \cap Z)}{p(Z)}$$

p(S|Z) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bereits zurückgewiesenes Los schlecht ist.

$$p(S \mid Z) = \frac{p(S \cap Z)}{p(Z)}$$

p(A|G) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gutes Los angenommen wird.

$$p(A \mid G) = \frac{p(G \cap A)}{p(G)}$$

p(Z|G) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gutes Los zurückgewiesen wird.

$$p(Z \mid G) = \frac{p(G \cap Z)}{p(G)}$$

p(A|S) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein schlechtes Los angenommen wird.

$$p(A \mid S) = \frac{p(S \cap A)}{p(S)}$$

p(Z|S) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein schlechtes Los zurückgewiesen wird.

$$p(Z \mid S) = \frac{p(S \cap Z)}{p(S)}$$

<u>Beispiel:</u>

Ein Getränkeunternehmen liefert Lose mit der Größe von 1000 Litern Milch.
Im Schnitt sind 18 schädliche Bakterien in einem Los. Der Käufer hat erst ab 30 schädlichen Bakterien in der Lieferung ein vertragliches Reklamationsrecht.
Aus jedem Los wird vor der Freigabe eine Stichprobe von 6,5% gezogen. Bei mehr als zwei Bakterien in der Stichprobe wird das Los zurückgewiesen.

Das Programm Opti-Konti-Pekuyar[23] berechnet alle Qualitätssicherungs-Kennzahlen für die Stichprobenanweisung (r, c) = (0,065, 2).

Berechnung:

Mittlere Fehleranzahl: l = 18
Reklamationsgrenze: M = 30
Stichprobengröße: r = 0,065
Annahmezahl: c = 2

Die Wahrscheinlichkeiten werden mit den oben angegebenen Formeln berechnet.

Damit erhält man als Vierfeldertafel erhält man:

p(...)	G	S	å
A	88,2%	0,4%	88,6%
Z	11,2%	0,2%	11,4%
å	99.4%	0,6%	1

[23] siehe Kapitel 5.3.1 Berechung optimaler Stichprobenpläne mit MathematicaÒ: Das Software-Tool Opti-Konti-Pekuyar, sowie Quellcode siehe Anhang Seite 103

Als Wahrscheinlichkeiten des Szenarios V ergeben sich folgende Werte:

$p(A) = 0{,}885927$

$p(Z) = 0{,}114073$

$p(G) = 0{,}994056$

$p(S) = 0{,}005944$

$p(G \cap A) = 0{,}881949$

$p(S \cap A) = 0{,}003978$

$p(G \cap Z) = 0{,}112107$

$p(S \cap Z) = 0{,}001966$

$p(G|A) = 0{,}99551$

$p(S|A) = 0{,}00449$

$p(G|Z) = 0{,}982761$

$p(S|Z) = 0{,}017239$

$p(A|G) = 0{,}887223$

$p(Z|G) = 0{,}112777$

$p(A|S) = 0{,}669183$

$p(Z|S) = 0{,}330817$

$D = 17{,}7195$

Fazit:

Für dieses Beispiel lautet der Stichprobenplan (0,065; 2).
Die Ergebnisse in diesem Beispiel sind sowohl für den Hersteller als auch für den Kunden sehr gut.
Dies erkennt man daran, dass der Anteil der schlechten Lose nur bei 0,6 % bzw. der Anteil der guten Lose dementsprechend bei 99,4 % liegt.
Der Anteil der angenommenen Lose beträgt 88,6 %. Davon werden zum Kunden 88,2 % gute Lose und nur 0,4 % schlechte Lose geliefert.
Der Anteil der zurückgewiesenen Lose beträgt 11,4 %, von denen 11,2 % gute Lose und 0,2 % schlechte Lose sind.

4.2 (r, c)-OPTIMIERUNG ZUR MINIMIERUNG DER GESAMTKOSTEN

Das Ziel der (r, c)-Optimierung ist es, einen optimalen Stichprobenplan[24] zu finden. Dadurch sollen die Gesamtkosten minimiert werden. Es soll für jede Stichprobengröße r die optimale Annahmezahl c berechnet werden können.

Zur Erinnerung:

λ : Durchschnittliche[25] Fehlerzahl pro Los, $\lambda \in \mathrm{IR}^+$.
λ existiert nur dann, wenn der Produktionsprozess "beherrscht" ist, d.h. wenn in Mengen gleicher Größe Fehler zufällig und mit konstanter durchschnittlicher Häufigkeit auftreten.

r : Stichprobengröße, also Anteil der Stichprobe am Los ($0 < r < 1$)

c : Annahmezahl
Bei c oder weniger Fehlern in der Stichprobe wird das Los "angenommen", bei mehr als c Fehlern wird das Los "zurückgewiesen".
Es ist nur $0 \leq c < M$ sinnvoll.

---

[24] Siehe Kapitel 2.4.1
[25] oder auch zu erwartende

(r, c) : Stichprobenplan

M : Reklamationsgrenze

i : Fehleranzahl in der Stichprobe

Vierfeldertafel für die verschiedenen Kosten:

	G	S
A	K_{GA}	K_{SA}
Z	K_{GZ}	K_{SZ}

Die hier aufgeführten Kosten sollen von r, aber nicht von c abhängen.

Es soll gelten: $K_{SA} > K_{SZ}$

$K_{GZ} > K_{GA}$

K_{GA} : Kosten unter der Voraussetzung, dass ein Los gut ist und angenommen wird.

K_{SA} : Kosten unter der Voraussetzung, dass ein Los schlecht ist und angenommen wird.

K_{GZ} : Kosten unter der Voraussetzung, dass ein Los gut ist und zurückgewiesen wird.

K_{SZ} : Kosten unter der Voraussetzung, dass ein Los schlecht ist und zurückgewiesen wird.

Wie schon vorher erwähnt, ist das Ziel der (r, c)-Optimierung, die Gesamtkosten einer Stichprobenprüfung zu minimieren. Dies erreicht man dadurch, dass man denjenigen Stichprobenplan sucht, der die geringsten Kosten verursacht.

Definition der Gesamtkosten:
Die Gesamtkosten K kann man als Summe der einzelnen Kosten der Vierfeldertafel darstellen. Die einzelnen Kosten werden dabei jeweils mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert.

K = p(GÈA) ∗ K_{GA} + p(SÈA) ∗ K_{SA} + p(GÈZ) ∗ K_{GZ} + p(SÈZ) ∗ K_{SZ}

Im Szenario V wird zuerst eine zufällige Stichprobe des Umfangs r untersucht. Dadurch entstehen Prüfkosten für jedes untersuchte Los. Daraus folgt, dass die einzelnen Kosten von r abhängig sind.

4.3 ZUSAMMENHANG ZWISCHEN STOCHASTISCHER SIGNALERKENNUNG UND (r, c)-OPTIMIERUNG

Die Resultate aus Kapitel 3 können auf die (r, c)-Optimierung übertragen werden. In der (r, c)-Optimierung setzt man r fest, wobei c gesucht wird.

Ereignisse in der Vierfeldertafel[26]:

Stochastische Signalerkennung	(r, c) - Optimierung
Signal (S)	Los schlecht (S)
Nicht-Signal (N)	Los gut (G)
Entscheidung für Signal (E_S)	Zurückweisung des Loses(Z)
Entscheidung für Nicht-Signal (E_N)	Annahme des Loses (A)
Diskreter Messwert (x[27])	Fehleranzahl in der Stichprobe (i)

[26] Wobei hier die Signalerkennung und (r, c)-Optimierung korrespondieren.
[27] siehe Kapitel 3.1

	G	**S**
A	K_{GA}	K_{SA}
Z	K_{GZ}	K_{SZ}

Auch hier soll gelten:

$$K_{GA} > K_{GZ}$$

$$K_{SA} < K_{SZ}$$

Ein wichtiger Unterschied in der (r, c)-Optimierung zur stochastischen Signalerkennung ist, dass in den Formeln der Signalerkennung sich die Zeichen „³“ und „<“ durch „>“ bzw. „£“ ersetzen lassen, da im Falle „=“ die Entscheidungen E_S und E_N die gleichen Konsequenzen haben.

Somit wird in der (r, c)-Optimierung die folgende Formel angewendet:[28]

$$\frac{p(S\,|\,B)}{p(N\,|\,B)} \geq \frac{K_{SZ} - K_{SA}}{K_{GA} - K_{GZ}}$$

Nun kann man die Wahrscheinlichkeit auf Signal p(S|B) der Wahrscheinlichkeit für ein schlechtes Los p(S|i), sowie die Wahrscheinlichkeit auf Nicht-Signal p(N|B) der Wahrscheinlichkeit für ein gutes Los p(G|i) gleichsetzen, d.h.

$$p(S|B)=p(S|i)$$

$$p(N|B)=p(G|i)$$

Erläuterung:

p(G|i) ist die Wahrscheinlichkeit für gute Lose, falls in der Stichprobe i Fehler sind.

p(S|i) ist die Wahrscheinlichkeit für schlechte Lose, falls in der Stichprobe i Fehler sind.

Damit gilt: p(S|i) = 1- p(G|i) mit i Î IN_0

[28] siehe Kapitel 3.3

i sei Fehleranzahl in der Stichprobe von der die Entscheidung auf Annahme oder Zurückweisung des Loses abhängt.

Entscheidung auf Signal (E_S), also hier bzw. (r, c)-Optimierung genau dann auf Zurückweisung entschieden, wenn für die Fehleranzahl i gilt:

$$\frac{p(S\,|\,i)}{p(G\,|\,i)} > \frac{K_{GZ} - K_{GA}}{K_{SA} - K_{SZ}}$$

Entscheidung auf Nicht-Signal (E_N), entspricht der hier bzw. (r, c)-Optimierung genau dann auf Annahme, wenn für die Fehleranzahl i gilt:

$$\frac{p(S\,|\,i)}{p(G\,|\,i)} \leq \frac{K_{GZ} - K_{GA}}{K_{SA} - K_{SZ}}$$

$$\frac{1 - p(G\,|\,i)}{p(G\,|\,i)} \leq \frac{K_{GZ} - K_{GA}}{K_{SA} - K_{SZ}}$$

$$(1 - p(G\,|\,i))\,(K_{SA} - K_{SZ}) \leq p(G\,|\,i)\,(K_{GZ} - K_{GA})$$

$$p(G\,|\,i) \geq \frac{K_{SA} - K_{SZ}}{K_{SA} - K_{SZ} + K_{GZ} - K_{GA}}$$

Durch Vergleich mit dem Hauptsatz der Entscheidungstheorie[29] erkennt man nun, dass die (r, c)-Optimierung tatsächlich ein Spezialfall der Signalerkennung ist.

$$p(G\,|\,i) \geq \frac{K_{SA} - K_{SZ}}{K_{SA} - K_{SZ} + K_{GZ} - K_{GA}} = \gamma$$

[29] siehe Kapitel 3.4

Ein Los gilt als gut, wenn es weniger als M Fehler enthält. Die Wahrscheinlichkeit für „Los ist gut" lautet:

$$p(G) = P_{\lambda}\ (M-1)$$

Wenn in der Stichprobe bereits i Fehler vorkommen, ist die Wahrscheinlichkeit für ein gutes Los gleich der Wahrscheinlichkeit, dass im Rest des Loses, der den Umfang 1-r hat, M-1-i Fehler vorhanden sind.

$$p(G\,|\,i) = P_{(1-r)\lambda}\ (M-1-i)$$

Annahme, falls:

$$P_{(1-r)\lambda}(M-1-i) \geq \frac{K_{SA}-K_{SZ}}{K_{SA}-K_{SZ}+K_{GZ}-K_{GA}}$$

Die Kurve für $P_{(1-r)\lambda}\ (M-1-i)$ fällt mit i monoton, da für $i_1 < i_2$

$P_{(1-r)\lambda}\ (M-1-i_1) > P_{(1-r)\lambda}\ (M-1-i_2)$ gilt.

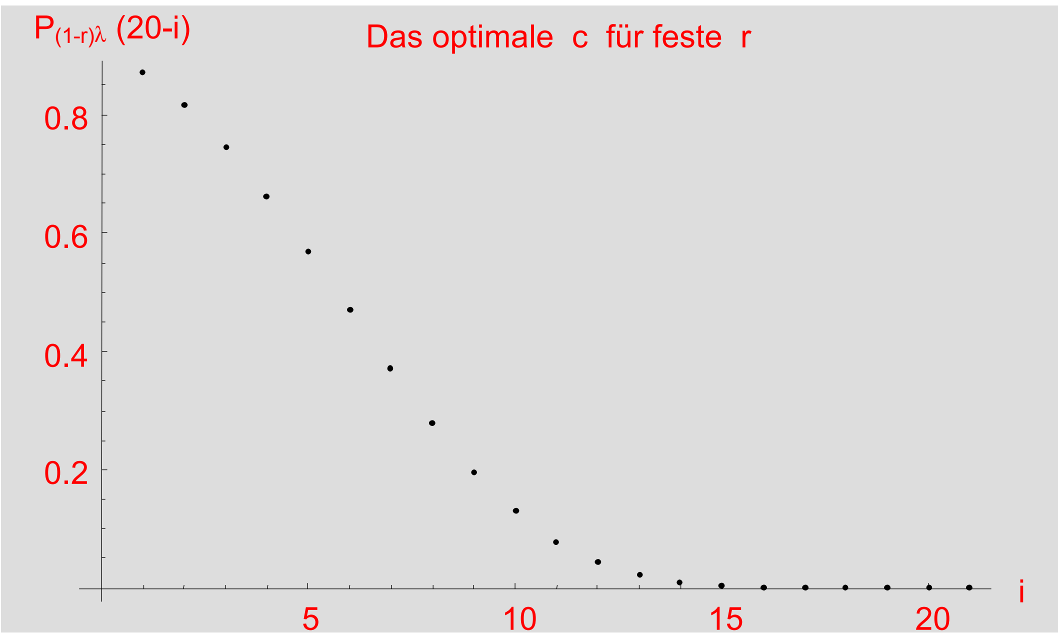

Abbildung 10: Verteilung der Wahrscheinlichkeit für „Los ist gut"

Quantile sind statistische Messzahlen, die ebenfalls zur Charakterisierung von Häufigkeitsverteilungen herangezogen werden.

