



Untersuchung der Streufaktoren von DIN 45645, DIN EN ISO 9612 und TRLV-Lärm

Masterarbeit

im Studiengang “Umwelt-, Hygiene- und Sicherheitsingenieurwesen“

am Fachbereich

**Krankenhaus- und Medizintechnik, Umwelt- und Biotechnologie
der Technischen Hochschule Mittelhessen**

Vorgelegt von: Frank Deisenroth
Seligenstädter Weg 4
63796 Kahl

Matrikelnummer: 868158

Abgabedatum: 16.02.2012

Referent: Prof. Dr. Ing. Thomas Steffens

Korreferent: Dipl. –Ing. Gisa von Marcard

Danksagung:

Bei Herrn Professor Dr. Thomas Steffens und bei Frau Dipl.-Ing. Gisa von Marcard von der Technischen Hochschule Mittelhessen möchte ich mich für die freundliche und engagierte Betreuung meiner Masterarbeit bedanken.

Bedanken möchte ich mich auch bei meiner Frau Marianne Deisenroth und meinem Sohn Ruben Deisenroth, die mich während des Studiums immer unterstützt und viel Geduld und Verständnis aufgebracht haben.

Weiterhin gilt mein Dank Frau Petra Urbaniak und Herrn Andreas Urbaniak aus meinem privaten Bekanntenkreis für die Unterstützung als hilfreiche Diskussionspartner.

Erklärungen:

1. Prüfungsrechtliche Erklärung zur Anfertigung der Arbeit:

Hiermit erkläre ich, Frank Deisenroth, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel:

**Untersuchung der Streufaktoren
von DIN 45645, DIN EN ISO 9612 und TRLV-Lärm**

selbständig verfasst und keine anderen als die zulässigen und angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und dieses auch vollständig angegeben habe. Das Dokument zum Thema „Plagiate in Lehre, Studium und Forschung“ habe ich erhalten, zur Kenntnis genommen und mich verpflichtet, identische oder annähernd identisch wörtlich übernommene Passagen aus anderen Quellen entsprechend unter Angabe der Quelle ausnahmslos kenntlich zu machen.

Kahl, 16.02.2012



Ort, Datum, Unterschrift Kandidat

Erklärungen:

2. Erklärung zur Einsichtnahme und Ausleihe in die Arbeit

Ich erkläre mich damit einverstanden / ~~nicht einverstanden~~, dass die Arbeit zu wissenschaftlichen Zwecken eingesehen ~~bzw. ausgeliehen~~ werden darf. Die Arbeit kann in Anwesenheit eines Vertreters des Lehrstuhls eingesehen werden. Es dürfen keine Kopien oder Abschriften, Notizen etc. angefertigt werden.

Kahl, 16.02.2012



Ort, Datum, Unterschrift Kandidat

Erklärungen:

3. Erklärung zum Urheberrecht

Ich erkläre mich damit einverstanden / ~~nicht einverstanden~~, dass einzelne Inhalte oder Ergebnisse dieser Arbeit zu wissenschaftlichen Zwecken von der Technischen Hochschule Mittelhessen verwendet werden können. Es gelten die gleichen Beschränkungen wie unter Punkt 2. Hinsichtlich einer anderen Verwendung der Inhalte und Ergebnisse (z. B. freizügige Verteilung, wirtschaftliche Verwertung u. a.) ist mir bekannt, dass hierzu vorher das ausdrückliche Einverständnis des Referenten und eventuell beteiligter externer Institutionen von mir eingeholt werden muss.

Kahl, 16.02.2012



Ort, Datum, Unterschrift Kandidat

Inhaltsverzeichnis

Erklärungen:	3
1. Prüfungsrechtliche Erklärung zur Anfertigung der Arbeit:	3
2. Erklärung zur Einsichtnahme und Ausleihe in die Arbeit.....	4
3. Erklärung zum Urheberrecht.....	5
Inhaltsverzeichnis	6
Abbildungsverzeichnis	8
Tabellenverzeichnis	9
Formelverzeichnis	9
Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	11
1. Einleitung	13
1.1 Aufgabenstellung (Deutsche Fassung)	13
1.2 Scope of work (Englische Fassung)	16
1.3 Beispiel für die Bewertung nach DIN 45645, ISO 9612 und TRLV-Lärm	19
2. Standardstreuungsfaktor σ_d	22
2.1 Normalverteilung, Lognormalverteilung und σ_d	28
2.2 Schätzwerte für den Standardstreuungsfaktor σ_d	31
2.2.1 Standardstreuungsfaktors $\hat{\sigma}_{dy}$	33
2.2.2 Standardstreuungsfaktor $\hat{\sigma}_{dy}$	36
2.2.3 Standardstreuungsfaktor $\hat{\sigma}_{dx}$	38
2.2.4 Standardstreuungsfaktor $\hat{\sigma}_{dx}$	40
2.2.5 Standardstreuungsfaktor $s_{dx} \sqrt{a/b}$	42
2.2.6 Standardstreuungsfaktor s_d	44
3. Vergleich der Streufaktoren von DIN 45645 und ISO 9612	47
4. Vorgehensweise und Methoden	49
4.1 Methoden zum Testen der Hypothese 1: „Rechenfehler dB-Werte“	50
4.2 Methoden zur testen der Hypothese 2: „Fehlerhafter Land-Test“	51
4.3 Methoden zur testen der Hypothese 3: „Normalverteilungstests für dB“	52
5. Messungen in Dezibel	53
5.1 Allgemeine Berechnung von dB-Werten	53
5.2 Berechnung von Schalldruckpegeln in Dezibel	54
5.3 Berechnung des geometrischen Mittelwertes von dB-Werten	55
5.4 Berechnung des arithmetischen Mittelwertes von dB-Werten	55
5.5 Faustformeln für das Rechnen mit dB	56
6. Land-Test.....	59
7. Monte Carlo Simulationen und Land-Test.....	62
8. Darstellung von Stichprobentests über Standardstreuungsfaktoren.....	66
8.1 Darstellung Gauß-Test über $\hat{\sigma}_x$ und Gauß-Test über $\hat{\sigma}_{dx}$	67
8.2 Darstellung t-Test über $\hat{\sigma}_x$ und t-Test über $\hat{\sigma}_{dx}$	69

8.3	Darstellung Log t-Test über s_y und Log t-Test über s_{dy}	71
8.4	Darstellung d1-Tests über \hat{s}_{dx} und d2-Tests über \hat{s}_{dx}	73
8.5	Darstellung des dt-Tests über den Standardstrefaktor \hat{s}_{dx}	78
8.6	Darstellung des Land-Tests über den Standardstrefaktor \hat{s}_{dy}	80
9.	Vergleiche Land-Test mit d-Tests.....	81
9.1	Vergleich XUCL95% Land – Test mit XUCL95% d1 – Test	81
9.2	Vergleich XUCL95% Land – Test mit XUCL98,5% d1 – Test.....	82
9.3	Vergleich XUCL95% Land – Test mit XUCL95% dt – Test	83
9.4	Vergleich XUCL95% Land – Test mit XUCL96,3% dt – Test	84
10.	Strefaktordiagramme	85
10.1	Summenhäufigkeit Normalverteilung $\sigma_x = 0,01$; $\mu_x = 1$	86
10.2	Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,01$	87
10.3	Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,3$	88
10.4	Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 4$	89
10.5	Monte Carlo Simulation s_d und x_{geo} bei $\sigma_d = 4$	90
10.6	Monte Carlo Simulation $x_{geo} * s_d$ und x_{geo}/s_d bei $\sigma_d = 4$	91
10.7	Monte Carlo Simulation $x_{geo} * s_d$ und x_{geo}/s_d bei $\sigma_d = 1,01$	92
10.8	Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n=3$ bei $\sigma_d = 1,01$	93
10.9	Monte Carlo Simulation x_{geo1n} mit $n = 2$ und x_{geo1n} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 1,01$	94
10.10	Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 4$	95
10.11	Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 4$	96
10.12	Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 50$ und s_d mit $n = 50$ bei $\sigma_d = 1,01$	97
10.13	Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 50$ und s_d mit $n = 50$ bei $\sigma_d = 4$	98
10.14	SFt – test und SFmod χ – Test im Vergleich bei $\sigma_d = 1,01$	99
10.15	SFt – test und SFmod χ – Test im Vergleich mit MCS x_{geo} und s_d bei $\sigma_d = 1,01$	100
10.16	SFLog – t – test und SFmod χ – Test im Vergleich mit MCS x_{geo} und s_d bei $\sigma_d = 4$	101
10.17	SF-Log-tUCL84% und SF-d1UCL84% und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$	101
10.18	SF-Log-tUCL95% und SF-d1UCL95% und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$	103
10.19	SF-Log-tUCL95% und SF-d1UCL95% und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 3$	104
11.	Zusammenfassung	104
12.	Literaturverzeichnis	108
Anlage 1:	Erstellung von Monte Carlo Simulationen mit Excel	111
Anlage 2:	Excel-Arbeitsblätter für Land-H-Parametern mit Interpolation	119
Anlage 3:	Strefaktoren nach Tabelle C.4 ISO 9612 und Transformationen.....	121
Anlage 4:	Tabelle für Perzentile Z, t, χ , d1 und dt für $n = 50$	122

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Vergleich der Dichtefunktion von Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 2$	23
Abbildung 2: Vergleich der Dichtefunktion von Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,01$	24
Abbildung 3: Vergleich der Dichtefunktionen von $\sigma_d = 1,2$ bis $\sigma_d = 8$ lineare X-Achse	26
Abbildung 4: Vergleich der Dichtefunktionen von $\sigma_d = 1,2$ bis $\sigma_d = 8$ logarithmische X-Achse.....	26
Abbildung 5: Vergleich der Dichtefunktion von Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,33$	27
Abbildung 6: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung.....	28
Abbildung 7: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung	29
Abbildung 8: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung über σ_d	30
Abbildung 9: Schätzwerte für den Standardstreudefaktor σ_d	32
Abbildung 10: Vergleich von Standardstreudefaktoren nach unterschiedlichen Schätzverfahren	33
Abbildung 11: Vergleich der Standardstreudefaktoren $\hat{s}_d y$ und s_d	34
Abbildung 12: Vergleich der Standardstreudefaktoren $\hat{s}_d y$ und s_d	35
Abbildung 13: Vergleich der Standardstreudefaktoren $\hat{s}_d y$ und s_d	37
Abbildung 14: Vergleich der Standardstreudefaktoren $\hat{s}_d x$ mit s_d	39
Abbildung 15: Verhältnis \hat{s}_x1/s_x2 entspricht x_{geo1}/x_{geo2}	40
Abbildung 16: Vergleich von Standardstreudefaktor $\hat{s}_d x$ mit s_d	41
Abbildung 17: Vergleich der Standardstreudefaktoren $s_{dx \sqrt{a/b}}$ und s_d	43
Abbildung 18: Beispiel für die Berechnung unterschiedlicher Erwartungswerte.....	44
Abbildung 19: SFUCL95% nach DIN 45645 und ISO 9612 bei $\hat{s}_d y = 6 \text{ dB}(-) = 4$	48
Abbildung 20: Vergleich ISO 9612 mit 24 Monte Carlo Simulationen mit $\hat{s}_d y = 4 = 6 \text{ dB}(-)$	63
Abbildung 21: Ergebnis von 24 Monte Carlo Simulationen mit $\hat{s}_d = 400 = 26 \text{ dB}(-)$	64
Abbildung 22: Streufaktorvergleich Gauß-Test über \hat{s}_x und Gauß-Test über $\hat{s}_d x$	68
Abbildung 23: Streufaktorvergleich t-Test über \hat{s}_x und t-Test über $\hat{s}_d x$	70
Abbildung 24: Streufaktorvergleich Log t-Test über \hat{s}_y und Log t-Test über $\hat{s}_d y$	72
Abbildung 25: Streufaktorvergleich t-Test und d1-Test.....	74
Abbildung 26: Streufaktorvergleich t-Test und d2-Test.....	74
Abbildung 27: Streufaktorvergleich t-Test und dt-Test über den Standardstreudefaktor \hat{s}_{dx}	79
Abbildung 28: Streufaktorvergleich Land-Test über \hat{s}_y und Land-Test über $\hat{s}_d y$	80
Abbildung 29: Vergleich XUCL95% Land – Test mit XUCL95% d1 – Test	81
Abbildung 30: Vergleich XUCL95% Land – Test mit XUCL98,5% d1 – Test.....	82
Abbildung 31: Vergleich XUCL95% Land – Test mit XUCL95% dt – Test.....	83
Abbildung 32: Vergleich XUCL95% Land – Test mit XUCL96,3% dt – Test	84
Abbildung 33: Summenhäufigkeit Normalverteilung $\sigma_x = 0,01$, $\mu_x = 1$	86
Abbildung 34: Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung $\sigma_d = 1,01$	87
Abbildung 35: Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,3$	88
Abbildung 36: Summenhäufigkeitskurve Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 4$	89
Abbildung 37: Monte Carlo Simulation s_d und x_{geo} bei $\sigma_d = 4$	90
Abbildung 38: Monte Carlo Simulation $x_{geo} * s_d$ und x_{geo}/s_d bei $\sigma_d = 4$	91
Abbildung 39: Monte Carlo Simulation $x_{geo} * s_d$ und x_{geo}/s_d bei $\sigma_d = 1,01$	92