<u>Definition des q-Quantils</u>[30]:
Jeder Zahlenwert x_q, der die Ungleichungen $P(X<x_q) \leq q$ und $P(X>x_q) \leq 1-q$ erfüllt, heißt q-Quantil der Zufallsvariablen X mit der Dichte P.

Falls $\gamma \leq P_{(1-r)\lambda}(M-1)$ gilt für $c \in \{0, M-1\}$

$\gamma = P_{(1-r)\lambda}(M-1-c)$

Da die Kurve für $P_{(1-r)\lambda}(M-1-i)$ mit i monoton fällt gilt für $i > M-1-c$:

$$P_{(1-r)\lambda}(M-1-i) \leq P_{(1-r)\lambda}(M-1-c)$$

c ist also maximales i, für das noch $p(G\,|\,i) = P_{(1-r)\lambda}(M-1-i) \geq \gamma$ gilt.

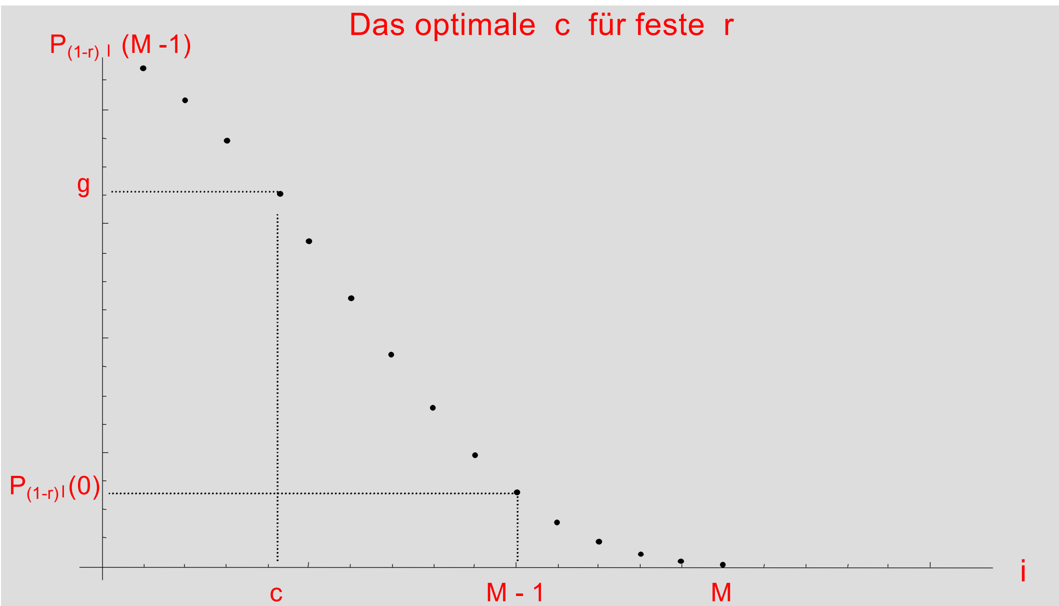

Abbildung 11: Verteilung der Wahrscheinlichkeit für „Los ist gut“, dabei $\gamma \leq P_{(1-r)\lambda}(M-1)$

30 Bosch, K.; Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung;1986

<u>Also gilt nach der Definition von c:</u>

M - 1 - c ist das g-Quantil von $P_{(1-r)l}$

Falls $g \leq P_{(1-r)l}$ (M - 1) gilt:

Quantil [$P_{(1-r)l}$, g] = M - 1 - c

Damit gilt für c:

$$\boxed{c = M - 1 - \text{Quantil}\,[P_{(1-r)l},\ g\,]}$$

Falls $g > P_{(1-r)l}$(M - 1)

ist Annahme des Loses immer teurer als Zurückweisung (man setzt c=0).

<u>Für das optimale c gilt also:</u>

$$\boxed{c\ =\ \max\ \{0, M - 1 - \text{Quantil}\,[P_{(1-r)l},\ g\,]\,\}}$$

<u>Beispiel:</u>

Zur Qualitätssicherung wird in einem Unternehmen, welches Drahtrollen herstellt, vor der Freigabe zum Verkauf jeweils ein Los untersucht (ein Los = eine Drahtrolle). Eine Stichprobe von 7,5 % dieses Loses wird durch eine optische Kontrolle erfasst, bei der zu dünne oder zu dicke Drahtstellen erkannt und gezählt werden.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler auf einer Drahtrolle nach der Poisson-Verteilung[31] lautet $e^{-17,25}$ * 17,25 » 5,56172E^{-07} und die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerlose Stichprobe lautet $e^{-1.29375}$ » 0,27424045.

---

[31] siehe Kapitel 2.2.2

Aus Erfahrungswerten ist in dem Unternehmen bekannt, dass der Produktionsbetrieb beherrscht ist. Ein Draht weist im Durchschnitt pro Los 17,25 Fehler auf. Mit den Großkunden des Unternehmens wird eine Reklamationsgrenze von maximal 21 Fehlern pro Los vereinbart.

Für das Unternehmen entstehen Kosten in Höhe von 1.400 DM, wenn ein Los zu viele Fehler aufweist und dennoch an den Kunden verkauft wird bzw. Kosten in Höhe von 350 DM, wenn ein Los gut ist, aber vom Kunden trotzdem zurückgewiesen wird. Weiterhin entstehen Kosten in Höhe von 100 DM, wenn ein Los gut ist und vom Kunde angenommen wird bzw. Kosten in Höhe von 700 DM, wenn ein Los schlecht ist und vom Kunde zurückgewiesen wird.

Des weiteren entstehen der Firma Kosten in Höhe von 100 DM pro Stichprobenanteil am Los (100*r) für die eigentliche Qualitätsprüfung, die grundsätzlich zu den Kosten addiert werden müssen.

K_{GA} = 100 + 100*r DM
K_{SA} = 1.400 + 100*r DM
K_{GZ} = 350 + 100*r DM
K_{SZ} = 700 + 100*r DM

Die Parameter lauten:
r = 0,075
l = 17,25
M = 21
K_{GA} = 107,5 DM
K_{SA} = 1407,5 DM
K_{GZ} = 357,5 DM
K_{SZ} = 707,5 DM

Berechnung:

$\gamma = 700/950 = 0{,}736842$

$P_{(1-r)1}\ (M-1-c) = P_{15,96}\ (21 - 1 - c) = 0{,}736842$

$20 – c = \text{Quantil}\ [P_{15,96},\ 0{,}736842]$

$c = 20 - \text{Quantil}\ [P_{15,96},\ 0{,}736842]$

Anhand der Graphik (vgl. Abbildung 11) lässt sich folgern, dass für r = 0,075 und g = 0,736842 das optimale c = 2 ist.

Fazit:

Ein optimales c soll für die festen Größen r, M, 1 und die Kosten aus der Vierfeldertafel berechnet werden. Die Entwicklung von c wird mittels einer Graphik gezeigt.[32].

Beispiel:

Zur Qualitätssicherung wird in einem Unternehmen, welches Waschpulver herstellt, vor der Freigabe zum Verkauf jede Waschmittelpackung (=ein Los) untersucht. Durch die häufigen Stichproben ist dem Betrieb bekannt, dass sein Produktionsprozess „beherrscht" ist.[33] Eine Tonne Waschmittel weist im Durchschnitt pro Los 9,7 Fehler. Die Wahrscheinlichkeit für ein Fehler auf einer Tonne Waschmittel nach der Poisson-Verteilung[34] lautet $e^{-9,7} * 9{,}7$ » 0,00059445.
Mit den Großkunden des Unternehmens wird eine Reklamationsgrenze von 14 Fehlern pro Los vereinbart.

---

[32] siehe Kapitel 5.3.2 Berechung optimaler Stichprobenpläne mit Mathematica^Ò: Das Software-Tool Opti-Konti-Pekuyar, sowie Quellcode siehe Anhang Seite 106

[33] siehe Kapitel 4.2

[34] siehe Kapitel 2.2.2

Für das Unternehmen entstehen Kosten in Höhe von 1.000 DM, wenn ein Los zu viele Fehler aufweist und dennoch an den Kunden verkauft wird bzw. Kosten in Höhe von 100 DM, wenn ein Los gut ist, aber vom Kunden trotzdem zurückgewiesen wird. Weiterhin entstehen Kosten in Höhe 50 DM wenn ein Los gut ist und vom Kunden angenommen wird bzw. Kosten in Höhe 200 DM wenn ein Los schlecht ist und vom Kunden zurückgewiesen wird.
Des weiteren entstehen der Firma Kosten in Höhe von 100 DM pro Stichprobenanteil am Los (100*r) für die eigentliche Qualitätsprüfung, die grundsätzlich zu den Kosten addiert werden müssen.

Die Parameter lauten:

l = 9,7

M = 14

K_{GA} = 50 + 100*r DM

K_{SA} = 1.000 + 100*r DM

K_{GZ} = 100 + 100*r DM

K_{SZ} = 200 + 100*r DM

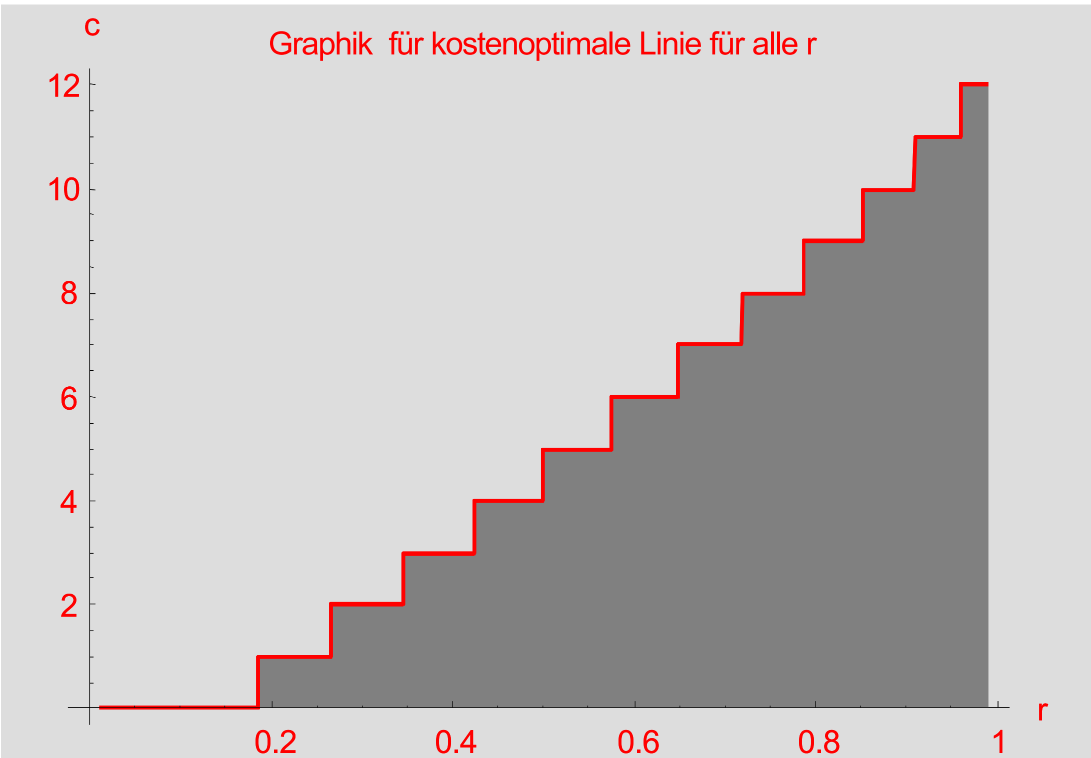

Abbildung 12: Berechnung des optimalen c jeder Stichprobengröße r bei gegebenen l und Kosten

Optimales c für alle r:

c = 0	für	r = 0,01	bis	r = 0,18
c = 1	für	r = 0,19	bis	r = 0,26
c = 2	für	r = 0,27	bis	r = 0,34
c = 3	für	r = 0,35	bis	r = 0,42
c = 4	für	r = 0,43	bis	r = 0,49
c = 5	für	r = 0,5	bis	r = 0,57
c = 6	für	r = 0,58	bis	r = 0,64
c = 7	für	r = 0,65	bis	r = 0,71
c = 8	für	r = 0,72	bis	r = 0,78
c = 9	für	r = 0,79	bis	r = 0,85
c = 10	für	r = 0,86	bis	r = 0,9
c = 11	für	r = 0,91	bis	r = 0,95
c = 12	für	r = 0,96	bis	r = 0,99

Fazit:

Ein optimales c soll für die feste Größen M, 1 und Kosten aus der Vierfeldertafel für alle Stichprobengröße r berechnet werden Die kostenoptimale Linie für alle r wird mittels einer Grafik gezeigt[35].

Sonderfall 1 (r=1):

Bei der Vollkontrolle r=1

$$p(G|i) = \begin{cases} 1 & i < M \\ 0 & i \geq M \end{cases}$$

Für die c gilt: c = M - 1

Das Los wird angenommen, falls i < M, sonst wird es zurückgewiesen.

Sonderfall 2 (r = 0)

Ein Los wird ohne Stichprobenziehung r=0 angenommen.

Aus der Vierfeldertafel der Kosten sind also nur die Kosten der Annahme relevant.

$K = p(G) * K_{GA} + p(S) * K_{SA}$

[35] siehe Kapitel 5.3.3 Berechung optimaler Stichprobenpläne mit MathematicaÒ: Das Software-Tool Opti-Konti-Pekuyar, sowie Quellcode siehe Anhang Seite 108

4.4 KOSTENRECHNUNG

Das Qualitätsmanagement sollte sich können über die zu erwartenden Risiken, Effekte und Kosten der im Unternehmen und bei Zulieferern verwendeten oder vorgesehenen Stichprobenpläne jederzeit informieren.

Will ein Betrieb einen Kostenvergleich für zwei oder mehr Stichprobenanweisungen vornehmen, so sind dafür die Qualitäts-Kennzahlen wie p(G), p(Z) usw. eine wesentliche Voraussetzung. Außerdem müssen die wichtigsten Kostenarten vorliegen.

Diese sind:

K_P Prüfkosten für ein ganze Los

K_Z Kosten für eine Zurückweisung eines Loses

K_R Kosten für ein schlechtes, ausgeliefertes Los

K_{R_1} Kosten, wenn ein Los reklamiert wird:
  Vertragsstrafe usw.
+ Rücksendekosten
- Wert des rückgesandten Loses (z.B. Einschmelzen)
+ Kosten für vollkontrolliertes gutes Los als Ersatzlieferung

K_{R_2} Kosten, die entstehen, wenn ein schlechtes Los nicht reklamiert wird (z. B: Verlust des Kunden)

K_V Vernichtungskosten bzw. Entsorgungskosten.

q Anteil der tatsächlichen Reklamationen

Die Kosten lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Zum einen in die Kosten, die direkt bei der Stichprobenkontrolle entstehen (K_P) und deren Höhe man schon im Voraus berechnen kann, da sie nicht von den errechneten Wahrscheinlichkeiten abhängen. Zum anderen in die Kosten, die erst dadurch entstehen, dass die Lose zurückgewiesen werden bzw. schlecht sind (K_R, K_V).

Zur Erinnerung werden hier noch einmal die Kosten gemäß der Vierfeldertafel erläutert:

K_{GA} : Kosten unter der Voraussetzung, dass ein Los gut ist und angenommen wird.

K_{SA} : Kosten unter der Voraussetzung, dass ein Los schlecht ist und angenommen wird.

K_{GZ} : Kosten unter der Voraussetzung, dass ein Los gut ist und zurückgewiesen wird.

K_{SZ} : Kosten unter der Voraussetzung, dass ein Los schlecht ist und zurückgewiesen wird.

Die verschiedenen Kosten werden anhand der folgenden Formeln berechnet.

1. $K_{G \cap A} = r * K_P$

2. $K_{S \cap A} = r * K_P + K_R$

   $K_R = q * K_{R1} + (1 - q) * K_{R2}$

3. $K_{G \cap Z} = r * K_P + K_Z$

4. $K_{S \cap Z} = r * K_P + K_V$

4.5 KOSTENMINIMALE STICHPROBENPLÄNE

In diesem Kapitel werden die Hauptergebnisse der vorangegangenen Überlegungen noch einmal prägnant dargestellt.

Durch Gegenüberstellung der stochastischen Signalerkennung und der (r, c)-Optimierung wurde eine Formel zur Berechnung von kostenoptimalen Stichprobenplänen für kontinuierliche Lose entwickelt.

Als Grundüberlegung wurde die Frage gestellt, ab welcher Fehleranzahl in einer Stichprobe ein Los angenommen werden soll (wobei i Î {0, M-1}).

Als wichtigste Formel ist hier zu nennen:

$$P_{(1-r)\,l}\,(M-1-i) \geq \frac{K_{SA}-K_{SZ}}{K_{SA}-K_{SZ}+K_{GZ}-K_{GA}}$$

<u>Beispiel:</u>
Die Firma Ulrich produziert aluminiumplattierte Leichtmetallbleche. Es werden regelmäßig Stichproben gezogen, die zeigen, dass der Produktionsprozess beherrscht ist. Es ist bekannt, dass im Mittel 5,6 kleine Blasen bei der Wärmebehandlung im Laufe der Fertigung dieser Bleche auftreten.

Die Qualitätssicherungs-Vereinbarung lässt zu, dass ein Los maximal 6 derartige Blasen auf der Plattierschicht eines Bleches bei gegebener Abmessung haben darf.

Es kann technisch sinnvoll sein, die Annahme zu treffen, dass die Lage dieser Blasen zufällig über die Fläche der Bleche verteilt ist. Infolge dessen werden einzelne Bleche untersucht, ob sie entweder keine Blasen oder mehrere Blasen enthalten.

Wenn man keine weitere Vorschrift erlässt, so würden die Bedingungen der Vorschriften des Käufers erfüllt sein, wenn ein Los von 100 m^2 Blechen in der gesamten Menge 5,6 Blasen enthält. Der Käufer hat erst ab 6 Blasen in der Lieferung ein vertragliches Reklamationsrecht.

Für das Unternehmen entstehen Kosten in Höhe von 1.000 DM, wenn ein Los zu viele Fehler aufweist und dennoch an den Kunden verkauft wird bzw. Kosten in Höhe von 100 DM, wenn ein Los gut ist, aber vom Kunden trotzdem zurückgewiesen wird. Weiterhin entstehen Kosten in Höhe 200 DM wenn ein Los schlecht ist und vom Kunden zurückgewiesen wird.

Des weiteren entstehen dem Unternehmen Kosten in Höhe von 100 DM pro Stichprobenanteil am Los (100*r) für die eigentliche Qualitätsprüfung, die grundsätzlich zu den Kosten addiert werden müssen.

Das Unternehmen will die Stichprobengröße ermitteln, bei der minimale Gesamtkosten entstehen, d.h. es wird ein optimaler Prüfplan gesucht.
Das folgende Beispiel stellt einen optimalen Prüfplan mit steigendem Gesamtkostenverlauf dar.

Die Parameter lauten[36]:

l = 7,5

M = 12

$K_{GA} = 100*r$

$K_{SA} = 1.000 + 100*r$ DM

$K_{GZ} = 100 + 100*r$ DM

$K_{SZ} = 200 + 100*r$ DM

[36] siehe Kapitel 5.3.4 Berechung optimaler Stichprobenpläne mit MathematicaÒ: Das Software-Tool Opti-Konti-Pekuyar, sowie Quellcode siehe Anhang Seite 110

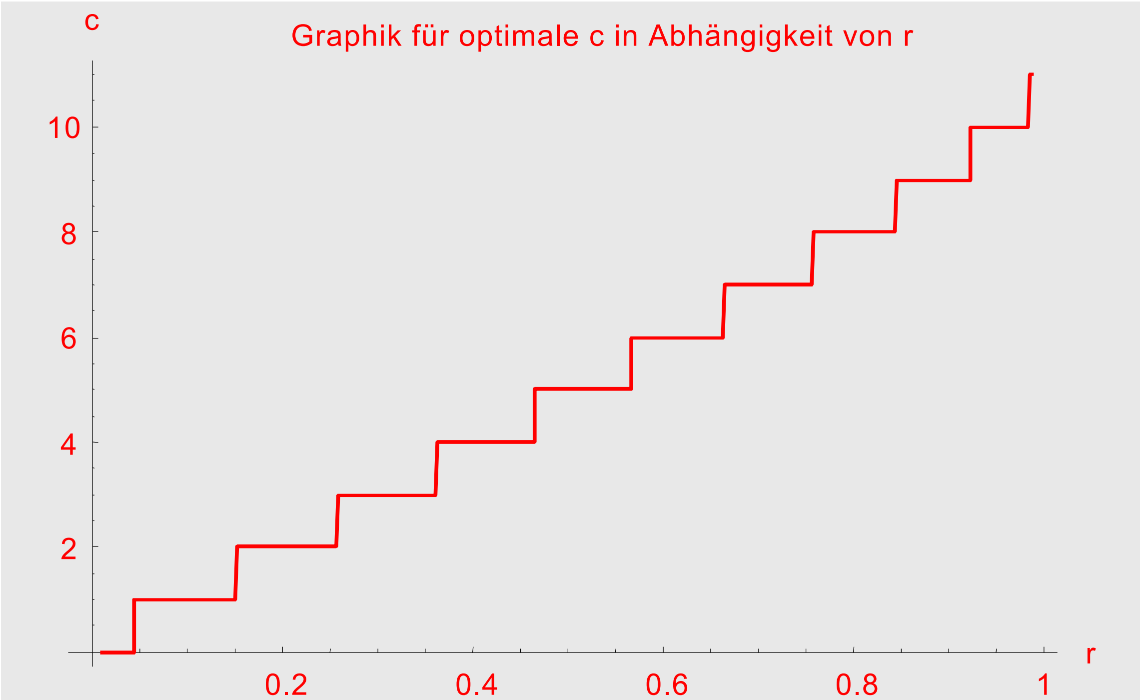

Abbildung 13: Optimales c in Abhängigkeit von r

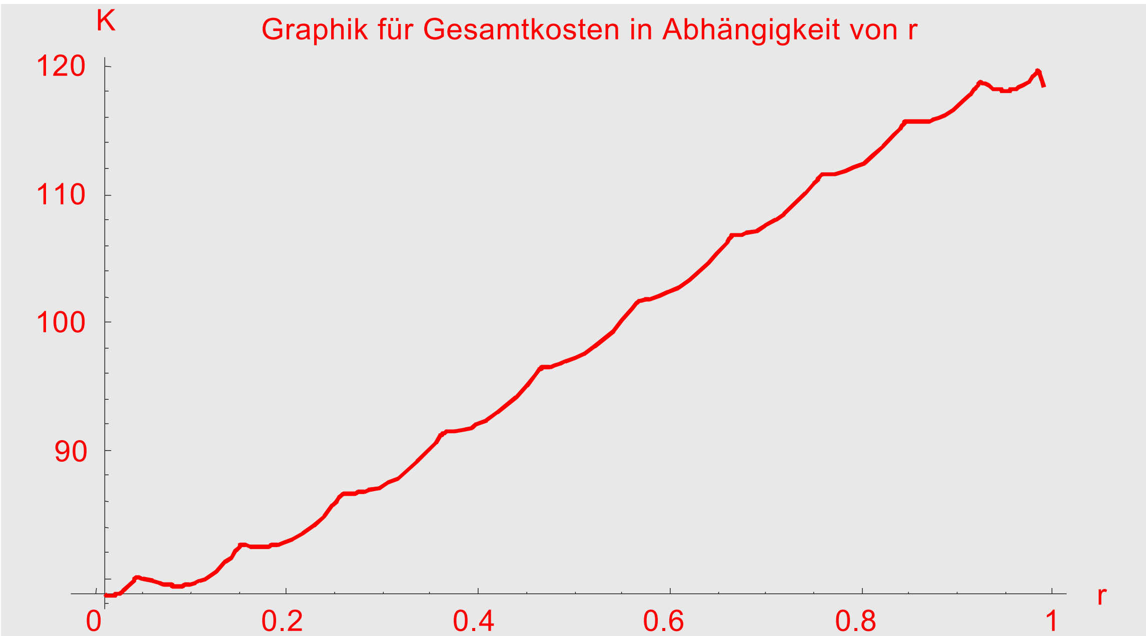

Abbildung 14: Gesamtkosten in Abhängigkeit von r

Tabelle für optimale Pläne, Grundwahrscheinlichkeiten und Kosten für das Beispiel:

l=7.5 und M=12

Hr,cL	pHGL	pHAL	pHGÝAL	D	Kosten
H0.01,0L	0.920759	0.927743	0.858229	7.425	78.713
H0.03,0L	0.920759	0.798516	0.745206	7.275	79.052
H0.05,1L	0.920759	0.945023	0.876596	7.39773	80.006
H0.07,1L	0.920759	0.902122	0.841177	7.31926	79.563
H0.09,1L	0.920759	0.852837	0.799749	7.22799	79.420
H0.11,1L	0.920759	0.799779	0.754387	7.12705	79.799
H0.13,1L	0.920759	0.744955	0.706765	7.01867	80.799
H0.15,1L	0.920759	0.689886	0.658217	6.90441	82.438
H0.17,2L	0.920759	0.86283	0.814137	7.16438	82.465
H0.19,2L	0.920759	0.827424	0.784699	7.07945	82.634
H0.21,2L	0.920759	0.789799	0.75282	6.98799	83.225
H0.23,2L	0.920759	0.75061	0.719026	6.89079	84.288
H0.25,2L	0.920759	0.710465	0.683835	6.78858	85.845
H0.27,3L	0.920759	0.852584	0.811501	7.06612	86.640
H0.29,3L	0.920759	0.824246	0.788215	6.98591	86.927
H0.31,3L	0.920759	0.794245	0.763036	6.90041	87.588
H0.33,3L	0.920759	0.762907	0.73621	6.81008	88.660
H0.35,3L	0.920759	0.730552	0.708004	6.71532	90.162
H0.37,4L	0.920759	0.851549	0.816377	6.99797	91.424
H0.39,4L	0.920759	0.827704	0.797028	6.9216	91.762
H0.41,4L	0.920759	0.802507	0.776088	6.84066	92.451
H0.43,4L	0.920759	0.776146	0.753686	6.75545	93.524
H0.45,4L	0.920759	0.748817	0.729979	6.66625	94.997
H0.47,5L	0.920759	0.854292	0.824275	6.94884	96.510
H0.49,5L	0.920759	0.833644	0.807744	6.87576	96.870
H0.51,5L	0.920759	0.811849	0.789808	6.79862	97.576
H0.53,5L	0.920759	0.789025	0.770542	6.7176	98.657
H0.55,5L	0.920759	0.765301	0.75004	6.63291	100.129
H0.57,6L	0.920759	0.858753	0.833591	6.91286	101.695
H0.59,6L	0.920759	0.840538	0.819209	6.84272	102.066
H0.61,6L	0.920759	0.821323	0.803543	6.76887	102.794
H0.63,6L	0.920759	0.801189	0.786634	6.69146	103.905
H0.65,6L	0.920759	0.780223	0.768542	6.61062	105.415
H0.67,7L	0.920759	0.864004	0.843703	6.8865	106.795
H0.69,7L	0.920759	0.847723	0.831022	6.81904	107.182
H0.71,7L	0.920759	0.830556	0.817127	6.74814	107.955
H0.73,7L	0.920759	0.812561	0.802034	6.67392	109.142
H0.75,7L	0.920759	0.793798	0.785785	6.59649	110.756
H0.77,8L	0.920759	0.869579	0.854447	6.86746	111.585
H0.79,8L	0.920759	0.854884	0.843125	6.80245	112.019
H0.81,8L	0.920759	0.839397	0.830597	6.73425	112.905
H0.83,8L	0.920759	0.823156	0.816866	6.66292	114.270
H0.85,9L	0.920759	0.887851	0.875058	6.91377	115.653
H0.87,9L	0.920759	0.875228	0.865999	6.85412	115.708
H0.89,9L	0.920759	0.861867	0.855675	6.79141	116.310
H0.91,9L	0.920759	0.847789	0.844036	6.72569	117.523
H0.93,10L	0.920759	0.903244	0.894418	6.95773	118.543
H0.95,10L	0.920759	0.892369	0.887472	6.903	118.095
H0.97,10L	0.920759	0.880816	0.878899	6.84533	118.568
H0.99,11L	0.920759	0.925071	0.920759	7.0467	118.298

Die minimalen Gesamtkosten sind 78.713 DM für r=880.01<<

Das Unternehmen aus dem Beispiel oben will die Stichprobengröße ermitteln, bei der minimale Gesamtkosten entstehen, d.h. es wird ein optimaler Prüfplan gesucht.
Das folgende Beispiel stellt einen optimalen Prüfplan mit monoton fallendem Gesamtkostenverlauf dar.