Abbildung 40: Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 1,01$	93
Abbildung 41: Monte Carlo Simulation x_{geo1n} mit $n = 2$ und x_{geo1n} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 1,01$	94
Abbildung 42: Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 4$	95
Abbildung 43: Monte Carlo Simulation x_{geo1n} mit $n = 2$ und x_{geo1n} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 4$	96
Abbildung 44: Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 50$ und s_d mit $n = 50$ bei $\sigma_d = 1,01$	97
Abbildung 45: Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 50$ und s_d mit $n = 50$ bei $\sigma_d = 4$	98
Abbildung 46: SFt – test und SFmod χ – Test im Vergleich bei $\sigma_d = 1,01$	99
Abbildung 47: SFt – test und SFmod χ – Test im Vergleich mit MCS x_{geo} und s_d bei $\sigma_d = 1,01$	100
Abbildung 48: SFLog – t – test und SFmod χ – Test im Vergleich mit MCS x_{geo} und s_d bei $\sigma_d = 4$...	101
Abbildung 49: SF-Log-tUCL84% und SF-d1UCL84% und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$	102
Abbildung 50: SF-Log-tUCL95% und SF-d1UCL95% und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$	103
Abbildung 51: SF-Log-tUCL95% und SF-d1UCL95% und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 3$	104
Abbildung 52: Erzeugung einer Zufallszahl in Excel aus einer Lognormalverteilung in Feld B2	111
Abbildung 53: Berechnung von x_{geo} aus Zufallszahlen in Feld D2	112
Abbildung 54: Berechnung von s_{dy} aus Zufallszahlen in Feld D2	112
Abbildung 55: Berechnung von s_d aus Zufallszahlen in Feld I2.....	113
Abbildung 56: Simulation von 10 Zufallsexperimenten „Stichproben mit $n = 2$ “.....	113
Abbildung 57: Grafische Darstellung von 10 Zufallsexperimenten	114
Abbildung 58: Simulationsexperiment zum Standardstreuungsfaktor s_d und s_{dy}	115
Abbildung 59: Grafische Auswertung von 10 Zufallsexperimenten klassiert nach Häufigkeit	116
Abbildung 60: Grafische Darstellung von 10 Zufallsexperimenten	117
Abbildung 61: Monte-Carlo-Simulation s_d und s_{dy} bei Stichproben mit $n = 2$ und $\sigma_d = 4$	118

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Vergleich von Normal- und Lognormalverteilung	24
Tabelle 2: Differenz der Streufaktoren von DIN 45645 und ISO 9612 bei $\hat{s}_{dy} = 6 \text{ dB}(-) = 4$	48
Tabelle 3: Vergleich von Faktoren in dB und Faktoren linear	58

Formelverzeichnis

Formel 1: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung	28
Formel 2: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung	29
Formel 3: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung über σ_d	30
Formel 4: Standardstreuungsfaktors \hat{s}_{dy} aus \hat{s}_y	33
Formel 5: Erwartungswert aus x_{geo} und \hat{s}_{dy}	34
Formel 6: Alternative Methoden zur Berechnung der Standardabweichung	36
Formel 7: Berechnung der Standardstreuungsfaktoren \hat{s}_{dy} und \check{s}_{dy}	36
Formel 8: Standardstreuungsfaktoren \check{s}_{dy} mit Beispiel.....	36

Formel 9: Erwartungswert aus x_{geo} und \hat{s}_{dy}	37
Formel 10: Berechnung von \hat{s}_{dx} aus s_x	38
Formel 11: Erwartungswert aus x_{geo} und \hat{s}_{dx}	39
Formel 12: Berechnung von \hat{s}_d aus s_x	41
Formel 13: Erwartungswert aus x_{geo} und \hat{s}_{dx}	42
Formel 14: $s_{dx} \sqrt{a/b}$ aus Quotient x_1/x_2 für $n = 2$	42
Formel 15: Erwartungswert aus x_{geo} und $s_{dx} \sqrt{a/b}$	43
Formel 16: Berechnung des Standardstrefaktors s_d	44
Formel 17: Faustformel zur Berechnung von \hat{s}_x aus s_d	45
Formel 18: Ableitung des Standardstrefaktors s_d	46
Formel 19: Allgemeine Berechnung von dB-Werten.....	53
Formel 20: Berechnung von dB-Lärmesswerten im Arbeitsschutz.....	54
Formel 21: Berechnung des geometrischen Mittelwertes von dB-Messwerten.....	55
Formel 22: Berechnung des arithmetischen Mittelwertes von dB-Werten.....	55
Formel 23: Faustformel zum Rechnen mit dB-Werten.....	56
Formel 24: Einfaches 68% Konfidenzintervall für dB-Werte.....	56
Formel 25: Einfaches 68% Konfidenzintervall lineare Werte.....	57
Formel 26: Land-Test.....	59
Formel 27: Streufaktoren nach Land und Streufaktor nach ISO 9612.....	61
Formel 28: LUCL95% in dBre $1pW/m^2$ nach ISO 9612.....	62
Formel 29: Erwartungswert L_{eq} bzw. x einer Lognormalverteilung.....	65
Formel 30: Gauß-Test über \hat{s}_x und Gauß-Test über \hat{s}_{dx}	67
Formel 31: t-Test über \hat{s}_x und t-Test über \hat{s}_{dx}	69
Formel 32: Log t-Test über \hat{s}_y und Log t-Test über \hat{s}_{dy}	71
Formel 33: d1-Test über \hat{s}_{dx}	73
Formel 34: Gauß-Test.....	75
Formel 35: Chi ² -Test.....	75
Formel 36: Kombination Gauß-Test und χ^2 -Test.....	75
Formel 37: Kombination Gauß-Test und χ^2 -Test mit log-Werten.....	76
Formel 38: Ergebnis Herleitung d1-Test.....	77
Formel 39: Konfidenzintervall für den dt-Test.....	78
Formel 40: Darstellung des Land-Tests über den Standardstrefaktor \hat{s}_{dy}	80

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

dB	Faktorkennzeichnung Dezibel (dB) allgemein	[-]
$dB_{(-)}$	Faktorkennzeichnung dB zum Referenzpunkt 1	[-]
$dB_{re\ 1\ pW/m^2}$	Faktorkennzeichnung dB zum Referenzpunkt 1 pW/m ²	[-]
α	Signifikanzniveau (hier immer 0,1 bzw. $1-\alpha/2 = 95\%$)	[-]
x_i	Messwert lineare Ebene z.B. Schallintensitätsmesswert	[z.B. W/m ²]
x_0	Referenzpunkt lineare Ebene	[z.B. W/m ²]
y_i	logarithmisch transformierter Messwert $y_i = \ln(x_i/x_0)$	[-]
\bar{y}	Arithmetischer Mittelwert logarithmische Ebene ($\bar{y} = \ln x_{geo}$)	[-]
\bar{x}	Arithmetischer Mittelwert lineare Ebene	[z.B. W/m ²]
x_{geo}	Geometrischer Mittelwert lineare Ebene	[z.B. W/m ²]
$X_{UCL95\%}$	Upper confidence limit 95% lin-Ebene = $\bar{x} * SF_{UCL95\%}$	[z.B. W/m ²]
$Y_{UCL95\%}$	Upper confidence limit 95% log.-Ebene = $\ln \bar{x} + \ln SF_{UCL95\%}$	[-]
L_i	Schallpegelmesswert (entspricht x_i in dB)	[dB _{re 1 pW/m²}]
L_{eq}	Energieäquivalenter Mittelwert (entspricht \bar{x} in dB)	[dB _{re 1 pW/m²}]
\bar{L}	Arithmetischer dB-Mittelungspegel (entspricht x_{geo} in dB)	[dB _{re 1 pW/m²}]
$L_{UCL95\%}$	$1-\alpha/2$ Konfidenzintervallgrenze des L_{eq} (entspricht $X_{UCL95\%}$ in dB)	[dB _{re 1 pW/m²}]
F	Faktor allgemein	[-]
SF	Streufaktor allgemein = Faktor zur Beschreibung der Streuung von Messwerten	[-]
SF_{lin}	Streufaktor allgemein linear = SF	[-]
$SF_{in\ dB}$	Streufaktor allgemein in dB ₍₋₎	[-]
$SF_{UCL95\%}$	Streufaktor zur Bildung der $X_{UCL95\%}$ ($95\% = 1-\alpha/2$ Konfidenzintervallgrenze)	[-]
$SF_{UCL95\% \text{ in dB}}$	Streufaktor zur Bildung des $L_{UCL95\%}$ in dB	[-]
$SF_{UCL84\%}$	Streufaktor zur Bildung des $UCL_{84\%}$	[-]
$X_{UCL84\%}$	Upper confidence limit 84% $\approx \bar{x} * SF_{UCL84\%}$	[-]
σ_d	Wahrer Standardstreufaktor (entsp. multiplik. Standardabw. nach Limpert)	[-]
$\sigma_d\ lin$	Wahrer Standardstreufaktor lin	[-]
$\sigma_d\ in\ dB$	Wahrer Standardstreufaktor in dB ₍₋₎	[-]
s_d	Schätzwert nach Deisenroth für σ_d	[-]
\hat{s}_{dy}	Schätzwert für σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y	[-]
\check{s}_{dy}	Schätzwert für σ_d aus maximum likelihood Standardabweichung \check{s}_y	[-]
\hat{s}_{dx}	Schätzwert für σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_x	[-]
\check{s}_{dx}	Schätzwert für σ_d aus maximum likelihood Standardabweichung \check{s}_x	[-]
$s_{dx\ \sqrt{a/b}}$	Schätzwert für σ_d aus Wurzel von Quotient $\sqrt{x_{gro\beta}/x_{klein}}$ bei $n = 2$	[-]
\hat{s}_y	Empirische Standardabweichung logarithmische Ebene	[-]

\hat{s}_x	Empirische Standardabweichung lineare Ebene	[z.B. W/m ²]
\check{s}_y	Maximum likelihood Standardabweichung logarithmische Ebene	[-]
\check{s}_x	Maximum likelihood Standardabweichung lineare Ebene	[z.B. W/m ²]
Z	Z-Perzentil in Excel = NORM.INV(0-100% ; $\bar{x} = 0$; $s_d=1$)	[-]
t	t-Perzentil in Excel = T.INV(0-100% ; Freiheitsgrade)	[-]
χ	χ -Perzentil in Excel = CHIINV(0-100% ; Freiheitsgrade)	[-]
n	Stichprobenzahl	[-]
α	Signifikanzniveau	[-]
θ	Theta = Erwartungswert einer Lognormalverteilung auf der lin. Ebene	[z.B. W/m ²]
μ_x	Median einer Normalverteilung auf der linearen-Ebenen	[z.B. W/m ²]
μ_y	Median einer Verteilung auf der logarithmischen-Ebenen	[-]
μ_{xd}	Median einer Stichprobe aus einer Normalverteilung auf der linearen-Ebenen = $e^{\mu_y} = x_{geo}$ bei $n \rightarrow \infty \neq \bar{x}$ bei $n \rightarrow \infty$	[z.B. W/m ²]

1. Einleitung

1.1 Aufgabenstellung (Deutsche Fassung)

In dieser Arbeit werden die Streufaktoren SF_{lin} zur Ermittlung der Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$ (upper confidence limit 95%) folgender Normen bzw. technischer Regeln für Lärm-messungen am Arbeitsplatz untersucht:

1. Bis zum August 2009 wurde für Lärm-messungen am Arbeitsplatz die DIN 45645 Teil 2 „Ermittlung von Beurteilungspegeln aus Messungen - Teil 2: Geräusch-immissionen am Arbeitsplatz, Ausgabe Juli 1997“ angewandt [1].
2. Im September 2009 erschien die neue internationale Norm „DIN EN ISO 9612 – Bestimmung der Lärmexposition am Arbeitsplatz“ [2].
3. Im Januar 2010 erschien die TRLV-Lärm, Teil 2 „Technische Regel zur Lärm- und Vibrations-Arbeitsschutzverordnung, Teil 2: Messung von Lärm“ [3].