Die Parameter lauten[37]:

λ = 7,1

M = 10

K_{GA} = 100*r

K_{SA} = 2.000 + 100*r DM

K_{GZ} = 250 + 100*r DM

K_{SZ} = 50 + 100*r DM

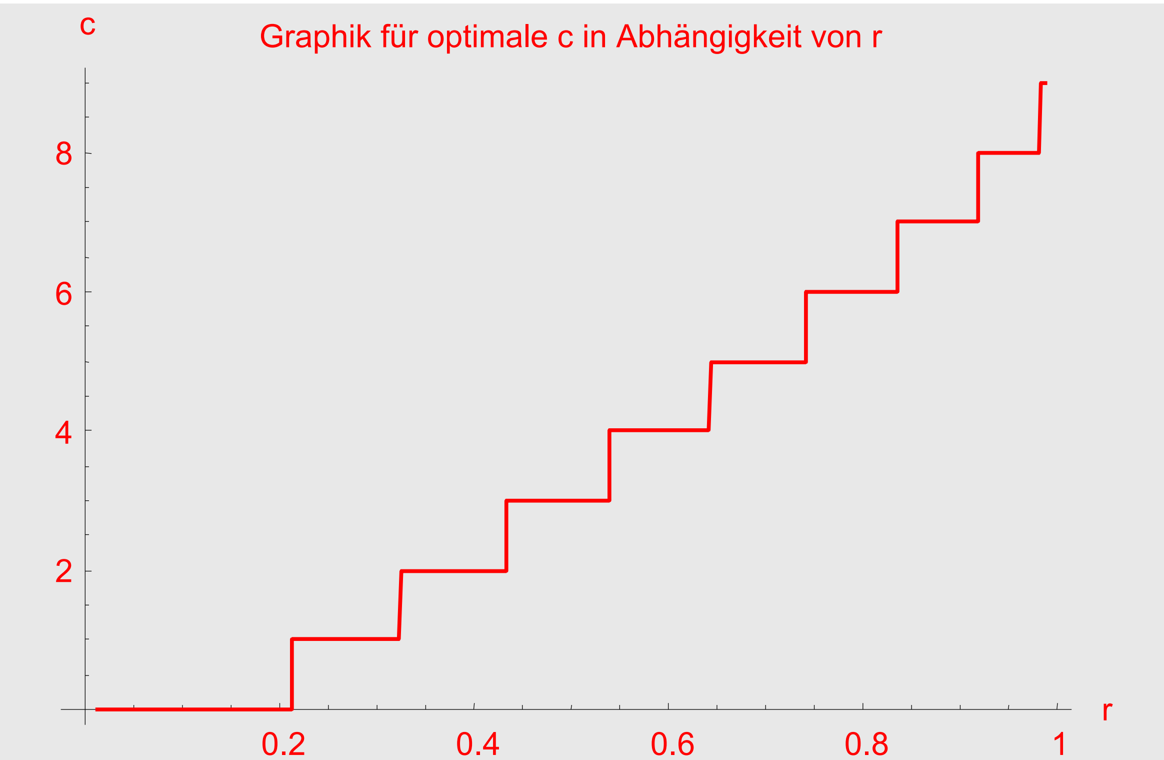

Abbildung 15: Optimales c in Abhängigkeit von r

[37] siehe Kapitel 5.3.4 Berechung optimaler Stichprobenpläne mit Mathematica®: Das Software-Tool Opti-Konti-Pekuyar, sowie Quellcode siehe Anhang Seite 112

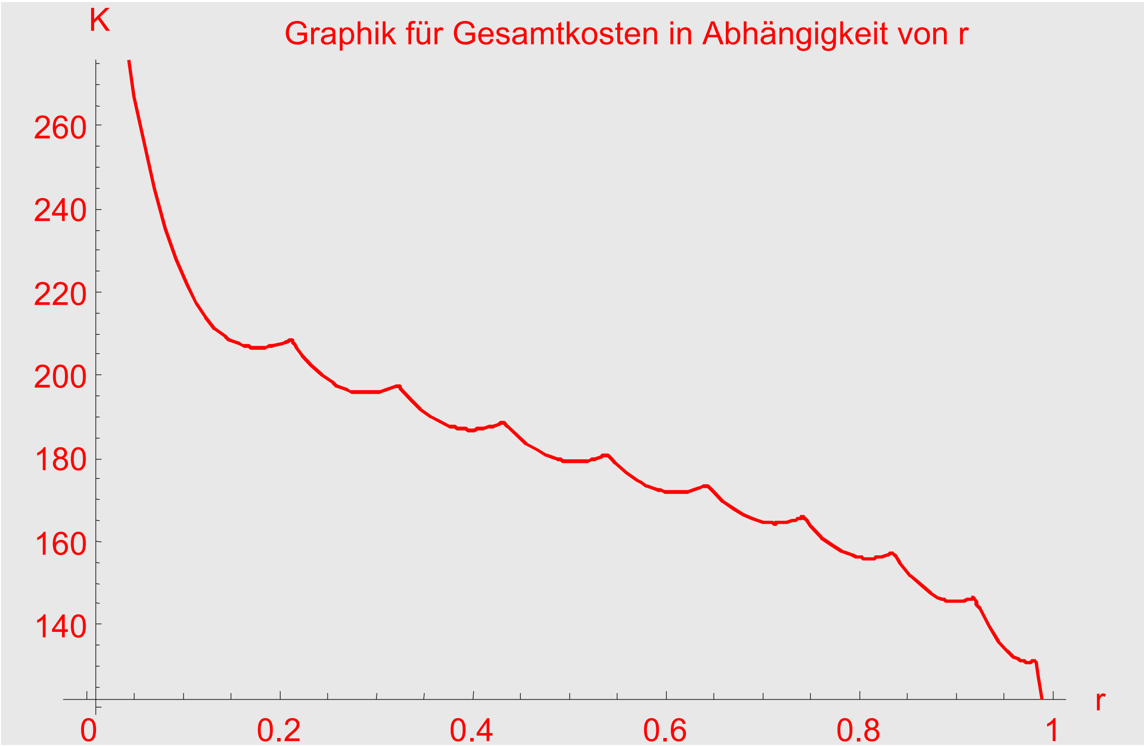

Abbildung 16: Gesamtkosten in Abhängigkeit von r

Tabelle für optimale Pläne, Grundwahrscheinlichkeiten und Kosten für das Beispiel.

l=7.1 und M=10

Hr,cL	pHGL	pHAL	pHGŸAL	D	Kosten
H0.01,0L	0.820212	0.931462	0.770825	7.029	335.579
H0.03,0L	0.820212	0.808156	0.680279	6.887	296.332
H0.05,0L	0.820212	0.701173	0.599773	6.745	266.829
H0.07,0L	0.820212	0.608353	0.528276	6.603	245.123
H0.09,0L	0.820212	0.52782	0.464854	6.461	229.613
H0.11,0L	0.820212	0.457948	0.408659	6.319	218.991
H0.13,0L	0.820212	0.397325	0.358925	6.177	212.192
H0.15,0L	0.820212	0.344728	0.314959	6.035	208.352
H0.17,0L	0.820212	0.299093	0.276136	5.893	206.775
H0.19,0L	0.820212	0.2595	0.241893	5.751	206.902
H0.21,0L	0.820212	0.225147	0.211722	5.609	208.291
H0.23,1L	0.820212	0.514337	0.47135	6.08721	203.030
H0.25,1L	0.820212	0.470317	0.435164	5.96464	198.799
H0.27,1L	0.820212	0.428937	0.400461	5.84018	196.457
H0.29,1L	0.820212	0.390272	0.367419	5.7141	195.751
H0.31,1L	0.820212	0.354326	0.33616	5.5866	196.426
H0.33,2L	0.820212	0.584669	0.541567	6.04361	195.699
H0.35,2L	0.820212	0.547667	0.511727	5.93262	191.192
H0.37,2L	0.820212	0.511673	0.482022	5.81924	188.356
H0.39,2L	0.820212	0.476876	0.452677	5.70372	187.060
H0.41,2L	0.820212	0.443422	0.423894	5.58627	187.150
H0.43,2L	0.820212	0.411421	0.395842	5.46709	188.461
H0.45,3L	0.820212	0.603633	0.56886	5.92134	184.634
H0.47,3L	0.820212	0.572179	0.543368	5.81619	181.381
H0.49,3L	0.820212	0.541171	0.517596	5.7087	179.615
H0.51,3L	0.820212	0.510762	0.491722	5.59906	179.240
H0.53,3L	0.820212	0.481084	0.465919	5.48744	180.135
H0.55,4L	0.820212	0.64739	0.615029	5.92291	178.388
H0.57,4L	0.820212	0.619656	0.593009	5.8244	174.751
H0.59,4L	0.820212	0.591966	0.570353	5.72348	172.600
H0.61,4L	0.820212	0.564453	0.547206	5.6203	171.873
H0.63,4L	0.820212	0.537236	0.523714	5.51504	172.482
H0.65,5L	0.820212	0.68317	0.654318	5.93305	171.724
H0.67,5L	0.820212	0.658513	0.63519	5.84016	167.725
H0.69,5L	0.820212	0.633677	0.615198	5.74485	165.278
H0.71,5L	0.820212	0.608767	0.594451	5.64725	164.346
H0.73,5L	0.820212	0.583885	0.573073	5.54751	164.859
H0.75,6L	0.820212	0.713286	0.689209	5.94914	163.691
H0.77,6L	0.820212	0.691213	0.672517	5.86117	159.369
H0.79,6L	0.820212	0.668832	0.654767	5.7708	156.777
H0.81,6L	0.820212	0.646228	0.636037	5.67814	155.904
H0.83,6L	0.820212	0.623484	0.616431	5.5833	156.688
H0.85,7L	0.820212	0.739147	0.721709	5.96945	152.620
H0.87,7L	0.820212	0.719273	0.70704	5.88589	148.136
H0.89,7L	0.820212	0.699019	0.691039	5.79995	145.842
H0.91,7L	0.820212	0.678452	0.67375	5.71174	145.774
H0.93,8L	0.820212	0.779193	0.76596	6.06995	141.356
H0.95,8L	0.820212	0.761681	0.75451	5.9928	134.399
H0.97,8L	0.820212	0.743701	0.740959	5.91323	131.148
H0.99,9L	0.820212	0.827543	0.820212	6.23159	122.284

Die minimalen Gesamtkosten sind 122.284 DM für r=880.99<<

Das Unternehmen aus dem Beispiel oben will die Stichprobengröße ermitteln, bei der minimale Gesamtkosten entstehen, d.h. es wird ein optimaler Prüfplan gesucht.
Das folgende Beispiel stellt einen optimalen Prüfplan mit steigendem und monoton fallenden Gesamtkostenverlauf dar.

Die Parameter lauten[38]:

l = 5,6

M = 6

K_{GA} = 100*r

K_{SA} = 1.000 + 100*r DM

K_{GZ} = 100 + 100*r DM

K_{SZ} = 200 + 100*r DM

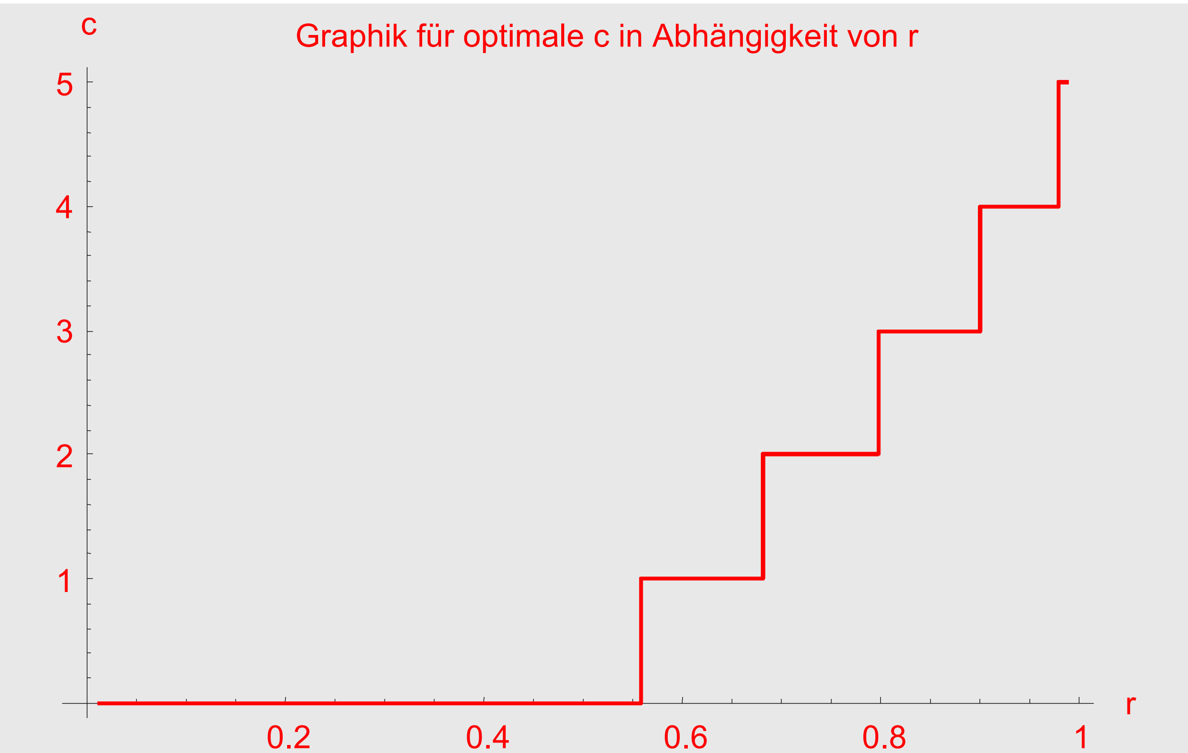

Abbildung 17: Optimales c in Abhängigkeit von r

[38] siehe Kapitel 5.3.4 Berechung optimaler Stichprobenpläne mit MathematicaÒ: Das Software-Tool Opti-Konti-Pekuyar, sowie Quellcode siehe Anhang Seite 114

Die folgende Graphik zeigt, wie sich die Gesamtkosten K mit zunehmender Stichprobengröße r verändern.

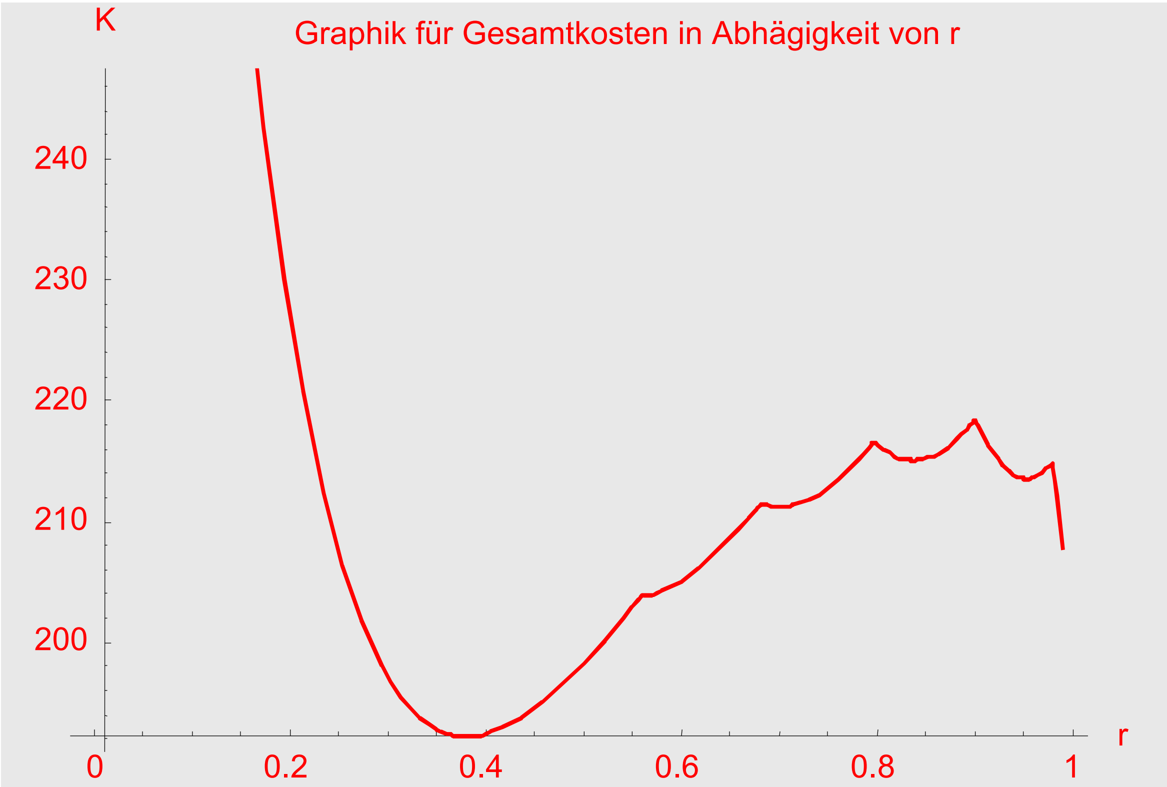

Abbildung 18: Gesamtkosten in Abhängigkeit von r

Aus den Graphiken folgt, dass die minimalen Gesamtkosten 192,25 DM mit r = 0,39 betragen.[39]

[39] Quellcode siehe Anhang Seite

Tabelle für optimale Pläne, Grundwahrscheinlichkeiten und Kosten für das Beispiel.

l=5.7 und M=6

Hr,cL	pHGL	pHAL	pHGŸAL	D	Kosten
H0.01,0L	0.494985	0.944594	0.476624	5.643	478.215
H0.03,0L	0.494985	0.842822	0.4416	5.529	430.318
H0.05,0L	0.494985	0.752014	0.408751	5.415	389.237
H0.07,0L	0.494985	0.670991	0.377969	5.301	354.122
H0.09,0L	0.494985	0.598697	0.349151	5.187	324.223
H0.11,0L	0.494985	0.534192	0.3222	5.073	298.875
H0.13,0L	0.494985	0.476637	0.297018	4.959	277.495
H0.15,0L	0.494985	0.425283	0.273515	4.845	259.565
H0.17,0L	0.494985	0.379462	0.2516	4.731	244.631
H0.19,0L	0.494985	0.338578	0.23119	4.617	232.294
H0.21,0L	0.494985	0.302099	0.2122	4.503	222.201
H0.23,0L	0.494985	0.26955	0.194552	4.389	214.045
H0.25,0L	0.494985	0.240508	0.178171	4.275	207.554
H0.27,0L	0.494985	0.214596	0.162983	4.161	202.493
H0.29,0L	0.494985	0.191475	0.148918	4.047	198.655
H0.31,0L	0.494985	0.170845	0.135909	3.933	195.859
H0.33,0L	0.494985	0.152438	0.123892	3.819	193.948
H0.35,0L	0.494985	0.136014	0.112806	3.705	192.787
H0.37,0L	0.494985	0.121359	0.102592	3.591	192.256
H0.39,0L	0.494985	0.108284	0.0931932	3.477	192.255
H0.41,0L	0.494985	0.0966171	0.084557	3.363	192.694
H0.43,0L	0.494985	0.0862073	0.0766323	3.249	193.498
H0.45,0L	0.494985	0.0769192	0.0693707	3.135	194.603
H0.47,0L	0.494985	0.0686318	0.062726	3.021	195.954
H0.49,0L	0.494985	0.0612372	0.0566546	2.907	197.502
H0.51,0L	0.494985	0.0546394	0.0511151	2.793	199.209
H0.53,0L	0.494985	0.0487524	0.0460682	2.679	201.042
H0.55,0L	0.494985	0.0434998	0.0414768	2.565	202.972
H0.57,1L	0.494985	0.164916	0.1505	3.21565	203.985
H0.59,1L	0.494985	0.151096	0.139723	3.1078	204.628
H0.61,1L	0.494985	0.138339	0.129476	2.99964	205.644
H0.63,1L	0.494985	0.126577	0.119763	2.89118	206.976
H0.65,1L	0.494985	0.115744	0.110583	2.78246	208.572
H0.67,1L	0.494985	0.105776	0.101931	2.67349	210.384
H0.69,2L	0.494985	0.248086	0.229602	3.29863	211.328
H0.71,2L	0.494985	0.231297	0.216937	3.19614	211.296
H0.73,2L	0.494985	0.215449	0.204509	3.09313	211.803
H0.75,2L	0.494985	0.200512	0.192362	2.98962	212.785
H0.77,2L	0.494985	0.186454	0.180539	2.88565	214.179
H0.79,2L	0.494985	0.173241	0.169079	2.78125	215.923
H0.81,3L	0.494985	0.322942	0.304528	3.38247	215.780
H0.83,3L	0.494985	0.304832	0.291379	3.2848	215.126
H0.85,3L	0.494985	0.287461	0.27804	3.18645	215.235
H0.87,3L	0.494985	0.270829	0.264578	3.08745	216.044
H0.89,3L	0.494985	0.254928	0.251071	2.98784	217.480
H0.91,4L	0.494985	0.408316	0.390291	3.55865	216.893
H0.93,4L	0.494985	0.389354	0.378269	3.46623	214.543
H0.95,4L	0.494985	0.370915	0.365168	3.37297	213.583
H0.97,4L	0.494985	0.353017	0.350915	3.27891	214.092
H0.99,5L	0.494985	0.504581	0.494985	3.81103	207.680

Die minimalen Gesamtkosten sind 192.255 DM für r=880.39<<

<u>Fazit:</u>

Der optimale Stichprobenplan (r, c), die Grundwahrscheinlichkeiten und die minimalen Gesamtkosten sollen für feste Größen M, 1 aus der Vierfeldertafel für jede Stichprobengröße r berechnet werden und anhand von zwei Graphiken soll die Entwicklung von c und den Gesamtkosten gezeigt werden.

Nach diesen Berechnungen können die für das Unternehmen minimalen Kosten für die Qualitätsprüfung pro Los ermittelt werden. Die Wertetabelle zeigt, dass bei dem **Prüfplan (0,39; 0)** minimale Gesamtkosten erreicht werden und zwar in Höhe von **192,25 DM pro Los**.

Hier sollte man den Prüfplan mit den geringsten Kosten (0,39; 0) als den optimalen Prüfplan ansehen. Die Wahrscheinlichkeiten zu diesem optimalen Prüfplan betragen, wenn ein Los gut (p(G)) ist 49,5 %, wenn ein Los angenommen (p(A)) wird 10,8 %, wenn ein Los gut ist und angenommen ($p(G \cap A)$) wird 9,3 % und die durchschnittliche Fehleranzahl in einem ausgelieferten Los (D) beträgt 3,5 %.

5 BERECHNUNG OPTIMALER STICHPROBENPLÄNE MIT MATHEMATICA®: DAS SOFTWARE-TOOL OPTI-KONTI-PEKUYAR

5.1 MATHEMATICA®

Der Erfinder von Mathematica Stephen Wolfram gibt eine einfache, aber zutreffende Definition über Mathematica ab:

„Mathematica is a system for doing Mathematics by Computer“, also ein Programm, um Mathematik am Computer zu betreiben.

1988 erschien Mathematica in der Version 1.0 und wird seitdem in fast allen Wissenschaften, wie z.B. physikalischen, biologischen und gesellschaftlichen Bereichen, eingesetzt. Es wird kontinuierlich weiterentwickelt und liegt heute in der Version 4.0 vor. Mathematica hat mittlerweile eine Anwenderschar von 1 Million Menschen und findet seine Anwendung an den 50 wichtigsten Universitäten der Welt.

Damit können in der Praxis einfache und sehr komplexe mathematische Problemstellungen bearbeitet werden.
Es kann für folgende Dinge verwendet werden:

- Als Taschenrechner, um einfache numerische Berechnungen durchzuführen
- Als Hilfsmittel, um komplizierte Berechnungen (z.B. Integrale) symbolisch durchzuführen
- Als Grafikwerkzeug, um mathematische Zusammenhänge visuell darzustellen
- Als Programmiersprache, um beliebige komplexe mathematische Probleme zu lösen, bzw. um Mathematica durch zusätzliche Kommandos individuell zu erweitern.

5.2 PROGRAMMAUFBAU VON OPTI-KONTI-PEKUYAR®

Das Programm wurde mit Mathematica 3.0 erstellt.
Die in dieser Diplomarbeit verwendeten Mathematica-Programme haben im Allgemeinen immer den gleichen Aufbau.

Im oberen Eingabebereich werden allgemein benötigte Variablen definiert und mit Werten belegt, die zur späteren Berechnung benötigt werden.

Beispiele:
Durchschnittliche Fehleranzahl pro Los: l = 5,6
Reklamationsgrenze M = 12

Im weiteren Verlauf der Programme werden die Verteilungsvariablen definiert und initialisiert. Meist ist die verwendete Verteilung die Poisson-Verteilung.

p1 = PoissonDistribution[(r * l]
p2 = PoissonDistribution[l]
p3 = PoissonDistribution[(1 – r) * l]

Danach folgt die Wertezuteilung für γ und c.

$\gamma = (K_{SA} - K_{SZ}) / (K_{SA} - K_{SZ} + K_{GZ} - K_{GA})$
c = Max [{0, M - 1 - Quantile[p3, γ]]

Im mittleren Berechnungsteil werden die Wahrscheinlichkeiten mit den vorher definierten Werten berechnet. Die wichtigsten Mathematica-Befehle sind hierfür CDF (Cumulative Density Function) und PDF (Probability Density Function). CDF ist die kumulative Verteilungsfunktion.

pG = CDF [p2, M - 1]
pA = CDF [p1, c]

PDF ist die Wahrscheinlichkeitsdichte (Häufigkeitsfunktion).
pGA = Sum[Evaluate[PDF[p1, i] ∗ CDF [p3, M – 1 – i]],{i, 0, c}]

Der Ausgabebereich enthält die Berechnung der Kosten und falls benötigt, die Berechnung des Kostenminimums, des weiteren die Befehle zur Darstellung der Werte als Tabelle.

K = (pGA) ∗ K_{GA} + (pA - pGA) ∗ K_{SA} + (pG - pGA) ∗ K_{GZ} + (1 - pA - pG - pGA) ∗ K_{SZ}
T = Table[K, {r, rmin, rmax, s}]
K_{Min} = Min[T]

Der letzte Teil enthält Befehle zur Darstellung der Werte, sowie Befehle zur graphischen Darstellung in Form einer Kurve.