Ziel dieser Untersuchung war es, die Plausibilität der großen Streufaktoren SF_{lin} , die sich durch die neue ISO 9612 z.B. für die Messstrategie „Ganztagsmessung“ ergeben, empirisch zu überprüfen und vermutete Fehler bei der Übertragung von Streufaktoren SF_{lin} aus statistischen Tests auf das Gebiet der akustischen Messgröße „Dezibel (dB)“ aufzudecken.

Die beiden Normen und die TRLV-Lärm nutzen vereinfacht folgende statistische Tests, angepasst auf dB-Messwerte :

1. Log-t-Test

Die DIN 45645 nutzte für die Berechnung der Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$ einem t-Test, angewandt auf dB-Messwerte. Im Ergebnis wurde dabei ein Log-t-Test für die linearen Ausgangsmesswerte durchgeführt.

2. Land-Test

Die ISO 9612 nutzt für die Berechnung der Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$ ein Verfahren nach C.E. Land aus dem Jahre 1973, angepasst auf dB-Messwerte [4].

3. Log-Gauß-Test

Die TRLV-Lärm verweist auf die neue DIN EN ISO 9612, enthält jedoch auch ein vereinfachtes Verfahren mit „Geschätzter Unsicherheit bei der Erfassung der längerfristig typischen Lärmexposition“.

Dieses Verfahren entspricht in etwa dem eines Gauß-Tests mit bekannter Standardabweichung, übertragen auf Dezibel-Messwerte. Im Ergebnis wird dabei ein „Log-Gauß-Test“ zur Ermittlung der Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$ der linearen Ausgangsmesswerte durchgeführt.

Die Standardabweichung „ $\hat{s}_y \text{ in dB} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2}$ “ und der Streufaktor $SF_{UCL95\%}$ zur Berechnung der Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$ werden in den Normen und in der TRLV-Lärm in $dB_{(-)}$ angegeben. Die Lärmesswerte L_i selbst werden in $dB_{re 1 pW/m^2}$ ermittelt.

Die Standardabweichung „ $\hat{s}_y \text{ in dB}$ “ wird in dieser Arbeit auch als Standardstrefaktor \hat{s}_{dy} bezeichnet, da dieser Wert keine Abweichung in $dB_{re 1 pW/m^2}$ sondern einen dimensionslosen Streufaktor $SF_{in dB_{(-)}}$ oder rücktransformiert in einen linearen Wert einfach einen Streufaktor $SF = SF_{lin}$ darstellt.

Der Begriff „Strefaktor“ wird z.B. von Sachs [8] für den Ausdruck " $e^{\hat{s}_y}$ " bei Stichproben aus Lognormalverteilungen verwendet. In dieser Arbeit wird der Schätzwert für den Streufaktor nach Sachs als Standardstrefaktor $\hat{s}_{dy} = e^{\hat{s}_y} = 10^{0,1 \cdot \hat{s}_y \text{ in dB}}$ bezeichnet, um ihn von anderen Streufaktoren SF_{lin} unterscheiden zu können. Der wahre und bei Stichprobenmessungen immer unbekannt Standardstrefaktor wird in dieser Arbeit σ_d genannt.

Es wurden folgende Hypothesen aufgestellt (Abschnitt 4) und geprüft:

Hypothese 1: Rechenfehler dB-Werte

Bei der Erstellung der ISO 9612 sind Fehler beim Umrechnen linearer Werte in dB-Werte unterlaufen.

Hypothese 2: Fehlerhafter Land-Test

Die Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ der ISO 9612 bzw. des Land-Test sind unrealistisch hoch.

Hypothese 3: Normalverteilungstests sind auch für dB-Werte geeignet

Der Gauß-Test, der t-Test und modifizierte χ -Tests (d1-Test, d2-Test und dt-Test) sind auch zur Ermittlung der Unsicherheit von dB-Messwerten bzw. für Stichproben aus Lognormalverteilungen geeignet.

Ein Beispiel für die Bewertung nach DIN 45645, nach ISO 9612 und nach der in Deutschland seit Januar 2010 gültigen TRLV-Lärm ist im Abschnitt 1.3 aufgeführt.

1.2 Scope of work (Englische Fassung)

In this work, the scattering factors SF_{lin} for the calculation the confidence limit $L_{UCL95\%}$ (upper confidence limit 95%) of the following standards and technical regulations for noise measurements in the workplace are analysed:

1. Until August 2009, DIN 45645 Part 2 "Determination of rating levels from measurements - Part 2: Noise immissions at the work place" was applied [1].
2. In September 2009, the new international standard "ISO 9612 - Determination of occupational noise exposure " was released [2].
3. In January 2010, TRLV-noise, Part 2 "Technical Rules for Noise and Vibration Occupational Safety Ordinance, Part 2: Measurement of Noise" was published [3].

The aim of this study was to evaluate empirically the plausibility of the large scattering factors SF_{lin} , which result from the new standard DIN EN ISO 9612 for the measurement strategy for "all-day measurements". In addition, probable errors in the transmission of scattering factors SF_{lin} from statistical tests to the field of acoustic measurement in "decibels" might be revealed.

These standards primarily use the following statistical tests adapted to dB-values:

1. Log-t test

For the calculation of the confidence limit $L_{UCL95\%}$, DIN 45645 used a t-test applied to dB-measured values. As a result, a Log-t-test for linear output measurements was performed.

2. Land test

To calculate confidence limit $L_{UCL95\%}$, ISO 9612 uses a method according to C.E. Land of the year 1973 adapted to dB-values [4].

3. Log-Gaussian test

TRLV-noise refers to the new DIN EN ISO 9612, but contains some simplifications with "estimated uncertainty in the determination of the typical long-term noise exposure."

In TRLV-noise, for the calculation of the confidence limit $L_{UCL95\%}$, a procedure is used which complies approximately with that of a Gaussian test with known standard deviation. As a result, a Log-Gaussian-test for linear output measurements was performed.

This method is similar to that of a Gaussian transfer test with known standard deviation transferred to decibel readings. As a result, a "log-Gaussian test" to determine the confidence limit $L_{UCL95\%}$ of the linear output readings is performed.

Standard deviation „ \hat{s}_y in dB = $\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2}$ “ and scattering factor $SF_{UCL95\%}$ in dB to calculate $L_{UCL95\%}$ are specified in dB(-) in the standards and in TRLV-noise. The noise measurement values themselves are determined in $dB_{re 1 pW/m^2}$.

In this work, standard deviation is referred to as "standard scattering factor" \hat{s}_{dy} since this value is no deviation in $dB_{re 1 pW/m^2}$ but a non-dimensional scattering factor $SF_{in dB(-)}$, or if transformed back into a linear value, it is simply a scattering factor $SF = SF_{lin}$.

The term "scattering factor" is used for example by Sachs [8] to specify the term " $e^{\hat{s}_y}$ " for random sampling from log-normal distributions. In this work, the estimate for the scattering factor according to Sachs is referred to as standard scattering factor $\hat{s}_{dy} = e^{\hat{s}_y} = 10^{0,1 \cdot \hat{s}_y}$ in dB to discriminate it from other scattering factors SF_{lin} . The real standard scattering factor which is always unknown in random sampling is referred to in this work as σ_d .

The following hypotheses (section 4) were established and tested:

Hypothesis 1: Calculation errors dB-values

In creating ISO 9612, mistakes occurred in converting linear to dB-values.

Hypothesis 2: Incorrect Land-Test

The scattering factors $SF_{UCL95\%}$ of ISO 9612 and the Land-test are unrealistically high.

Hypothesis 3: Normal distribution tests are also suitable for dB-values

It was suggested that the Gaussian-test, the t-test and modified χ -tests (d1-test, d2-test and dt-test) for the normal distributions can be transferred to dB-measurements or to log-normal distributions.

An example of the evaluation according to DIN 45645, ISO 9612 and of TRLV-noise which is valid in Germany since January 2010 is specified in section 1.3.

1.3 Beispiel für die Bewertung nach DIN 45645, ISO 9612 und TRLV-Lärm

Beispiel mit $n = 3$ Ganztagsstichprobenmessungen L_i für einen Arbeitsplatz mit einem Schallpegelmessgerät der höchsten Genauigkeitsklasse (GK Schallpegelmessgerät = 1):

Gegeben: $L_1 = 64 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2}$ (entspricht $10^{6,4} \text{ pW/m}^2$)
 $L_2 = 70 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2}$ (entspricht $10^{7,0} \text{ pW/m}^2$)
 $L_3 = 76 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2}$ (entspricht $10^{7,6} \text{ pW/m}^2$)

Gesucht: Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$
 nach DIN 45645, ISO 9612 und TRLV-Lärm

Lösung: $\hat{s}_y \text{ in dB} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2} = 6 \text{ dB}_{(-)} = \text{Standardstreuung } \hat{s}_{dy} \text{ in dB}$

$(\hat{s}_{dy \text{ lin}} = 10^{0,1 \cdot \hat{s}_y \text{ in dB}} = \text{Standardstreuung } \hat{s}_{dy} = 4)$

$$L_{eq} = 10 \cdot \log \left[\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n 10^{0,1 \cdot L_i} + 10^{0,1 \cdot L_2} + 10^{0,1 \cdot L_3} \right] = 72,4 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2}$$

$$SF_{UCL95\% \text{ DIN 45645}, n=3, \hat{s}_y=6 \text{ dB}_{(-)}} = 10,1 \text{ dB}_{(-)} = 10^{1,01}$$

$$SF_{UCL95\% \text{ ISO 9612}, n=3, \hat{s}_y=6 \text{ dB}_{(-)}} = 76,7 \text{ dB}_{(-)} = 10^{7,67}$$

$$SF_{UCL95\% \text{ TRLV Lärm, Genauigkeitsklasse 3}} = 6 \text{ dB}_{(-)} = 10^{0,6} = 4$$

(Geschätzte Unsicherheit bei der Erfassung der längerfristig typischen Lärmexposition $\leq 6 \text{ dB}_{(-)}$)

$L_{UCL95\%}$ nach DIN 45645:

$$L_{UCL95\% \text{ DIN 45645}} \text{ in dB} = L_{eq} \text{ in dB} + SF_{UCL95\% \text{ DIN 45645}} \text{ in dB} = 72,4 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2} + 10,1 \text{ dB}_{(-)} = 82,5 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2}$$

$$X_{UCL95\% \text{ DIN 45645}} \text{ in } pW/m^2 = \bar{x} \cdot SF_{UCL95\% \text{ DIN 45645}} \text{ lin} = 10^{7,24} pW/m^2 \cdot 10^{1,01} = 10^{8,25} pW/m^2$$

$L_{UCL95\%}$ nach ISO 9612:

$$L_{UCL95\% \text{ ISO 9612}} \text{ in dB} = L_{eq} \text{ in dB} + SF_{UCL95\% \text{ ISO 9612}} \text{ in dB} = 72,4 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2} + 76,7 \text{ dB}_{(-)} = 149,1 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2}$$

$$X_{UCL95\% \text{ ISO 9612}} \text{ in } pW/m^2 = \bar{x} \cdot SF_{UCL95\% \text{ ISO 9612}} \text{ lin} = 10^{7,24} pW/m^2 \cdot 10^{7,67} = 10^{14,91} pW/m^2$$

$L_{UCL95\%}$ nach TRLV-Lärm (Genauigkeitsklasse 3):

$$L_{UCL95\% \text{ TRLV Lärm}} \text{ in dB} = L_{eq} \text{ in dB} + SF_{UCL95\% \text{ TRLV-Lärm}} \text{ in dB} = 72,4 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2} + 6 \text{ dB}_{(-)} = 78,4 \text{ dB}_{re\ 1\ pW/m^2}$$

$$X_{UCL95\% \text{ TRLV Lärm}} \text{ in } pW/m^2 = \bar{x} \cdot SF_{UCL95\% \text{ TRLV-Lärm}} \text{ lin} = 10^{7,24} pW/m^2 \cdot 4 = 10^{7,84} pW/m^2$$

Die Differenz der Streufaktoren von DIN 45645 und ISO 9612 beträgt in diesem Beispiel $66,61 \text{ dB}_{(-)}$. Diese Differenz entspricht einem sehr großen Faktor von $10^{6,661} = 4\,581\,418$.

Die ISO 9612 empfiehlt, bei Ganztagsmessungen mit einem Standardstreuungsfaktor von $\hat{s}_{dy} = 6 \text{ dB}_{(-)} = 4$, mindestens 14 repräsentative Ganztagsmessungen durchzuführen.

Nach DIN 45645 war bei solchen Streuungen schon ab 5 Messungen eine statistisch abgesicherte Beurteilung möglich.

Eine Beurteilung mit 3 Ganztagsmessungen nach ISO 9612 ist nur möglich, wenn der Standardstreuungsfaktor maximal $\hat{s}_{dy} = 1,5 \text{ dB}_{(-)} = 1,41$ beträgt. Bei größerer Streuung kann die Anzahl der notwendigen Messungen nach ISO 9612 z.B. für die Messstrategie „Ganztagsmessung“ stark ansteigen.