Plot[c, {r, rmin, rmax}, AxesOrigin → {r, M}, Frame → True,
PlotRange → [{0, M}, PlotLabel → „Graphik für optimales c von Abhängigkeit von r“]

5.3 BESCHREIBUNG DER PROGRAMM-MODULE

In diesem Kapitel wird die Funktion des Programmes detailliert beschrieben. Um die Suche nach dem jeweiligen Programmteil zu erleichtern, ist der zugehörige Programmcode mit angegeben.

5.3.1 Modul „Szenario V“

Mit dem Modul “Szenario V” wird das Szenario V für kontinuierliche Lose berechnet. Die Werte r, M ,c und I werden als gegeben angenommen. Darauf aufbauend werden die vier Grundwahrscheinlichkeiten pG, pA, pGA und danach die Wahrscheinlichkeiten der Vierfeldertafel, sowie alle übrigen für das Szenario V benötigten Wahrscheinlichkeiten berechnet. Als letztes wird der Durchschlupf berechnet. Im Eingabebereich wird das Layout des Programms festgelegt. Danach folgt der Berechnungsbereich. Das Programm wird durch den Ausgabebereich abgeschlossen, der die im Berechnungsbereich errechneten Werte ausgibt.[40]

Zuerst ist das Paket „Statistics`Master`“ zu laden. Dieses Paket benutzt man bei den statistischen Berechnungen. In jedem Programm des „Opti-Konti-Pekuyar“ Software Tools wird dieses Paket verwendet.

Quellcode:

```
Needs@"Statistics`Master`"D
```

[40] siehe Kapitel 4.1 Qualitätssicherungs-Kennzahlen für kontinuierliche Lose

Im Eingabebereich werden die benötigten Parameter eingegeben. Das sind die mittlere Fehleranzahl im Los (l), die Reklamationsgrenze M, die Stichprobengröße r und die Annahmezahl c.

Die Funktionen p1,p2 und p3 berechnen die Poisson-Verteilungen. Diese Funktionen sind allgemein beschrieben und können aus verschiedenen anderen Funktionen heraus aufgerufen werden (z.B. pG, pA usw.)

Quellcode:

```
H****************************************************************************L
H*                              Eingabebereich                                *L
H****************************************************************************L

Print@"Szenario V"D
Print@"HBeispiel mit kontinuierliche LoseL"D
Print@"Annahme       -> Los wird unveraendert ausgeliefert"D
Print@"Zurueckweisung->Los wird nicht ausgeliefert bzw. eliminiert"D
Print@""D
Print@"A :", AnnahmeD
Print@"Z :", Zurueckweisung D
Print@"S :", Schlechtes Los D
Print@"G :", Gutes Los D
Print@""D
 l = 18;       H*Mittlere Anzahl Fehler im Los*L
M = 30;        H*Reklamationsgrenze*L
r = 0.065;     H*Stichprobengroesse*L
c = 2;         H*Annahmezahl*L

H****************************************************************************L
H*                           Poisson-Verteilungen                             *L
H****************************************************************************L

p1 = PoissonDistribution@r * lD;
p2 = PoissonDistribution@ lD;
p3 = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;
```

In diesem Teil des Programmes werden alle Wahrscheinlichkeiten mit diesen Parametern ermittelt.

Die Funktion pA berechnet p(A), pZ berechnet p(Z), pG berechnet p(G), pS berechnet p(S), pGA berechnet p(G∩A), pSA berechnet p(S∩A), pGZ berechnet p(G∩Z), pSZ berechnet p(S∩Z), GA berechnet p(G|A), SA berechnet p(S|A), GZ berechnet p(G|Z), SZ berechnet p(S|Z), AG berechnet p(A|G), ZG berechnet p(Z|G), AS berechnet p(A|S), ZS berechnet p(Z|S) und pD berechnet D.

Quellcode:

```
H****************************************************************************L
H*                     Berechnung der Wahrscheinlichkeiten                    *L
H****************************************************************************L
pA = CDF@p1, cD •• N;
pZ = 1 - CDF@p1, cD •• N;

pG = CDF@p2, M - 1D •• N;
pS = 1 - pG •• N;

pGA = Sum@PDF@p1, iD   CDF@p3, M - 1 - iD, 8i, 0, c<D •• N;
pSA = pA - pGA •• N;

pGZ = pG - pGA •• N;
pSZ = pS - pSA •• N;

GA = pGA • pA •• N;
SA = pSA • pA •• N;

GZ = pGZ • pZ •• N;
SZ = pSZ • pZ •• N;

AG = pGA • pG •• N;
ZG = pGZ • pG •• N;

AS = pSA • pS •• N;
ZS = pSZ • pS •• N;

                         1
pD =  l  * H1 - rL +  ---- * Sum@Evaluate@i * PDF@p1, iDD, 8i, 1, c<D •• N;
                        pA
```

Der letzte Teil des Programmes ist der Ausgabebereich, d.h. in diesem Bereich werden von dem Programm die Ergebnisse in den Ausgabebereich geschrieben.

Quellcode:

```
H***************************************************************************L
H*                              Ausgabebereich                               *L
H***************************************************************************L
Print@"l=", l, "  ", "M=", M, "  ", "r=", r, "  ", "c=", cD
Print@""D
Print@"pHAL=", pAD
Print@"pHZL=", pZD
Print@""D

Print@"pHGL=", pGD
Print@"pHSL=", pSD
Print@""D

Print@"pHGÝAL=", pGAD
Print@"pHSÝAL=", pSAD
Print@""D

Print@"pHGÝZL=", pGZD
Print@"pHSÝZL=", pSZD
Print@""D

Print@"pHGÈAL=", GAD
Print@"pHSÈAL=", SAD
Print@""D

Print@"pHGÈZL=", GZD
Print@"pHSÈZL=", SZD
Print@""D

Print@"pHAÈGL=", AGD
Print@"pHZÈGL=", ZGD
Print@""D

Print@"pHAÈSL=", ASD
Print@"pHZÈSL=", ZSD
Print@""D

Print@"D=", pDD

H***************************************************************************L
H*                           Ende des Programmes                             *L
H***************************************************************************L
```

5.3.2 Modul „Das optimale c für feste r“

Mit dem Modul “Das optimale c für festes r” wird ein optimales c für ein gegebenes r berechnet. Des weiteren werden die Werte für die Kosten aus der Vierfeldertafel, M und l als gegeben angenommen.

Im Eingabebereich wird das Layout des Programms festgelegt. Im Berechnungsbereich wird das optimale c und g ermittelt.

Quellcode:

```
H***************************************************************************L
H*                          Eingabebereich                                 *L
H***************************************************************************L

l   = 17.25;
r   =  0.075;
M   = 21;
K_SA = 1400 + 100*r;
K_GZ  = 350  + 100 * r;
K_SZ  = 700  + 100 * r;
K_GA  = 100  + 100 * r;

H***************************************************************************L
H*                           Berechnungen                                  *L
H***************************************************************************L

p = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;
g = HK_SA  - K_SZL • HK_SA  - K_SZ + K_GZ - K_GAL;
c = M - 1 - Quantile@p, gD;
```

Im Ausgabebereich wird der Aufbau der Graphik für die Darstellung von c definiert. Die Entwicklung von c wird anhand einer Graphik erläutert. [41]

Quellcode:

```
H****************************************************************************L
H*                              Ausgabebereich                                *L
H****************************************************************************L

Print@"l=", l, "  ", "M=", M, "  ", "r=", rD
Print@"KGA= ", KGA, " DM     ",  "KGZ=", KGZ, " DM  "D
Print@"KSA =", KSA , " DM  ",   "   KSZ=", KSZ, " DM  "D
Print@ "g=", g  , "  ",  "c=", cD

ListPlot@Table@CDF@p, M - 1 - iD, 8i, 0, M- 1<D,
  AxesLabel -> 8 "i", "PH1-rL |H20-iL" <, PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, AbsoluteThickness@2D<<,
   TextStyle -> 8FontFamily -> "Times", FontSize -> 14, FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
    PlotLabel -> "Das optimale c  für feste  r", Background -> GrayLevel@.9D D
```

[41] siehe Kapitel 4.3 Zusammenhang zwischen stochastischer Signalerkennung und (r, c)-Optimierung

5.3.3 Modul „Optimales c für alle r“

Mit dem Modul “Optimales c für alle r” wird für jede Stichprobengröße r ein optimales c ermittelt. Des weiteren werden die Werte für die Kosten aus der Vierfeldertafel, M und l als gegeben angenommen.

Im Eingabebereich wird das Layout des Programms festgelegt. Im Berechnungsbereich wird das optimale c, g berechnet.

Quellcode:

```
H****************************************************************************L
H*                              Eingabebereich                              *L
H****************************************************************************L

l = 9.7;
M= 14;
KSA = 1000 + 100* r;
KGZ =  100 + 100* r;
KSZ =   80 + 100* r;
KGA =    50 + 100* r;
rmin= 0.01;
rmax= 0.99;
s= 0.01;

H****************************************************************************L
H*                               Berechnungen                                *L
H****************************************************************************L

p= PoissonDistribution@H1 - rL * lD;
g = HKSA  - KSZL • HKSA  - KSZ + KGZ - KGAL;
c= Max@80, M - 1 - Quantile@p, gD<D;
T= Table@c, 8r, rmin, rmax, s<D;
```

Im Ausgabebereich wird der Aufbau der Graphik für die Darstellung von c definiert. Die Entwicklung von c wird anhand einer Graphik erläutert und anschließend eine Wertetabelle „Optimale c für alle r“ dargestellt. [42]

Quellcode:

```
H**************************************************************************L
H*                              Ausgabebereich                              *L
H**************************************************************************L


FilledPlot@c, 8r, rmin, rmax<, AxesLabel -> 8"r", "c"<,
   TextStyle -> 8FontFamily -> "Times", FontSize -> 14,  FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
     PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, Thickness@0.005D<<,
      PlotLabel -> "Graphik für kostenoptimale Linie für alle r", Background -> GrayLevel@.9D D


Print@" l=", l,  "  M=", M D
Print@"Optimales c für alle r:" D
Table@Print@"c=", i, "  für  r=", s * Min@Position@T, iDD,
  "  bis  r=", s * Max@Position@T, iDDD, 8i, Min@TD, Max@TD<D


H************************************************************************L
H*                         Ende des Programmes                          *L
H************************************************************************L
```

[42] siehe Kapitel 4.3 Zusammenhang zwischen stochastischer Signalerkennung und (r, c)-Optimierung

5.3.4 Modul „Optimale Stichprobenpläne“

Mit dem Modul “Optimale Stichprobenpläne” wird eine Tabelle dargestellt. Des weiteren werden die Werte für die Kosten aus der Vierfeldertafel, M und l als gegeben angenommen. Das minimale und das maximale r werden mit einer Schrittweite von 0,02 angegeben.

Im Eingabebereich wird das Layout des Programms festgelegt. Im Berechnungsbereich werden durch das Programm das optimale c, g , die optimalen Stichprobenpläne, die Grundwahrscheinlichkeiten (p(G), p(A), p(GÈA). D) und die Kosten (K) berechnet. Die Funktion „K“ berechnet die Kosten für das Szenario V.

Quellcode:

```
H****************************************************************************L
H*                              Eingabebereich                               *L
H****************************************************************************L

l = 5.7; H* Mittlere Anzahl Fehler im Los *L
M = 6;   H* Reklamationsgrenze *L

K_GA = 100 * r;          H* Kosten, dass das ein Los gut ist und angenommen wird *L
K_SA = 1000 + 100 * r;  H* Kosten, dass das ein Los schlecht ist und angenommen wird *L
K_GZ =  100 + 100 * r;  H* Kosten, dass das ein Los gut ist und zurückgewiesen wird *L
K_SZ =  200 + 100 * r;
H* Kosten, dass das ein Los schlecht ist und zurückgewiesen wird *L


rmin = 0.01;
rmax = 0.99;
s = 0.02; H*Schrittweite*L
```

```
H*****************************************************************************L
H*                               Berechnungen                                 *L
H*****************************************************************************L

p1 = PoissonDistribution@r * lD;
p2 = PoissonDistribution@ lD;
p3 = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;

g = HK_SA  - K_SZ L • HK_SA - K_SZ + K_GZ - K_GA L;
c = Max@80, M - 1 - Quantile@p3, gD<D;


pG = CDF@p2, M - 1D •• N;
pA = CDF@p1, cD;
pGA = Sum@Evaluate@PDF@p1, iD * CDF@p3, M - 1 - iDD, 8i, 0, c<D;
```

$$pD = \ l \ * H1 - rL + \frac{1}{pA} * Sum@Evaluate@i * PDF@p1, iDD, 8i, 1, c<D;$$

```
K = HpGAL * K_GA + HpA - pGAL * K_SA  + HpG - pGAL * K_GZ + H1 - pA - pG + pGAL * K_SZ ;
T = Table@K, 8r, rmin, rmax, s<D;
K_Min = Min@TD;
```

Im Ausgabebereich wird durch das Programm die Wertetabelle dargestellt. In dieser Tabelle steht die komplette Liste aller Stichprobenpläne (r und c gibt den Plan an), aller Grundwahrscheinlichkeiten (p(G), p(A), p(GÈA). D) und aller Kosten (K). Hierbei wird eine Stichprobengröße gesucht, bei der die minimalen Gesamtkosten erreicht werden. Abschließend ermittelt das Programm die minimalen Gesamtkosten und den dazu gehörenden Stichprobenplan.

Quellcode:

```
H*****************************************************************************L
H*                              Ausgabebereich                                *L
H*****************************************************************************L

Print@" l=", l, " und ",  " M=", MD
Print@" Hr,cL          pHGL          pHAL          pHGÝAL        D              Kosten"D

Table@8StringForm@"H``,``L", NumberForm@r, 4D, cD,
   pG, pA, pGA, pD, PaddedForm@K, 86, 3<D<, 8r, rmin, rmax, s<D •• TableForm
Print@""D
Print@"Die minimalen Gesamtkosten sind", PaddedForm@K_Min, 86, 3<D, " DM  für r=",
 s * Position@T, K_MinD + rmin - sD
```

Anschließend wird mit Hilfe des „Plot-Befehls“ in dem Programm eine Graphik für „optimale c in Abhängigkeit von r“ erstellt.[43]

Quellcode:

```
Plot@c, 8r, rmin, rmax<,
 AxesLabel -> 8"r", "c"<, PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, AbsoluteThickness@2D<<,
   TextStyle -> 8FontFamily -> "Times", FontSize -> 14, FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
     PlotLabel -> "Graphik für optimales c in Abhängigkeit von r", Background -> GrayLevel@.9DD
```

Wiederum mit Hilfe des „Plot-Befehls“ wird in dem Programm eine Graphik für die „Gesamtkosten in Abhängigkeit von r“ erstellt. [44]

Quellcode:

```
Plot@K, 8r, rmin, rmax<, AxesOrigin -> 8rmin, KMin<,
 AxesLabel -> 8"r", "K"<, TextStyle -> 8FontSize -> 14,  FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
  PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, Thickness@0.005D<<,
   PlotLabel -> "Graphik für Gesamtkosten mit r", Background -> GrayLevel@.9DD
```

[43] siehe Kapitel 4.4 Zusammenhang zwischen stochastischer Signalerkennung und (r, c)-Optimierung
[44] siehe Kapitel 4.4 Zusammenhang zwischen stochastischer Signalerkennung und (r, c)-Optimierung

6 LITERATURVERZEICHNIS

[1] **Birolini, Alessandro**
Qualität und Zuverlässigkeit technischer Systeme
3. Aufl. Berlin / Heidelberg, 1991

[2] **Böhme, J. F.**
Stochastische Signale
Stuttgart, 1998

[3] **Börgens, M.**
Stichprobenprüfung in beherrschten und nicht beherrschten Prozessen:
Beispiele und Formeln für Attributprüfung mit Anwendungen auf DIN ISO 2859
Aachen, 2000

[4] **Börgens, M.**
Kostenoptimierung bei der Stichprobenprüfung - mit EXCEL - Programmen
in: Thomann, H. J. (Hrsg.) : Der Qualitätssicherungs-Berater 11220, Köln 1998

[5] **Börgens, M.**
Mathematische Methoden zur Qualitätssicherung; FH Gießen - Friedberg

[6] **Börgens, M.**
Optimierungsverfahren und Risiko-Kennwerte für Stichprobenprüfung und Kostenrechnung
in : Benes, G. / Feyerabend, F. - K. / Vossebein, U. (Hrsg.) :
Qualitätsmanagement als interdisziplinäres Problem, Wiesbaden 1997

[7] **Börgens, M.**
Prozesskennzahlen und Qualitätsregelkarten bei attributiven Merkmalen
mit EXCEL - Programmen
in : Thomann, H. J. (Hrsg.) : Der Qualitätssicherungs-Berater 11210, Köln 1998

[8] Claus, W. / Jessenberger, J.
Statistische Methoden zur Qualitätssicherung und –optimierung
New York 1999

[9] Deutsches Institut für Normung (Hrsg.)
Qualitätssicherung und angewandte Statistik,
Verfahren 2 : Probenahme und Annahmestichprobenprüfung
(enthält DIN ISO 2859)
DIN - Taschenbuch 225
Aufl., Berlin / Wien, 1997

[10] Deutsche Gesellschaft für Qualität
Statistische Methoden zur Entscheidungsfindung

[11] Dietrich E. / Schulze A.
Statistische Verfahren zur Maschinen- und Prozessqualifikation,
2. Aufl. München, 1996

[12] Ehrenstrasser, G.
Stochastische Signale und ihre Anwendung
Heidelberg, 1976

[12] Geiger, W.
Qualitätslehre
3. Aufl. .Wiesbaden, 1998

[13] Groocock, J. M.
Qualitätsverbesserung
Hamburg, 1988

[14] Jäger, Andreas H.
Mathematica
Berlin, 1997

[15] **Kofler, Michael**
Mathematica
Bonn, 1998

[16] **Massing; W. (Hrsg)**
Handbuch der Qualitätssicherung
München / Wien, 1980

[17] **Neubauer, W.**
Statistische Methoden
Frankfurt, 1991

[18] **Papageorgiou, M.**
Optimierung
2. Aufl. Oldenburg, 1996

[19] **Papula, L.**
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3
2. Aufl. Wiesbaden, 1999

[20] **Reinert, U. / Blaschke, H. / Brockstieger, U.**
Technische Statistik in der Qualitätssicherung
Berlin / Heidelberg, 1999

[21] **Rinne, H. / /Mittag, H. - J.**
Statistische Methoden der Qualitätssicherung
München / Wien,1989

[22] **Schuchmann / Sanns**
Statistik mit Mathematica
München, 1999

[23] Schuchmann / Sanns
Datenanalyse mit Mathematica
München, 1999

[24] Storm, R.
Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und Statistische Qualitätskontrolle
10. Auflage München, 1995

[25] Taube, K.
Statistik in der Qualitätssicherung
Wiesbaden, 1996

[26] Timischl, W.
Qualitätssicherung Statistische Methoden
2. Aufl. München / Wien, 1996

[27] Uhlmann, W.
Statistische Qualitätskontrolle
2. Aufl. Stuttgart, 1982

[28] Vogt, H.
Methoden der Statistischen Qualitätskontrolle
Stuttgart,1988

[29] Wolfram, Stephen
3. Aufl. Bonn, 1997

[30] Wortberg, J.
Qualitätssicherung in der Kunststoffverarbeitung
München / Wien, 1996

7 ABBILDUNGSVERZEICHNIS

8 ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

Diskrete Lose

N : **Losgröße**
Anzahl der Stücke im Los.

n : **Stichprobengröße**
Anzahl der Stücke pro Stichprobe.

c : **Annahmezahl**
bei c oder weniger fehlerhaften Stücken in der Stichprobe wird das Los „angenommen“, bei mehr als c fehlerhaften Stücken wird das Los „zurückgewiesen“.
Es ist 0 £ c < n sinnvoll.

(n, c) : **Stichprobenplan**

M : **Reklamationsgrenze**
Ein Los gilt als gut, wenn es weniger als M Ausschusstücke enthält, sonst als schlecht.

p : **Wahrscheinlichkeit, dass ein Einzelstück fehlerhaft ist**

k : **Anzahl fehlerhaft Stücke im Los**
Tatsächliche, meist unbekannte Ausschussanzahl

d : **Durchschlupf**
Durchschnittlicher Anteil fehlerhafter Stücke in ausgelieferten Losen

n* : **Durchschnittliche Anzahl zu prüfender Stücke pro Los**

i : **Anzahl fehlerhafter Stücke in der Stichprobe**

Kontinuierliche Lose:

r : Stichprobengröße

Die ist der Anteil der Stichprobe am Los $r \in (0,1]$.

c : Annahmezahl

Bei c oder weniger Fehlern in der Stichprobe wird das Los "angenommen", bei mehr als c Fehlern wird das Los "zurückgewiesen".
Es ist nur $0 \leq c < M$ sinnvoll.

(r, c) : Stichprobenplan

M : Reklamationsgrenze

Ein Los wird als gut bezeichnet, wenn es weniger als M Fehler enthält, ansonsten als schlecht.

l **: Durchschnittliche Fehlerzahl pro Los**

$\lambda \in R^+$.
λ existiert nur dann, wenn der Produktionsprozess "beherrscht" ist, d.h. wenn Fehler zufällig und unabhängig voneinander auftreten und immer den gleichen Erwartungswert $t^*\lambda$ für die Fehlerzahl von einem Losanteil t haben (0 £ t £ 1).

k : Fehleranzahl im Los

Dies ist die tatsächliche, meist unbekannte Fehleranzahl, $k \in IN$.

D : Durchschlupf

Durchschnittliche Anzahl Fehler in ausgelieferten Losen.

i : Fehleranzahl in der Stichprobe i ∈ IN0

Abkürzungsverzeichnis:

Programm	**Beschreibung**
λ	Parameter der Poisson-Verteilung
c	Annahmezahl
r	Stichprobengröße, Anteil der Stichprobe am Los, r ? (0,1]
pG	Ereignis "Los ist gut"
pS	Ereignis "Los schlecht"
pA	Ereignis "Los angenommen"
pZ	Ereignis "Los zurückgewiesen"
pGA	Ereignis "Los und angenommen"
pSA	Ereignis "Los und angenommen"
pGZ	Ereignis "Los gut und zurückgewiesen"
pSZ	Ereignis "Los schlecht und zurückgewiesen"
GA	Ereignis "Los gut, falls angenommen"
GZ	Ereignis "Los gut, falls zurückgewiesen"
SA	Ereignis "Los schlecht, falls angenommen"
SZ	Ereignis "Los schlecht, falls zurückgewiesen"
AS	Ereignis "Los angenommen, falls schlecht"
AG	Ereignis "Los angenommen, falls gut"
ZS	Ereignis "Los zurückgewiesen, falls schlecht"
ZG	Ereignis "Los zurückgewiesen, falls gut"
D	Mittlerer Durchschlupf

Formeln für verschiedene Wahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeit	Formel	Beschreibung
p(G)	$P_{\lambda}(M-1)$	Los gut
p(S)	1 - p(G)	Los schlecht
p(A)	$P_{r\lambda}(c)$	Los angenommen
p(Z)	1 - p(A)	Los zurückgewiesen
p(GÈA)	$\sum_{i=0}^{c} p_{r\lambda}(i)\ P_{(1-r)\lambda}\ (M-1-i)$	Los gut und angenommen
p(GÈZ)	p(G) - p(GÈA)	Los gut und zurückgewiesen
p(SÈA)	p(A) - p(GÈA)	Los schlecht und angenommen
p(SÈZ)	p (S) - p (SÈA)	Los schlecht und zurückgewiesen
p(G|A)	p(GÈA) / p(A)	Los gut, falls angenommen
p(G|Z)	p(GÈZ) / p(Z)	Los gut, falls zurückgewiesen
p(S|A)	p(SÈA) / p(A)	Los schlecht, falls angenommen
p(S|Z)	p(SÈZ) / p(Z)	Los schlecht, falls zurückgewiesen
p(A|S)	p(SÈA) / p(S)	Los angenommen, falls schlecht
p(A|G)	p(GÈA) / p(G)	Los angenommen, falls gut
p(Z|S)	p(SÈZ) / p(S)	Los zurückgewiesen, falls schlecht
p(Z|G)	p(GÈZ) / p(G)	Los zurückgewiesen, falls gut
K_{GA}	K_{GA}	Kosten bei der Annahme eines guten Loses
K_{SA}	K_{SA}	Kosten bei der Annahme eines schlechten Loses
K_{GZ}	K_{GZ}	Kosten bei der Zurückweisung eines guten Loses
K_{SZ}	K_{SZ}	Kosten bei der Zurückweisung eines schlechten Loses