Nach der TRLV-Lärm kann die „Geschätzte Unsicherheit bei der Erfassung der längerfristigen typischen Lärmexposition“ von $\leq 1,5 \text{ dB}$, $\leq 3 \text{ dB}$ und $\leq 6 \text{ dB}$ den Genauigkeitsklassen 1-3 mit $0 \text{ dB}_{(-)}$, $3 \text{ dB}_{(-)}$ und $6 \text{ dB}_{(-)}$ Unsicherheit ΔL zugeordnet werden, wenn ein Schallpegelmessgerät der Genauigkeitsklasse 1 verwendet wird.

Nach TRLV-Lärm ist hier daher schon mit den 3 Ganztagsmessungen die oben aufgeführte Beurteilung möglich, wenn noch Zusatzinformationen vorliegen, die das Schätzen der Unsicherheit erlauben. Die „Geschätzte Unsicherheit bei der Erfassung der längerfristig typischen Lärmexposition $\leq 6 \text{ dB}_{(-)}$ “, ergibt Genauigkeitsklasse 3 mit einer Unsicherheit $\Delta L = 6 \text{ dB}_{(-)}$. Dieses Verfahren entspricht in etwa dem Vorgehen eines Gauß-Tests mit bekanntem σ_d übertragen auf dB-Messwerte. Der Unsicherheitsbeitrag $\Delta L = 6 \text{ dB}_{(-)}$ entspricht dem Streufaktor $SF_{UCL95\% \text{ TRLV Lärm, Genauigkeitsklasse 3}}$.

Wenn für das obige Beispiel noch folgende oder ähnliche Zusatzinformationen vorhanden sind, scheint das Schätzen des Streufaktors $SF_{UCL95\%}$ in 3 Genauigkeitsklassen nach TRLV-Lärm für viele Arbeitsplätze auch möglich, wenn die einzelnen Tätigkeiten genauer betrachtet werden:

Zusatzinformation zu den drei oben aufgeführten Ganztagsstichprobenmessungen L_1 bis L_3

1. Außendienstmitarbeiter
2. Dauer täglicher Büroarbeiten: 0 Minuten bis 7,5 Stunden
3. Dauer täglicher Fahrten mit einem PKW: 30 Minuten bis 8 Stunden
4. Schallpegel Büro: $\leq 50 \text{ dB(A)}$ bzw. $50 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$
5. Fahrzeuginnenschallpegel PKW-Fahrt: $\leq 76 \text{ dB(A)}$ bzw. $76 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$
6. Geschätzter $SF_{UCL95\%}$: $\leq 3 \text{ dB}_{(-)}$ für Fahrzeuginnenschallpegel

Der niedrigste Tagespegel für einen solchen Außendienstmitarbeiter wird durch 30 min PKW-Fahrt mit einem Schallpegel von ca. $76 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$ bestimmt und ergibt den L_1 von ca. $64 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$.

Der höchste Tagespegel für einen solchen Außendienstmitarbeiter wird durch 8 Stunden PKW-Fahrt mit einem Schallpegel von ca. $76 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$ bestimmt und ergibt den L_3 von ca. $76 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$.

Ein mittlerer Tagespegel für einen solchen Außendienstmitarbeiter wird durch 2 Stunden PKW-Fahrt mit einem Schallpegel von ca. $76 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$ bestimmt und ergibt den L_2 von ca. $70 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$.

Beim Erzielen der Genauigkeitsklasse 3 nach TRLV-Lärm mit einem $SF_{UCL95\%} = 6 \text{ dB}_{(-)}$ ergibt sich der oben aufgeführte $L_{UCL95\% \text{ TRLVLärm}} = 78,4 \text{ dB}_{\text{re } 1 \text{ pW/m}^2}$.

Dieses nach TRLV-Lärm erlaubte Vorgehen entspricht einem Gauß-Test mit bekanntem σ_x bzw. mit bekanntem σ_d , übertragen auf Lognormalverteilungen bzw. auf Dezibel-Messwerte.

Liegen genügend Zusatz- oder Vorinformationen vor (z.B. Streubreite Fahrzeuginnenpegel, Lärmpegel in einem leisen Büro, Dauer von Tätigkeiten) ergeben sich in Verbindung mit Stichprobenmessungen für einzelne Tätigkeiten auch realistische Expositions- und Fehlerabschätzungen. Dabei wird strenggenommen von der Messstrategie „Ganztagsmessung“ auf die Messstrategie „Tätigkeitsbezogene Messung“ umgestiegen.

Wie die hier durchgeführten Untersuchungen auch gezeigt haben (siehe Abschnitt 7), ergeben sich sehr große Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$, wenn die Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$ aus einer kleinen Stichprobe mit $\hat{s}_{dy} = 6 \text{ dB}_{(-)} = 4$ ohne Zusatzinformationen ermittelt werden muss.

2. Standardstreuungsfaktor σ_d

Wie in der Einleitung dargestellt, wird auf dem Gebiet der Akustik als Kennwert für die Streuung von Messwerten nicht wie sonst üblich eine additive bzw. lineare Standardabweichung in der Dimension der Ausgangswerte $dB_{(re\ 1\ pW/m^2)}$, sondern eine Standardabweichung in $dB_{(-)}$ angegeben. Im Beispiel der Einleitung (Abschnitt 1.3) betrug die empirische Standardabweichung $\hat{s}_y\ in\ dB = 6\ dB_{(-)}$.

Die empirische Standardabweichung \hat{s}_y von Lärmmessungen in Dezibel kann man rücktransformieren auf die Ebene der Ausgangswerte zu dem Standardstreuungsfaktor $\hat{s}_{dy} = 10^{0,1 \cdot \hat{s}_y\ in\ dB}$.

Für das Beispiel der Einleitung ergibt sich $\hat{s}_{dy} = 10^{0,1 \cdot 6\ dB_{(-)}} = 4$. Die Berechnung von weiteren Schätzwerten s_d für den Standardstreuungsfaktor σ_d wird im Abschnitt 2.2.1 bis Abschnitt 2.2.6 beschrieben.

Dabei drückt die Bezeichnung „empirische Standardabweichung $\hat{s}_y\ in\ dB$ “ den gleichen Faktor F aus wie der „Standardstreuungsfaktor \hat{s}_{dy} “:

$$F = \hat{s}_y\ in\ dB = 6\ dB_{(-)} = \text{Standardstreuungsfaktor } \hat{s}_{dy\ in\ dB} = \text{Standardstreuungsfaktor } \hat{s}_{dy} = 4$$

Bei den durchgeführten Untersuchungen zum Land-Test und anderen statistischen Methoden ist der Standardstreuungsfaktor s_d bzw. σ_d die kennzeichnende Größe. Die unterschiedlichen Schätzwerte für den wahren Standardstreuungsfaktor werden hier mit „ s_d “ bezeichnet. Der wahre Standardstreuungsfaktor „ σ_d “ einer Grundgesamtheit ist wie die „wahre Standardabweichung σ_x “ immer unbekannt und kann nur geschätzt werden.

Die ISO 9612 enthält in Tabelle C.4. (Anlage 3) Streufaktorwerte für die empirischen Standardabweichungen von $\hat{s}_y\ in\ dB = 0,5$ bis $6\ dB_{(-)}$. Dies entspricht Standardstreuungsfaktoren von $\hat{s}_{dy} = 1,12$ bis 4 . Eine $\hat{s}_{dy} = 1,12$ kann als kleiner und ein $\hat{s}_{dy} = 4$ kann als großer Standardstreuungsfaktor betrachtet werden. Die Anwendung der Tabelle C.4 bzw. der Land-Test wird in Abschnitt 6 beschrieben.

Die Abbildung 1 stellt die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normal- und Lognormalverteilung bei einem mittleren Standardstrefaktor von $\sigma_d = 2$ grafisch gegenüber. Hierbei ist ein deutlicher Unterschied zwischen diesen Verteilungstypen erkennbar.

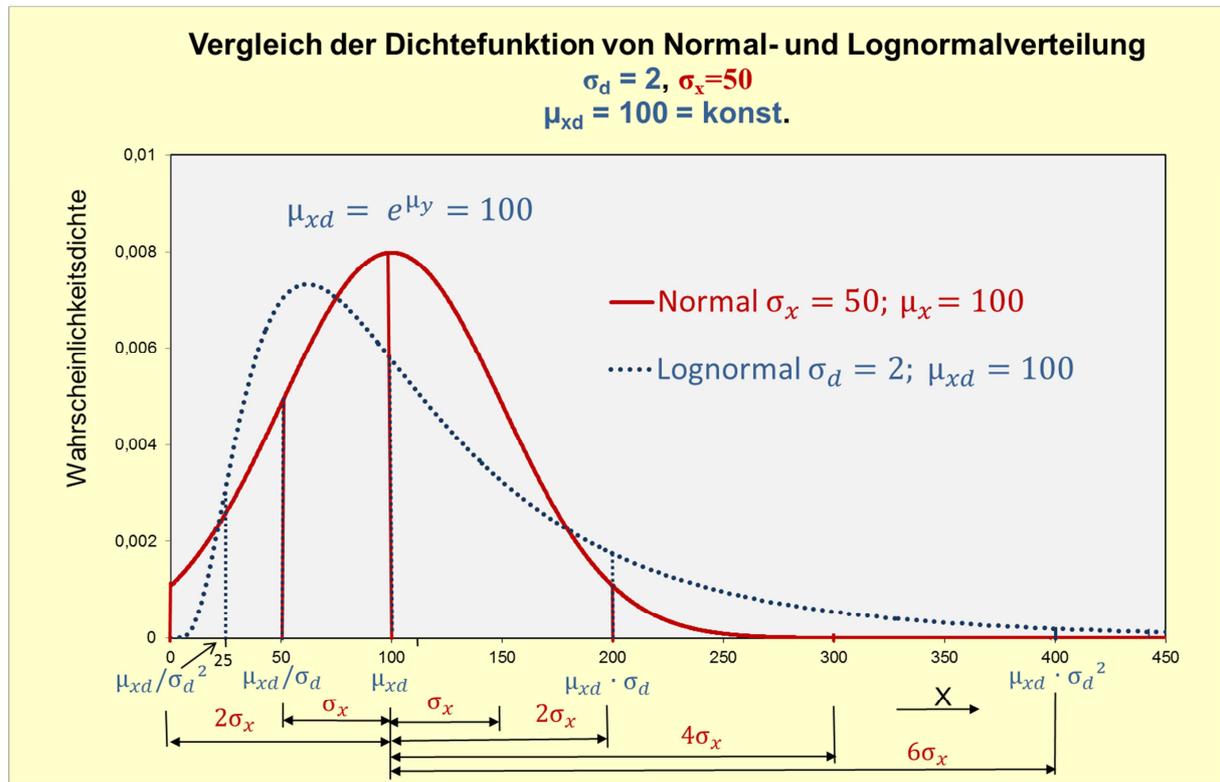


Abbildung 1: Vergleich der Dichtefunktion von Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 2$

Die Abbildung 2 stellt die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normal- und Lognormalverteilung grafisch bei einem sehr kleinen Standardstrefaktor von $\sigma_d = 1,01$ gegenüber. Bei einem Standardstrefaktor von $\sigma_d = 1,01$ ist visuell kein Unterschied zwischen Normal- und Lognormalverteilung erkennbar.

Der Standardstrefaktor s_d bei Stichproben ist u.a. ein Maß für die Schiefe der vorliegenden Stichprobenverteilung. Bis zu einem Variabilitätskoeffizienten von $V = \frac{s_x}{\bar{x}} < 0,33$ kann nach Sachs [8] von einer Normalverteilung ausgegangen werden. Dies entspricht einem Standardstrefaktor von $\hat{s}_{dx} \approx 1 + \frac{s_x}{\bar{x}} \approx 1,33$ (Berechnung siehe Abschnitt 2.2.3).

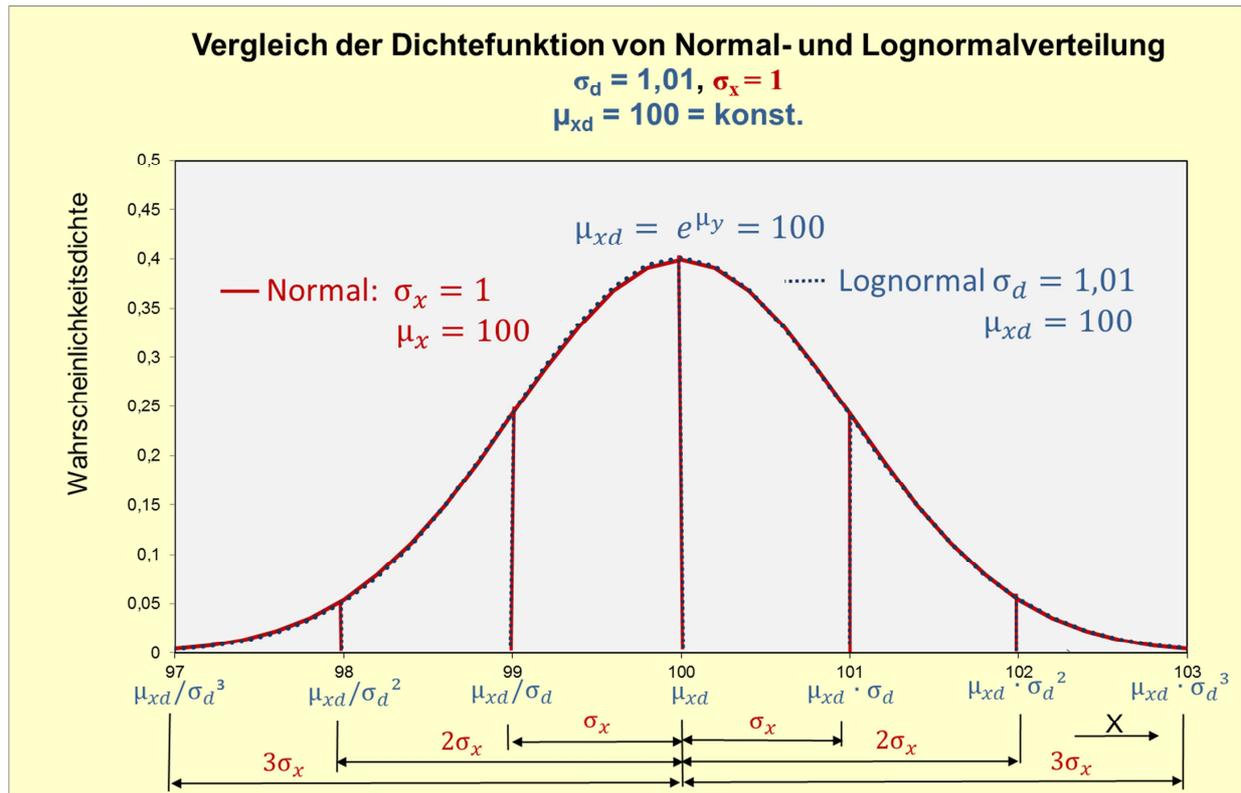


Abbildung 2: Vergleich der Dichtefunktion von Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,01$

Ein Standardstreu­faktor $\sigma_d > 1,33$ ergibt eine schiefe Verteilung, die als Lognormalverteilung behandelt werden muss. Die statistischen Testverfahren wie der Gauß-Test und der t-Test für die Normalverteilung führen bei einem Standardstreu­faktor von $s_d > 1,33$ zu falschen Ergebnissen.

Die Tabelle 1 stellt die Merkmale einer Normal- und Lognormalverteilung gegenüber.

Merkm­al	Normalverteilung	Lognormalverteilung
Effekt	additiv	multiplikativ
Form	symmetrisch	links-schief
Mittelwert	\bar{x} , arithmetischer MW	x_{geo} , geometrischer MW
Streu­kennwert	Standardabweichung σ_x bzw. s_x	Standardstreu­faktor σ_d bzw. s_d
Überdeckungsgrad		
68,3%	$\bar{x} \pm \sigma_x$	$x_{geo} */ \sigma_d$
95,5%	$\bar{x} \pm 2 \cdot \sigma_x$	$x_{geo} */ \sigma_d^2$
99,7%	$\bar{x} \pm 3 \cdot \sigma_x$	$x_{geo} */ \sigma_d^3$

Tabelle 1: Vergleich von Normal- und Lognormalverteilung

Die Tabelle 1 wurde einem Artikel von Eckard Limpert et.al. über Lognormalverteilungen aus dem Jahr 2001 entnommen [9]. Auch hier wird die Streuung von lognormalverteilten Messwerten durch die rücktransformierten Schätzparameter $x_{geo} = e^{\mu_y}$ und $s_x^* = e^{s_y}$ beschrieben. Die Streuung von s_x^* ist dabei multiplikativ um den geometrischen Mittelwert x_{geo} . Die „multiplikative Standardabweichung s_x^* “ nach Limpert entspricht dem „empirischen Standardstreudefaktor \hat{s}_{dy} “ und sinngemäß dem wahren Standardstreudefaktor σ_d .

In den Abbildungen 3 und 4 sind Verteilungen mit Standardstrefaktoren von $\sigma_d = 1,2$ bis $\sigma_d = 8$ mit linearer und logarithmischer Achse dargestellt.

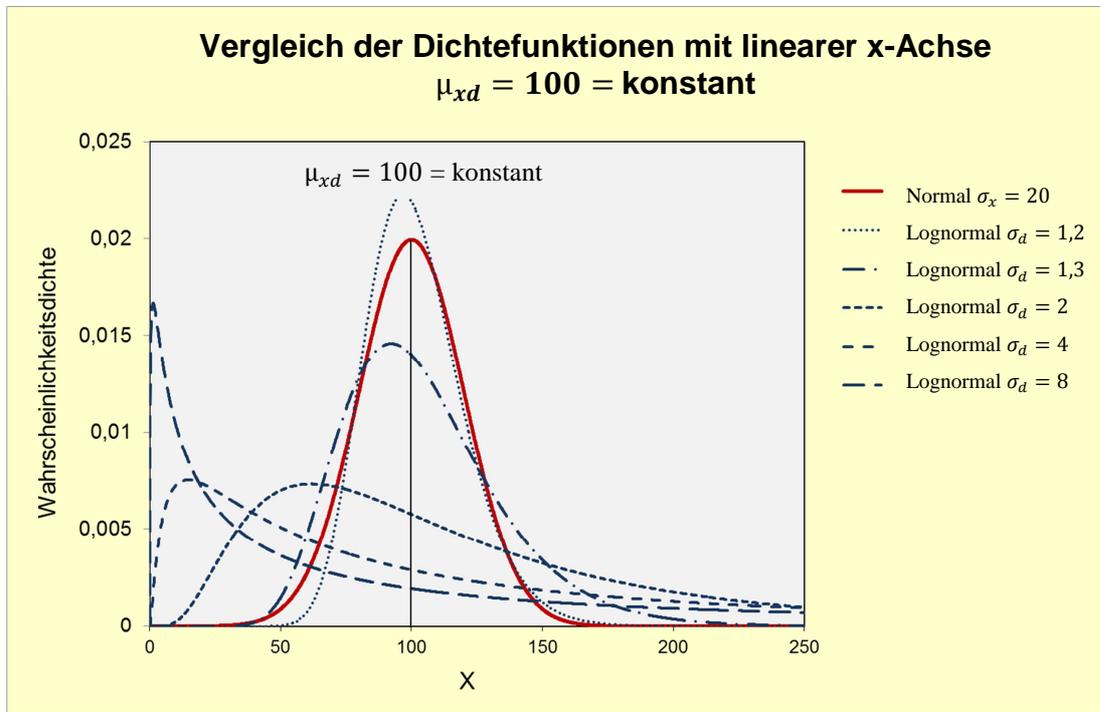


Abbildung 3: Dichtefunktionen von $\sigma_d = 1,2$ bis $\sigma_d = 8$ lineare X-Achse

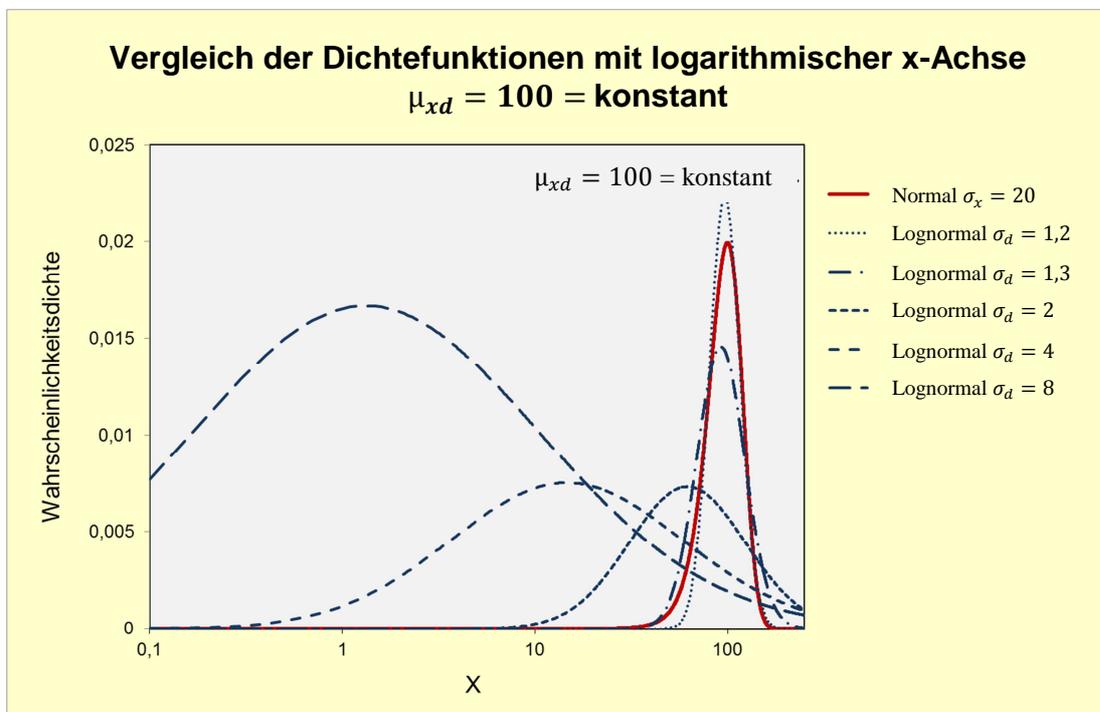


Abbildung 4: Dichtefunktionen von $\sigma_d = 1,2$ bis $\sigma_d = 8$ logarithmische X-Achse

Stellt man die schiefe Lognormalverteilung mit logarithmischer x-Achse dar (Abbildung 4), ähneln alle Lognormalverteilungen einer Normalverteilung. Die „Wahrscheinlichkeits-Symmetrieachse“ einer Lognormalverteilung ist jedoch nicht der Modalwert (häufigster Wert), sondern der geometrische Mittelwert $x_{geo} = \mu_{xd} = e^{\mu_y} = \text{Median der } x \text{ Ebene}$.

In Abbildung 8 ist eine Lognormalverteilung und eine Normalverteilung mit dem gleichen Erwartungswert bzw. Mittelwert \bar{x} bei einem Standardstreudefaktor von 1,33 dargestellt. Diese Lognormalverteilung könnte bei Stichproben mit $n \rightarrow \infty$ noch als Normalverteilung betrachtet werden.

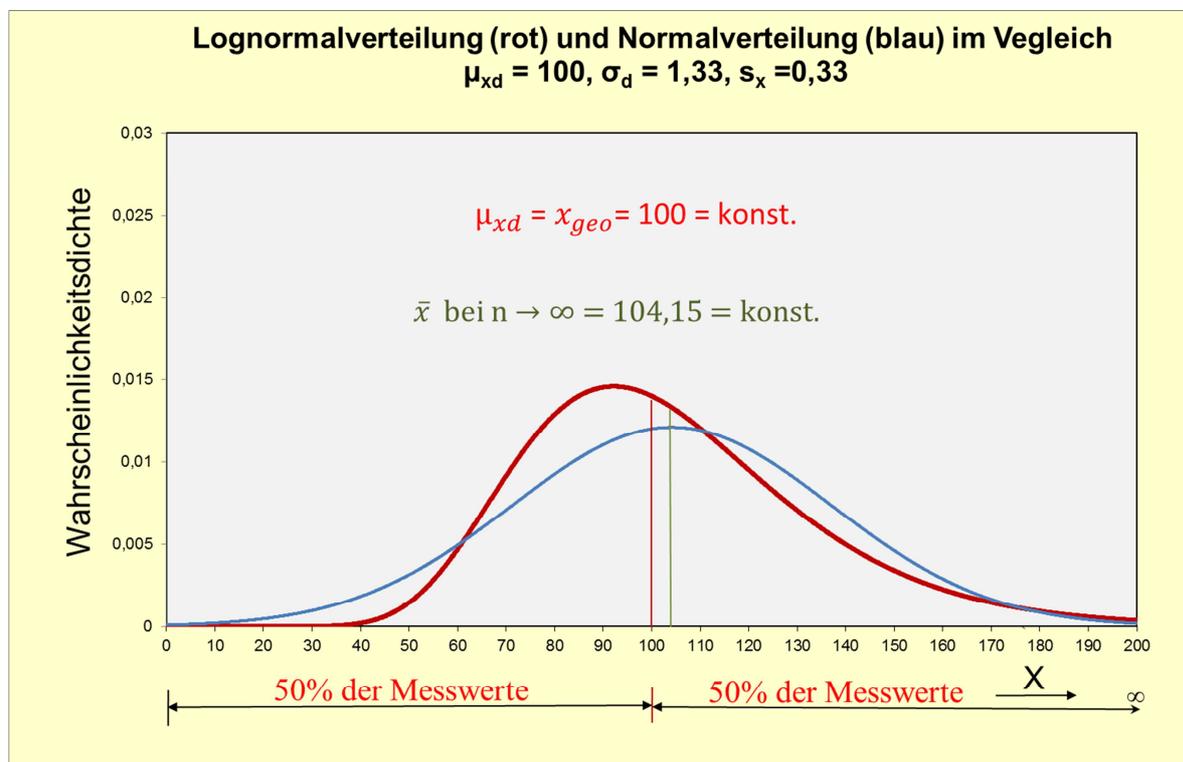


Abbildung 5: Vergleich der Dichtefunktion von Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,33$

Die Wahrscheinlichkeitssymmetrieachse einer Normalverteilung mit $s_d > 1$ kann bei $n \rightarrow \infty$ nicht mit dem arithmetischen Mittelwert identisch sein. Nur bei einer Normalverteilung mit dem Standardstreudefaktor $s_d = 1$ können Modalwert, Median und Erwartungswert genau auf der „Wahrscheinlichkeits-Symmetrieachse“ x_{geo} liegen.