9 ANHANG

```
H**************************************************************************L
H**************************************************************************L
H*                              Programm                                  *L
H*                          << Szenario V >>                              *L
H**************************************************************************L
H**************************************************************************L


Needs@"Statistics`Master`"D



H**************************************************************************L
H*                           Eingabebereich                               *L
H**************************************************************************L

Print@"Szenario V"D
Print@"HBeispiel mit kontinuierliche LoseL"D
Print@"Annahme       -> Los wird unveraendert ausgeliefert"D
Print@"Zurueckweisung->Los wird nicht ausgeliefert bzw. eliminiert"D
Print@""D
Print@"A :", AnnahmeD
Print@"Z :", Zurueckweisung D
Print@"S :", Schlechtes Los D
Print@"G :", Gutes Los D
Print@""D
l = 18;        H*Mittlere Anzahl Fehler im Los*L
M = 30;        H*Reklamationsgrenze*L
r = 0.065;     H*Stichprobengroesse*L
c = 2;         H*Annahmezahl*L

H**************************************************************************L
H*                        Poisson-Verteilungen                            *L
H**************************************************************************L

p1 = PoissonDistribution@r * lD;
p2 = PoissonDistribution@ lD;
p3 = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;
```

```
H****************************************************************************L
H*                    Berechnung der Wahrscheinlichkeiten                     *L
H****************************************************************************L
pA = CDF@p1, cD •• N;
pZ = 1 - CDF@p1, cD •• N;

pG = CDF@p2, M - 1D •• N;
pS = 1 - pG •• N;

pGA = Sum@PDF@p1, iD   CDF@p3, M - 1 - iD, 8i, 0, c<D •• N;
pSA = pA - pGA •• N;

pGZ = pG - pGA •• N;
pSZ = pS - pSA •• N;

GA = pGA • pA •• N;
SA = pSA • pA •• N;

GZ = pGZ • pZ •• N;
SZ = pSZ • pZ •• N;

AG = pGA • pG •• N;
ZG = pGZ • pG •• N;

AS = pSA • pS •• N;
ZS = pSZ • pS •• N;

pD =  l  * H1 - rL + 1/pA * Sum@Evaluate@i * PDF@p1, iDD, 8i, 1, c<D •• N;
```

```
H*****************************************************************************L
H*                              Ausgabebereich                                *L
H*****************************************************************************L
Print@" l=", l , "  ", "M=", M, "  ", "r=", r, "  ", "c=", c D
Print@""D
Print@"pHAL=", pAD
Print@"pHZL=", pZD
Print@""D

Print@"pHGL=", pGD
Print@"pHSL=", pSD
Print@""D

Print@"pHGÝAL=", pGAD
Print@"pHSÝAL=", pSAD
Print@""D

Print@"pHGÝZL=", pGZD
Print@"pHSÝZL=", pSZD
Print@""D

Print@"pHGÈAL=", GAD
Print@"pHSÈAL=", SAD
Print@""D

Print@"pHGÈZL=", GZD
Print@"pHSÈZL=", SZD
Print@""D

Print@"pHAÈGL=", AGD
Print@"pHZÈGL=", ZGD
Print@""D

Print@"pHAÈSL=", ASD
Print@"pHZÈSL=", ZSD
Print@""D

Print@"D=", pDD

H*****************************************************************************L
H*                            Ende des Programmes                             *L
H*****************************************************************************L
```

```
H*************************************************************************L
H*************************************************************************L
H*                              Programm                                  *L
H*                  << Das optimale c für feste r >>                      *L
H*************************************************************************L
H*************************************************************************L

Needs@"Statistics`Master`"D
Needs@"Graphics`FilledPlot`"D

H**********************************************************************L
H*                          Eingabebereich                             *L
H**********************************************************************L

l   = 17.25;
r   =  0.075;
M   = 21;

K_GA  =  100 + 100 * r;
K_SA  = 1400 +  100 * r;
K_GZ  =  350 + 100 * r;
K_SZ  =   700 + 100 * r;

H**********************************************************************L
H*                           Berechnungen                              *L
H**********************************************************************L

p = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;
g = HK_SA  - K_SZL • HK_SA  - K_SZ + K_GZ - K_GAL;
c = M - 1 - Quantile@p, gD;
```

```
H*************************************************************************L
H*                           Ausgabebereich                              *L
H*************************************************************************L

Print@"l=", l, "  ", "M=", M, "  ", "r=", rD
Print@"KGA= ", KGA, " DM     ", "KGZ=", KGZ, " DM  "D
Print@"KSA =", KSA , " DM  ",    "   KSZ=", KSZ, " DM  "D
Print@ "g=", g , "  ", "c=", cD



ListPlot@Table@CDF@p, M - 1 - iD, 8i, 0, M - 1<D,
 AxesLabel -> 8 "i", "PH1-rL lH20-iL" <, PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, AbsoluteThickness@2D<<,
   TextStyle -> 8FontFamily -> "Times", FontSize -> 14, FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
     PlotLabel -> "Das optimale c  für feste  r", Background -> GrayLevel@.9D D


H*************************************************************************L
H*                         Ende des Programmes                           *L
H*************************************************************************L
```

```
H***********************************************************************L
H***********************************************************************L
H*                               Programm                              *L
H*                     <<  Optimales c für alle r  >>                  *L
H***********************************************************************L
H***********************************************************************L

Needs@"Statistics`Master`"D
Needs@"Graphics`FilledPlot`"D

H***********************************************************************L
H*                            Eingabebereich                           *L
H***********************************************************************L

l = 9.7;
M = 14;

K_GA =   50 + 100 * r;
K_SA = 1000 + 100 * r;
K_GZ =  100 + 100 * r;
K_SZ =  200 + 100 * r;

rmin = 0.01;
rmax = 0.99;

s = 0.01;

H***********************************************************************L
H*                             Berechnungen                            *L
H***********************************************************************L

p = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;
g = HK_SA - K_SZL • HK_SA - K_SZ + K_GZ - K_GAL;
c = Max@80, M - 1 - Quantile@p, gD<D;
T = Table@c, 8r, rmin, rmax, s<D;
```

```
H****************************************************************************L
H*                              Ausgabebereich                               *L
H****************************************************************************L

  FilledPlot@c, 8r, rmin, rmax<, AxesLabel -> 8"r", "c"<,
    TextStyle -> 8FontFamily -> "Times", FontSize -> 14, FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
      PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, Thickness@0.005D<<,
       PlotLabel -> "Graphik für kostenoptimale Linie für alle r", Background -> GrayLevel@.8D D

  Print@"l=", l, "  M=", M D
  Print@"Optimales c für alle r:" D
  Table@Print@"c=", i, "  für  r=", s * Min@Position@T, iDD,
    "  bis  r=", s * Max@Position@T, iDDD, 8i, Min@TD, Max@TD<D

  H**************************************************************************L
  H*                        Ende des Programmes                              *L
  H**************************************************************************L
```

```
H*************************************************************************L
H*************************************************************************L
H*                              Programm                                 *L
H*                          Optimaler Plan 1                             *L
H* << Optimale Stichprobenpläne, Grundwahrscheinlichkeiten und Kosten >> *L
H*************************************************************************L
H*************************************************************************L

Needs@"Statistics`Master`"D

H*******************************************************************L
H*                          Eingabebereich                          *L
H*******************************************************************L

l = 7.5;  H* Mittlere Anzahl Fehler im Los *L
M = 12;   H* Reklamationsgrenze *L

K_GA = 100 * r;          H* Kosten, dass das ein Los gut ist und angenommen wird *L
K_SA = 1000 + 100 * r;   H* Kosten, dass das ein Los schlecht ist und angenommen wird *L
K_GZ =  100 + 100 * r;   H* Kosten, dass das ein Los gut ist und zurückgewiesen wird *L
K_SZ =  200 + 100 * r;   H* Kosten, dass das ein Los schlecht ist und zurückgewiesen wird *L

rmin = 0.01;
rmax = 0.99;

s = 0.02; H*Schrittweite*L

H*************************************************************************L
H*                            Berechnungen                               *L
H*************************************************************************L

p1 = PoissonDistribution@r * lD;
p2 = PoissonDistribution@ lD;
p3 = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;

g = HK_SA - K_SZL • HK_SA - K_SZ + K_GZ - K_GAL;
c = Max@80, M - 1 - Quantile@p3, gD<D;


pG = CDF@p2, M - 1D •• N;
pA = CDF@p1, cD;
pGA = Sum@Evaluate@PDF@p1, iD * CDF@p3, M - 1 - iDD, 8i, 0, c<D;
                      1
pD =  l  * H1 - rL + ---- * Sum@Evaluate@i * PDF@p1, iDD, 8i, 1, c<D;
                      pA

K = HpGAL * K_GA + HpA - pGAL * K_SA  + HpG - pGAL * K_GZ + H1 - pA - pG + pGAL * K_SZ;
T = Table@K, 8r, rmin, rmax, s<D;
K_Min = Min@TD;
```

```
H***************************************************************************L
H*                              Ausgabebereich                             *L
H***************************************************************************L


Print@"l=", l, " und ",  " M=", MD
Print@" Hr,cL          pHGL          pHAL          pHGÝAL         D              Kosten"D
 Table@8StringForm@"H``,``L", NumberForm@r, 4D, cD,
  pG, pA, pGA, pD, PaddedForm@K, 86, 3<D<, 8r, rmin, rmax, s<D •• TableForm



Print@""D
Print@"Die minimalen Gesamtkosten sind",
  PaddedForm@KMin, 86, 3<D, " DM  für r=", s * Position@T, KMinD + rmin - sD



Plot@c, 8r, rmin, rmax<, AxesLabel -> 8"r",  "c"<,
 PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, AbsoluteThickness@2D<<,
   TextStyle -> 8FontFamily -> "Times", FontSize -> 14, FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
     PlotLabel -> "Graphik für optimales c in Abhängigkeit von r", Background -> GrayLevel@.9D D



Plot@K, 8r, rmin, rmax<, AxesOrigin -> 8rmin, KMin<, AxesLabel -> 8"r",  "K"<,
 TextStyle -> 8FontSize -> 14,  FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
   PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, Thickness@0.005D<<,
    PlotLabel -> "Graphik für Gesamtkosten in Abhängigkeit von r", Background -> GrayLevel@.9DD

H***************************************************************************L
H*                            Ende des Programmes                          *L
H***************************************************************************L
```

```
H*************************************************************************L
H*************************************************************************L
H*                             Programm                                  *L
H*                        Optimaler Plan 2                               *L
H*  << Optimale Stichprobenpläne, Grundwahrscheinlichkeiten und Kosten >>    *L
H*************************************************************************L
H*************************************************************************L

Needs@"Statistics`Master`"D


H*********************************************************************L
H*                        Eingabebereich                             *L
H*********************************************************************L

l = 7.1; H* Mittlere Anzahl Fehler im Los *L
M = 10;    H* Reklamationsgrenze *L

K_GA =  100 * r;        H* Kosten, dass das ein Los gut ist und angenommen wird *L
K_SA = 2000 + 100 * r;  H* Kosten, dass das ein Los schlecht ist und angenommen wird *L
K_GZ =  250 + 100 * r;  H* Kosten, dass das ein Los gut ist und zurückgewiesen wird *L
K_SZ =   50 + 100 * r;  H* Kosten, dass das ein Los schlecht ist und zurückgewiesen wird *L

rmin = 0.01;
rmax = 0.99;

s = 0.02; H*Schrittweite*L

H*********************************************************************L
H*                         Berechnungen                              *L
H*********************************************************************L

p1 = PoissonDistribution@r * lD;
p2 = PoissonDistribution@ lD;
p3 = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;

g = HK_SA  - K_SZL • HK_SA - K_SZ + K_GZ - K_GAL;
c = Max@80, M - 1 - Quantile@p3, gD<D;


pG = CDF@p2, M - 1D •• N;
pA = CDF@p1, cD;
pGA = Sum@Evaluate@PDF@p1, iD * CDF@p3, M - 1 - iDD, 8i, 0, c<D;
pD =  l  * H1 - rL + 1/pA * Sum@Evaluate@i * PDF@p1, iDD, 8i, 1, c<D;

K = HpGAL * K_GA + HpA - pGAL * K_SA  + HpG - pGAL * K_GZ + H1 - pA - pG + pGAL * K_SZ;
T = Table@K, 8r, rmin, rmax, s<D;
K_Min = Min@TD;
```

```
H***************************************************************************L
H*                              Ausgabebereich                             *L
H***************************************************************************L

Print@"l=", l, " und ", " M=", MD
Print@" Hr,cL          pHGL          pHAL          pHGÝAL          D          Kosten"D
 Table@8StringForm@"H``,``L", NumberForm@r, 4D, cD,
   pG, pA, pGA, pD, PaddedForm@K, 86, 3<D<, 8r, rmin, rmax, s<D •• TableForm


Print@""D
Print@"Die minimalen Gesamtkosten sind",
   PaddedForm@KMin, 86, 3<D, " DM  für r=", s * Position@T, KMinD + rmin - sD


Plot@c, 8r, rmin, rmax<, AxesLabel -> 8"r", "c"<,
 PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, AbsoluteThickness@2D<<,
   TextStyle -> 8FontFamily -> "Times", FontSize -> 14, FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
     PlotLabel -> "Graphik für optimales c in Abhängigkeit von r", Background -> GrayLevel@.9D D


Plot@K, 8r, rmin, rmax<, AxesOrigin -> 8rmin, KMin<, AxesLabel -> 8"r", "K"<,
 TextStyle -> 8FontSize -> 14,  FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
   PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, Thickness@0.005D<<,
    PlotLabel -> "Graphik für Gesamtkosten in Abhängigkeit von r", Background -> GrayLevel@.9DD

H***************************************************************************L
H*                          Ende des Programmes                            *L
H***************************************************************************L
```

```
H****************************************************************************L
H****************************************************************************L
H*                              Programm                                     *L
H*                          Optimaler Plan 3                                  *L
H*  << Optimale Stichprobenpläne, Grundwahrscheinlichkeiten und Kosten >>    *L
H****************************************************************************L
H****************************************************************************L

Needs@"Statistics`Master`"D


H******************************************************************************L
H*                              Eingabebereich                                 *L
H******************************************************************************L

l = 5.7; H* Mittlere Anzahl Fehler im Los *L
M = 6;   H* Reklamationsgrenze *L

K_GA = 100 * r;        H* Kosten, dass das ein Los gut ist und angenommen wird *L
K_SA = 1000 + 100 * r; H* Kosten, dass das ein Los schlecht ist und angenommen wird *L
K_GZ =  100 + 100 * r; H* Kosten, dass das ein Los gut ist und zurückgewiesen wird *L
K_SZ =  200 + 100 * r;
H* Kosten, dass das ein Los schlecht ist und zurückgewiesen wird *L


rmin = 0.01;
rmax = 0.99;
s = 0.02; H*Schrittweite*L

H******************************************************************************L
H*                              Berechnungen                                   *L
H******************************************************************************L

p1 = PoissonDistribution@r * lD;
p2 = PoissonDistribution@ lD;
p3 = PoissonDistribution@H1 - rL * lD;

g = HK_SA - K_SZL • HK_SA - K_SZ + K_GZ - K_GAL;
c = Max@80, M - 1 - Quantile@p3, gD<D;


pG = CDF@p2, M - 1D •• N;
pA = CDF@p1, cD;
pGA = Sum@Evaluate@PDF@p1, iD * CDF@p3, M - 1 - iDD, 8i, 0, c<D;
pD =  l  * H1 - rL + 1/pA * Sum@Evaluate@i * PDF@p1, iDD, 8i, 1, c<D;

K = HpGAL * K_GA + HpA - pGAL * K_SA + HpG - pGAL * K_GZ + H1 - pA - pG + pGAL * K_SZ;
T = Table@K, 8r, rmin, rmax, s<D;
K_Min = Min@TD;
```

```
H****************************************************************************L
H*                           Ausgabebereich                                *L
H****************************************************************************L


Print@"l=", l, " und ",  " M=", MD
Print@" Hr,cL         pHGL          pHAL          pHGÝAL          D             Kosten"D
 Table@8StringForm@"H``,``L", NumberForm@r, 4D, cD,
   pG, pA, pGA, pD, PaddedForm@K, 86, 3<D<, 8r, rmin, rmax, s<D •• TableForm



Print@""D
Print@"Die minimalen Gesamtkosten sind",
   PaddedForm@K_Min, 86, 3<D, "  DM   für r=", s * Position@T, K_MinD + rmin - sD



Plot@c, 8r, rmin, rmax<, AxesLabel -> 8"r", "c"<,
 PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, AbsoluteThickness@2D<<,
   TextStyle -> 8FontFamily -> "Times", FontSize -> 14, FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
     PlotLabel -> "Graphik für optimales c in Abhängigkeit von r", Background -> GrayLevel@.9D D



Plot@K, 8r, rmin, rmax<, AxesOrigin -> 8rmin, K_Min<, AxesLabel -> 8"r", "K"<,
 TextStyle -> 8FontSize -> 14,  FontColor -> RGBColor@1, 0, 0D<,
   PlotStyle -> 88RGBColor@1, 0, 0D, Thickness@0.005D<<,
    PlotLabel -> "Graphik für Gesamtkosten in Abhängigkeit von r", Background -> GrayLevel@.9DD

H****************************************************************************L
H*                         Ende des Programmes                             *L
H****************************************************************************L
```