Eine Normalverteilung ist somit strenggenommen eine Lognormalverteilung mit dem Standardstreudefaktor $s_d = 1$. Eine solche Normalverteilung hat keine Streuung, da hier $\sigma_x = 0$ ist.

Nur dann wäre auch der geometrische Mittelwert (x_{geo}) mit dem arithmetischen Mittelwert (\bar{x}) identisch.

2.1 Normalverteilung, Lognormalverteilung und σ_d

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung ist in „Formel 1“ und in Abbildung 6 dargestellt.

<p>Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung</p> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}$	<p>$f(x)$ = Wahrscheinlichkeitsdichte x x = Variable der x-Ebene σ_x = Standardabweichung x-Ebene μ_x = Median = Erwartungswert = Modalwert = Mittelwert der x-Ebene einer Normalverteilung</p>
--	---

Formel 1: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung

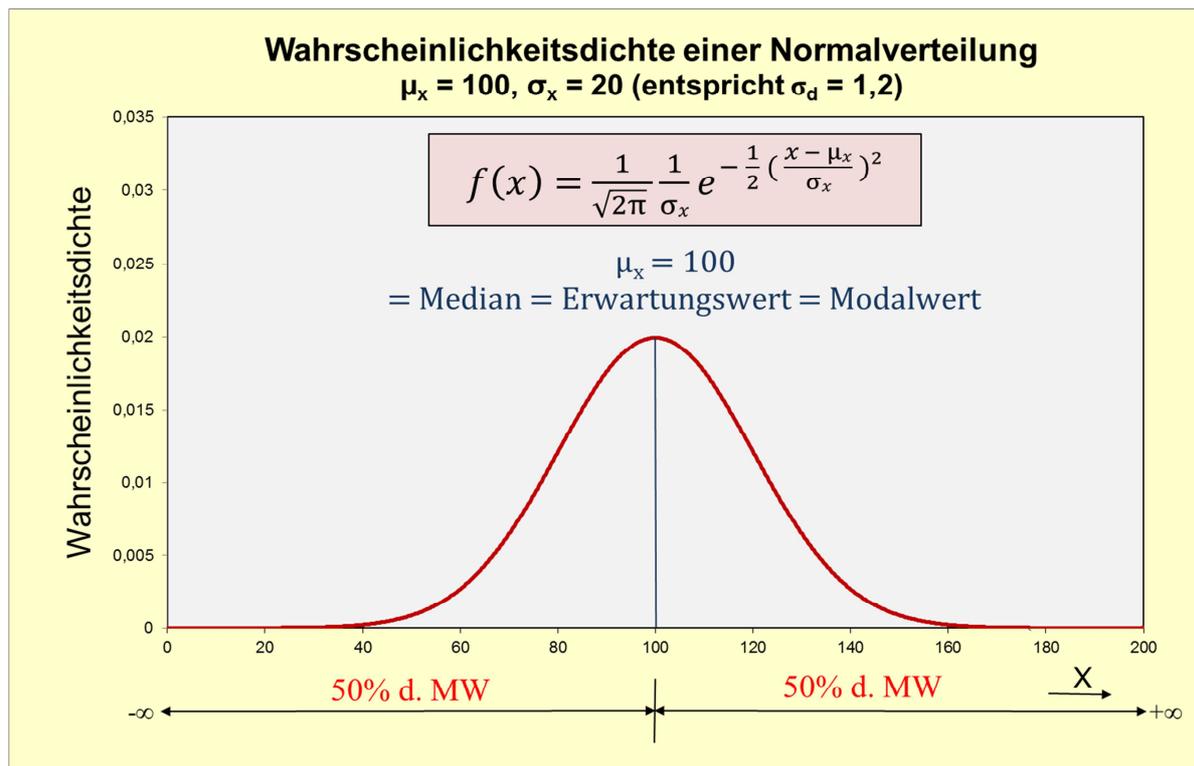


Abbildung 6: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung ist in Formel 2 und in Abbildung 7 dargestellt.

<p>Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung</p> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_y} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2}$	<p>Legende für Formel 2</p> <p>$f(x)$ = Wahrscheinlichkeitsdichte x x = Variable der x-Ebene σ_y = Standardabweichung y-Ebene = $\ln \sigma_d$ μ_y = Median der y-Ebene = $\ln x_{geo}$ bei $n \rightarrow \infty$</p> <p>Zusätzliche Legende für Abbildung 7</p> <p>$\mu_{xd} = e^{\mu_y} = x_{geo}$ bei $n \rightarrow \infty$ = Median der x Ebene nach Deisenroth für Normal und Lognormal x_{geo} = Geometrischer Mittelwert der x-Ebene $\Theta = e^{(\mu_y + \frac{1}{2} \sigma_y^2)} = EX$ = Erwartungswert $\cong \bar{x}$ = arithmetischer Mittelwert der x-Ebene bei $n \rightarrow \infty$ Modalwert = häufigste Wert.</p>
--	--

Formel 2: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung

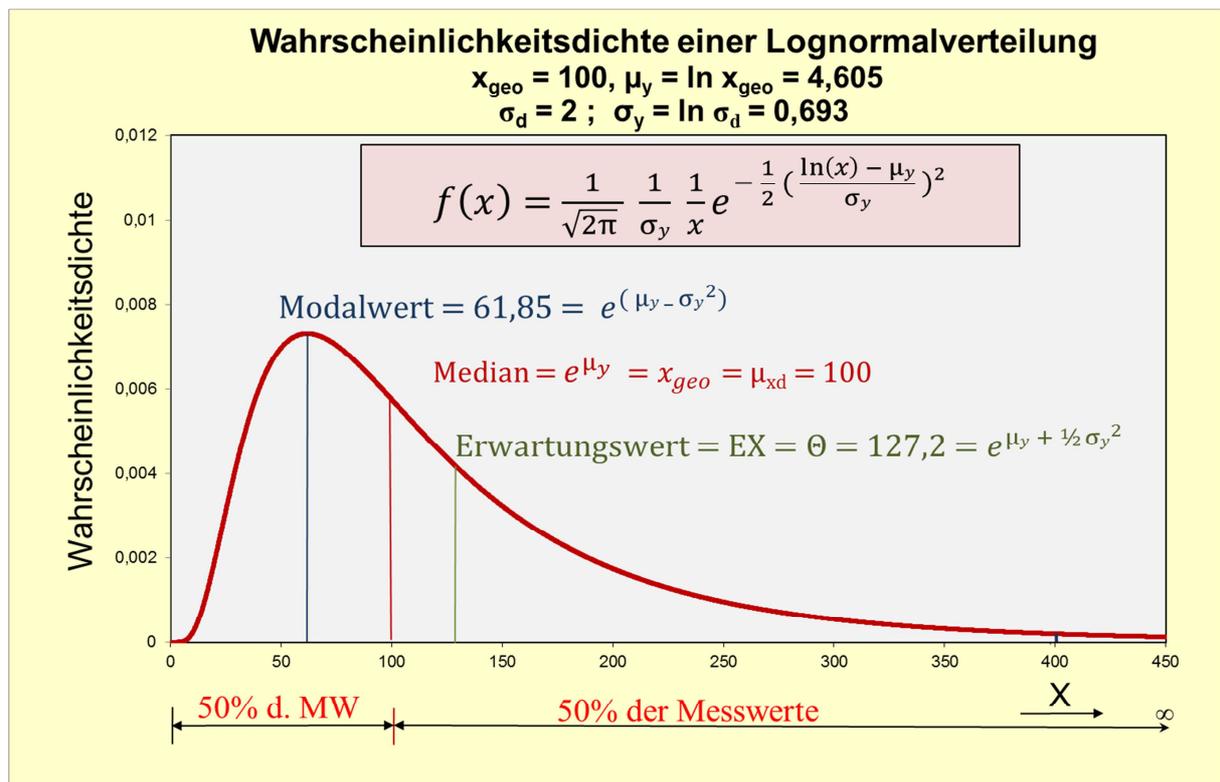


Abbildung 7: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung über σ_d ist in „Formel 3“ und in Abbildung 8 dargestellt:

<p>Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung über σ_d</p> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ln \sigma_d} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \ln x_{geo}}{\ln \sigma_d} \right)^2}$	<p>Legende für Formel 3 und Abbildung 8</p> <p>$f(x)$ = Wahrscheinlichkeitsdichte x x = Variable der x-Ebene σ_y = Standardabweichung y-Ebene = $\ln \sigma_d$ σ_d = Standardstrefaktor der x-Ebene = e^{σ_y} μ_y = Median der y-Ebene = $\ln x_{geo}$ bei $n \rightarrow \infty$ $\mu_{xd} = e^{\mu_y} = x_{geo}$ bei $n \rightarrow \infty$ = Median der x Ebene für Normal und Lognormal x_{geo} = Geometrischer Mittelwert der x-Ebene $\Theta = e^{(\mu_y + \frac{1}{2} \sigma_y^2)}$ = EX = Erwartungswert $\cong \bar{x}$ = arithmetischer Mittelwert der x-Ebene bei $n \rightarrow \infty$ Modalwert = häufigste Wert.</p>
--	--

Formel 3: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung über σ_d

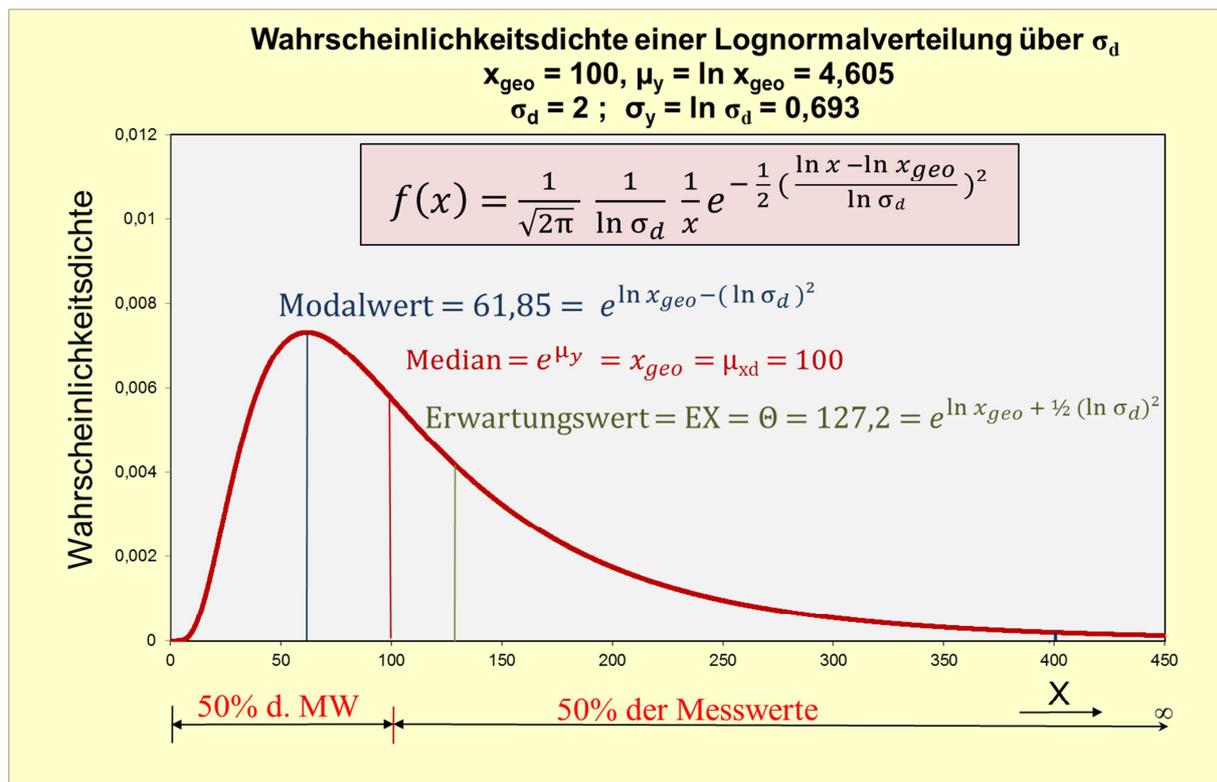


Abbildung 8: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Lognormalverteilung über σ_d

2.2 Schätzwerte für den Standardstreudefaktor σ_d

Als Schätzwerte s_d für den wahren unbekanntem Standardstreudefaktor σ_d werden in dieser Arbeit sechs Methoden angewendet (x-Werte sind lineare Werte, y-Werte sind logtransformiert):

1. Schätzung des empirischen Standardstreudefaktors \hat{s}_{dy} aus der empirischen Standardabweichung \hat{s}_y
2. Schätzung des maximum likelihood Standardstreudefaktors \check{s}_{dy} aus der maximum likelihood Standardabweichung \check{s}_y
3. Schätzung des empirischen Standardstreudefaktors \hat{s}_{dx} aus der empirischen Standardabweichung \hat{s}_x
4. Berechnung des Standardstreudefaktors \check{s}_{dx} aus der maximum likelihood Standardabweichung \check{s}_x
5. Berechnung des Standardstreudefaktors $s_{dx \sqrt{a/b}}$ bei $n = 2$ nach der Formel
$$s_{dx \sqrt{a/b}} = \sqrt{(x_{\text{groß}}/x_{\text{klein}})}$$
6. Berechnung des Standardstreudefaktors s_d nach Deisenroth aus dem geometrischen Mittelwert x_{geo} und dem arithmetischen Mittelwert \bar{x} .

Die Schätzwerte lfd. Nr. 1 und 3 entsprechen den Schätzwerten von Limpert [9] und Sachs [8].

Die Schätzwerte lfd. Nr. 2 und 4 ergeben sich aus unterschiedlichen Berechnungsmethoden für die Standardabweichung.

Die Schätzwerte lfd. Nr. 5 und 6 wurden selbst entwickelt.

Die Abbildung 9 auf der folgenden Seite stellt die Schätzwerte und die notwendigen Parameter noch einmal übersichtlich dar.

<p>Schätzwerte für den wahren Standardstreufaktor σ_d</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. \hat{s}_{dy} aus \hat{s}_y 2. \check{s}_{dy} aus \check{s}_y 3. \hat{s}_{dx} aus \hat{s}_x 4. \check{s}_{dx} aus \check{s}_x 5. $s_{dx \sqrt{a/b}}$ aus $\sqrt{x_{\text{groß}}/x_{\text{klein}}}$ 6. s_d aus x_{geo} und \bar{x} 	<p>σ_d = „Wahrer“ Standardstreufaktor</p> <p>\hat{s}_{dy} = Schätzwert Standardstreufaktor σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y</p> <p>\check{s}_{dy} = Schätzwert für den Standardstreufaktor σ_d aus maximum likelihood Standardabweichung \check{s}_y</p> <p>\hat{s}_{dx} = Schätzwert Standardstreufaktor σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_x</p> <p>\check{s}_{dx} = Schätzwert für den Standardstreufaktor σ_d aus maximum likelihood Standardabweichung \check{s}_x</p> <p>$s_{d \sqrt{a/b}}$ = Schätzwert für Standardstreufaktor aus $\sqrt{x_{\text{groß}}/x_{\text{klein}}}$ bei $n = 2$</p> <p>s_d = Schätzwert nach Deisenroth für den Standardstreufaktor σ_d nach Abschnitt 2.2.6</p> <p>\hat{s}_y = empirische Standardabweichung</p> <p>\check{s}_y = maximum likelihood Standardabweichung</p> <p>x_{geo} = geometrischer Mittelwert</p> <p>\bar{x} = arithmetischer Mittelwert</p>
---	--

Abbildung 9: Schätzwerte für den Standardstreufaktor σ_d

Die Berechnung dieser 6 Schätzwerte „ s_d “ für den Standardstreufaktor σ_d werden in den Kapiteln 2.2.1 bis 2.2.6 dargestellt.

Bei kleinem Standardstreufaktor ($s_d < 1,3$) und großer Stichprobenzahl ($n > 10$) ergeben alle sechs Methoden in etwa die gleichen Werte. Für kleine Stichproben (z.B. $n = 2$) mit großer Streuung ($s_d > 1,33$) ergeben sich jedoch Unterschiede. In der Abbildung 10 ist ein Vergleich dieser Standardstreufaktoren dargestellt.

Mit dem Standardstreufaktor s_d nach Abschnitt 2.2.6. ergibt sich kein Unterschied zwischen dem Erwartungswert einer Lognormalverteilung und dem arithmetischen Mittelwert der Stichprobe. Dieser Standardstreufaktor s_d nach Abschnitt 2.2.6 wurde als Bezugsgröße herangezogen.

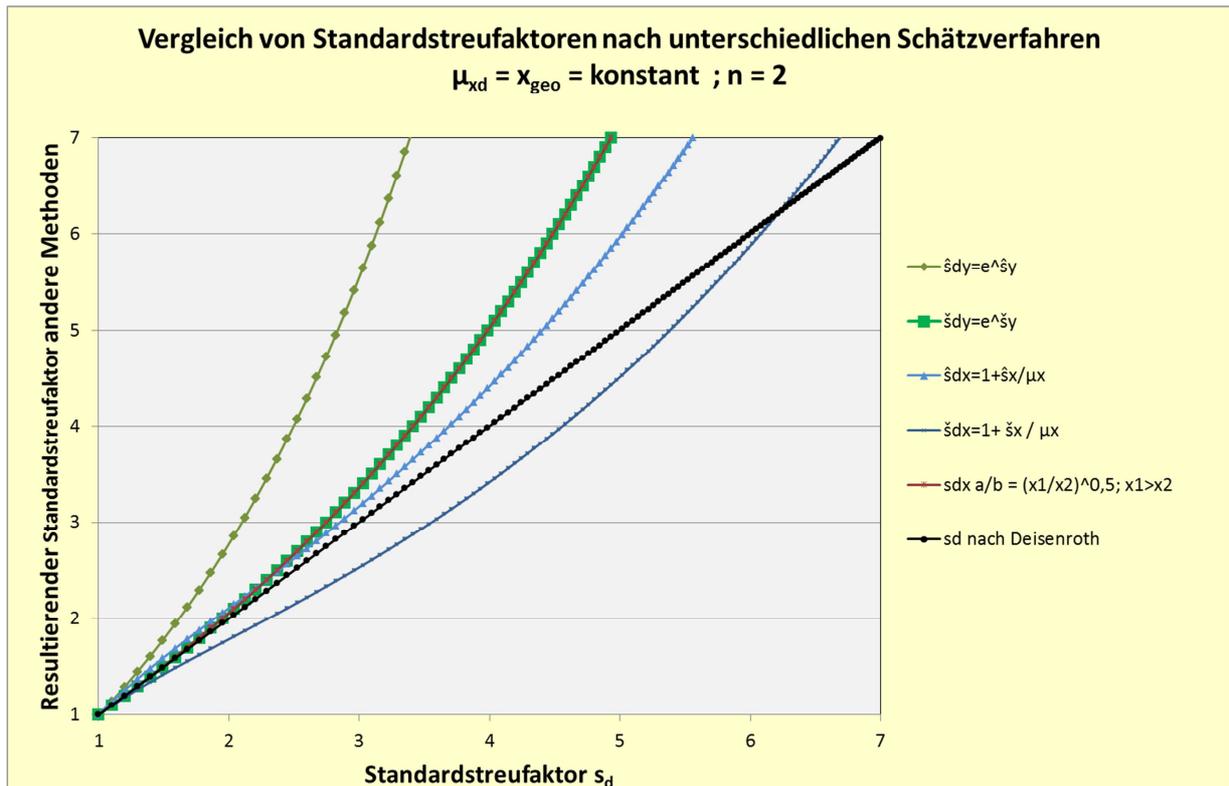


Abbildung 10: Vergleich von Standardstreuferaktoren nach unterschiedlichen Schätzverfahren

2.2.1 Standardstreuferaktors \hat{s}_{dy}

Die Berechnung des Standardstreuferaktors \hat{s}_{dy} ist in „Formel 4“ dargestellt.

<p>Standardstreuferaktors \hat{s}_{dy} aus logtransformierten Werten</p> $\hat{s}_{dy} = e^{\hat{s}_y}$	<p>\hat{s}_{dy} = Schätzwert Standardstreuferaktor σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y</p> $\hat{s}_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ <p>= empirische Standardabweichung y-Ebene y_i = logarithmisch transformierte Werte = $\ln x_i$</p> <p>Beispiel: $x_1 = 83,333$; $x_2 = 120$ $\hat{s}_y = 0,2166$; $x_{geo} = 100$ $\hat{s}_{dy} = e^{\hat{s}_y} = 1,283$ s_d nach Abschnitt 2.2.6 = 1,1994</p>
--	--

Formel 4: Standardstreuferaktor \hat{s}_{dy} aus \hat{s}_y

Die Abbildung 11 stellt den Standardstreudefaktor \hat{s}_{dy} dem Standardstreudefaktor s_d grafisch gegenüber.

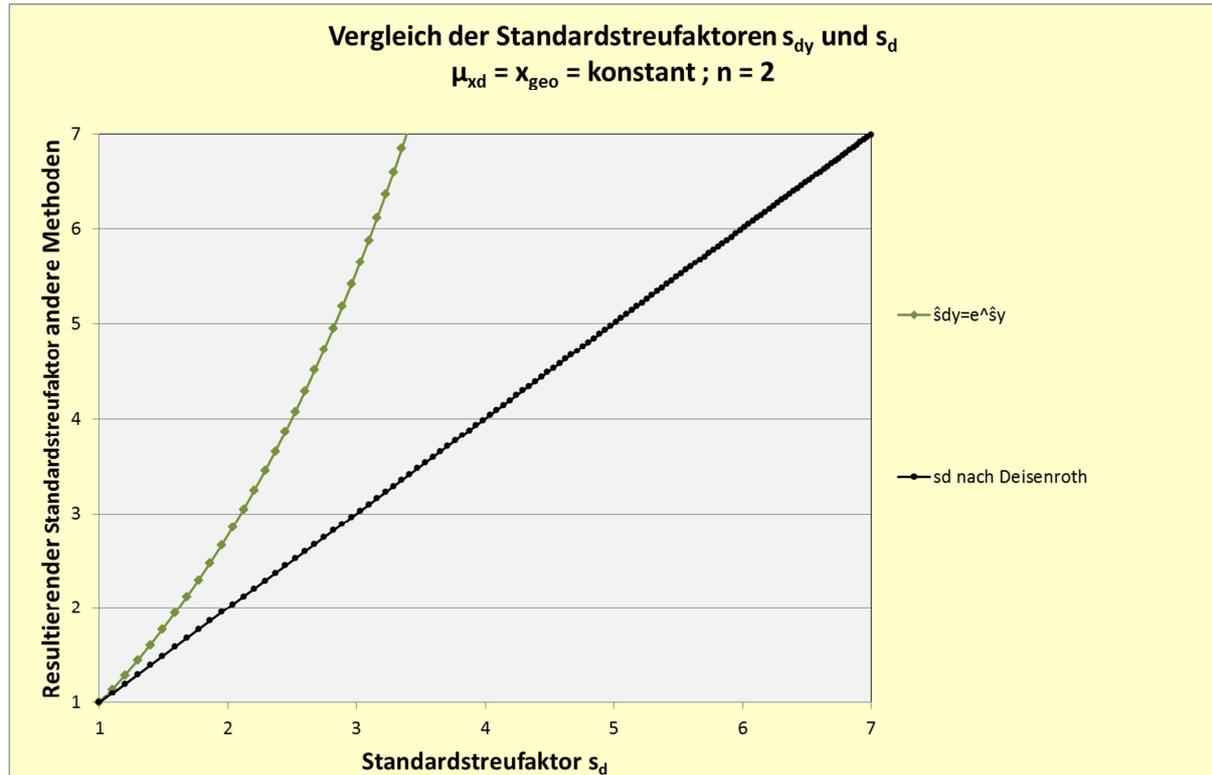


Abbildung 11: Vergleich der Standardstreudefaktoren \hat{s}_{dy} und s_d

Der Schätzer \hat{s}_{dy} aus \hat{s}_y ergibt eine besonders große Abweichung zum Standardstreudefaktor s_d . Hierdurch ergibt sich bei der Berechnung des Erwartungswertes EX für Lognormalverteilungen nach der Formel 5 mit zunehmenden Streufaktor ein deutlich zu hoher Erwartungswert. Der Schätzer \hat{s}_{dy} erscheint daher nicht gut geeignet für die Ermittlung von Konfidenzintervallen aus kleinen Stichproben.

$EX = \theta = e^{\mu_y + \frac{1}{2} \hat{s}_y^2}$ $EX = \theta = e^{\ln x_{geo} + \frac{1}{2} (\ln \hat{s}_{dy})^2}$	<p>EX = θ = Erwartungswert eine Lognormalverteilung</p> <p>μ_y = Median der y-Ebene = $\ln x_{geo}$</p> <p>\hat{s}_y = empirische Standardabweichung y-Ebene</p> <p>x_{geo} = Geometrischer Mittelwert x-Ebene</p> <p>\hat{s}_{dy} = Schätzwert Standardstreudefaktor σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y</p>
--	--

Formel 5: Erwartungswert aus x_{geo} und \hat{s}_{dy}

Bei $n = 3$ wird dieser Effekt etwas abgeschwächt, ist aber immer noch deutlich vorhanden (siehe Abbildung 12).

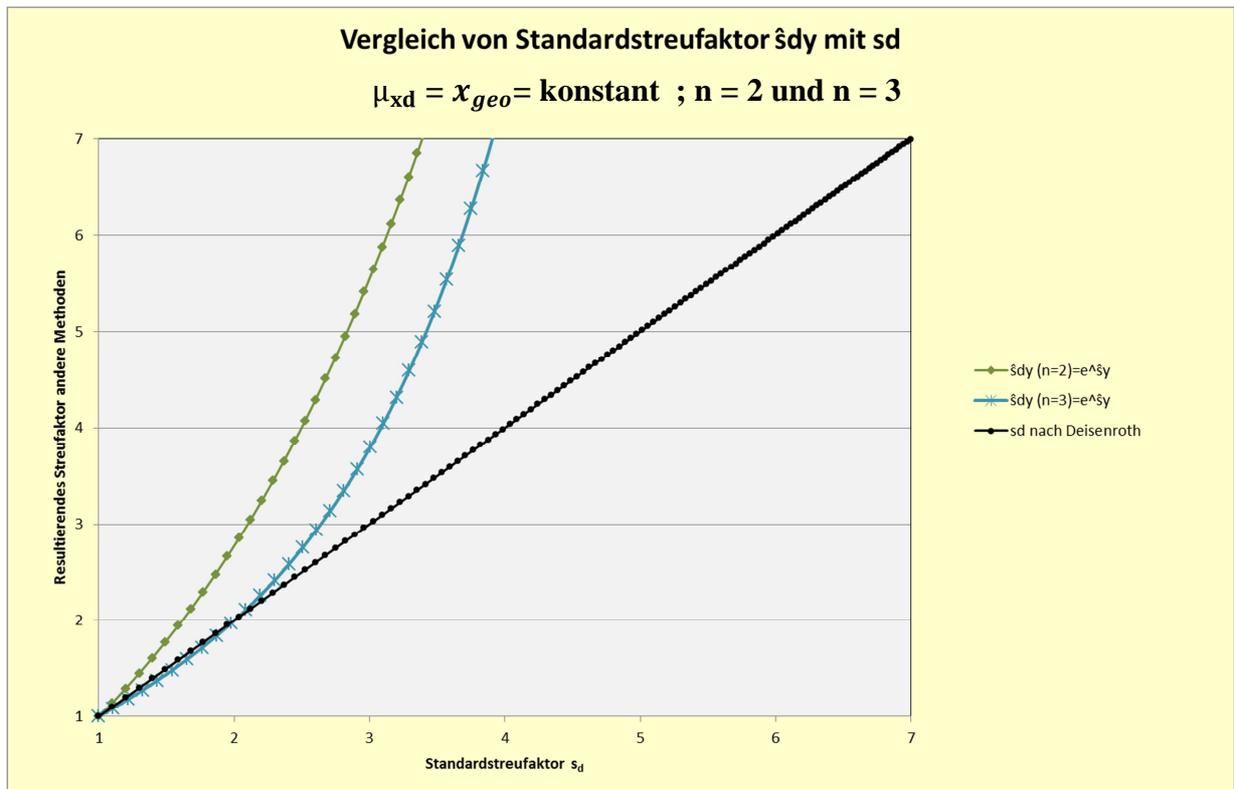


Abbildung 12: Vergleich der Standardstrefaktoren \hat{s}_{dy} und s_d

2.2.2 Standardstrefaktor \check{s}_{dy}

Zur Berechnung der Standardabweichung gibt es zwei alternative Berechnungsmethoden, die in Formel 6 aufgeführt sind.

<p>Alternative Methoden zur Berechnung der Standardabweichung</p> $\hat{s}_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ <p style="text-align: center;">und</p> $\check{s}_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$	<p>\hat{s}_y = empirische Standardabweichung \check{s}_y = maximum likelihood Standardabweichung</p>
--	---

Formel 6: Alternative Methoden zur Berechnung der Standardabweichung

Hieraus ergeben sich unterschiedliche Standardstrefaktoren \hat{s}_{dy} und \check{s}_{dy} (Formel 7 -9).

<p>Standardstrefaktoren \hat{s}_d und \check{s}_d</p> $\hat{s}_{dy} = e^{\hat{s}_y} = 10^{0,1 \cdot \hat{s}_y}$ $\check{s}_{dy} = e^{\check{s}_y} = 10^{0,1 \cdot \check{s}_y}$	<p>\hat{s}_{dy} = empirischer Standardstrefaktor aus \hat{s}_y \check{s}_{dy} = maximum likelihood Standardstrefaktor aus \check{s}_y</p>
--	--

Formel 7: Berechnung der Standardstrefaktoren \hat{s}_{dy} und \check{s}_{dy}

<p>Standardstrefaktoren \check{s}_{dy} mit Beispiel</p> $\check{s}_{dy} = e^{\check{s}_y} = 10^{0,1 \cdot \check{s}_y}$	<p>\hat{s}_{dy} = empirischer Standardstrefaktor aus \hat{s}_y \check{s}_{dy} = maximum likelihood Standardstrefaktor aus \check{s}_y</p> <p>Beispiel: $x_1 = 83,333$; $x_2 = 120$ $\check{s}_y = 0,182$; $x_{geo} = 100$ $\check{s}_{dy} = e^{\check{s}_y} = 1,200$ S_d nach Abschnitt 2.2.6 = 1,1994</p>
--	--

Formel 8: Standardstrefaktoren \check{s}_{dy} mit Beispiel

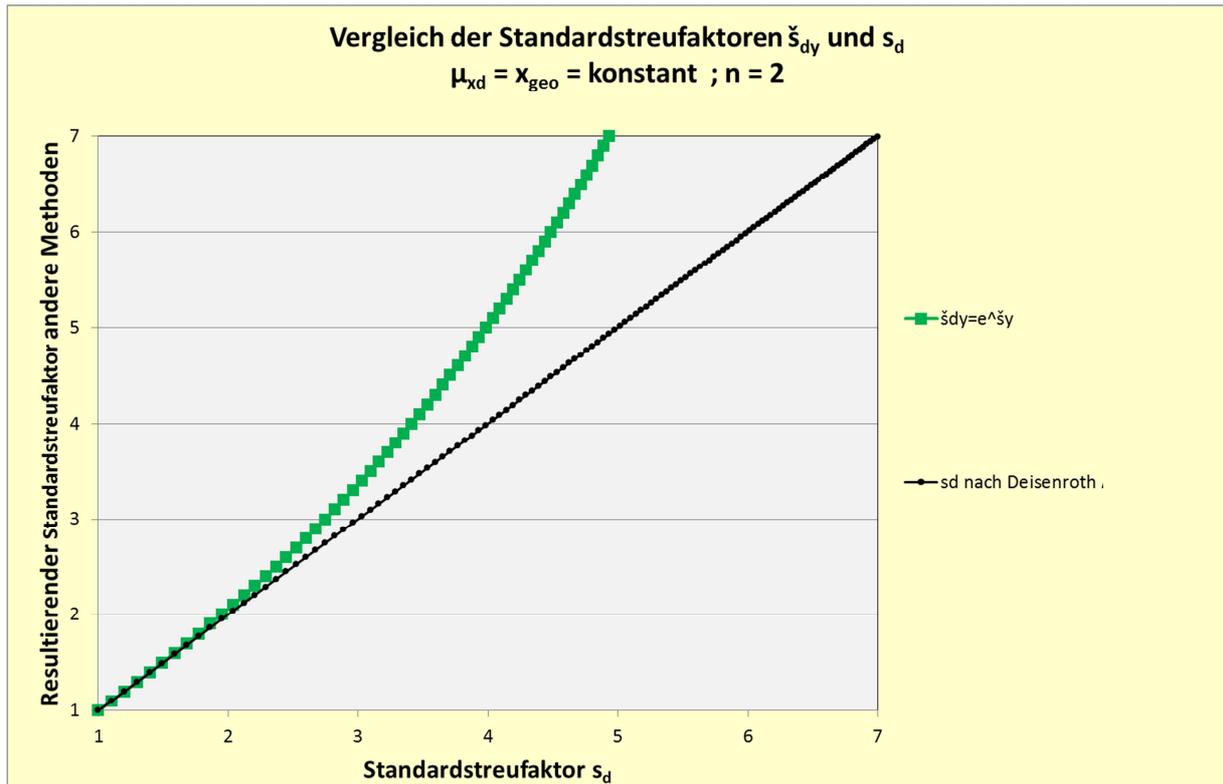


Abbildung 13: Vergleich der Standardstrefaktoren \check{s}_{dy} und s_d

Der Standardstrefaktor \check{s}_{dy} ergibt eine geringere Abweichung zum Standardstrefaktor s_d als der Standardstrefaktor \hat{s}_{dy} . Aber auch hier ergibt sich bei der Berechnung des Erwartungswertes EX nach Formel 9

$EX = \theta = e^{\mu_y + \frac{1}{2} \check{s}_y^2}$ $EX = \theta = e^{\ln x_{geo} + \frac{1}{2} (\ln \check{s}_{dy})^2}$	<p>EX = θ = Erwartungswert eine Lognormalverteilung</p> <p>μ_y = Median der y-Ebene = $\ln x_{geo}$</p> <p>\check{s}_y = maximum likelihood Standardabweichung y-Ebene</p> <p>x_{geo} = Geometrischer Mittelwert x-Ebene</p> <p>\check{s}_{dy} = maximum likelihood Standstrefaktor aus \check{s}_y</p>
--	---

Formel 9: Erwartungswert aus x_{geo} und \check{s}_{dy}

ab einem Standardstrefaktor von ca. > 3 ein zu hoher Erwartungswert.

Der Standardstrefaktor \check{s}_{dy} erscheint daher nicht gut geeignet für die Ermittlung von Konfidenzintervallen aus kleinen Stichproben mit $s_d > 3$.

2.2.3 Standardstrefaktor \hat{s}_{dx}

Bei einer Normalverteilung ($s_d < 1,33$) kann der Standardstrefaktor auch aus dem Variabilitätskoeffizienten $V = \frac{s_x}{\bar{x}} \approx \frac{s_x}{x_{geo}}$ abgeleitet werden. Der Standardstrefaktor entspricht dem Faktor $\hat{s}_{dx} = 1 + \frac{\hat{s}_x}{x_{geo}}$ (Formel 10). Bis zu einem Standardstrefaktor von $s_d = 1,33$ beträgt die Abweichung \hat{s}_{dx}/s_d maximal +5,6%. In Abbildung 14 ist der Verlauf \hat{s}_x und s_d dargestellt.

<p>Berechnung von \hat{s}_d aus \hat{s}_x</p> $\hat{s}_{dx} = 1 + \frac{\hat{s}_x}{x_{geo}} \approx 1 + \frac{s_x}{\bar{x}}$	$\hat{s}_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ <p>= empirische Standardabweichung</p> <p>x_i = untransformierte Stichprobenwerte</p> <p>x_{geo} = Geometrischer Mittelwert</p> <p>\bar{x} = Geometrischer Mittelwert</p> <p>Beispiel: $x_1 = 83,333$; $x_2 = 120$</p> $\hat{s}_x = 25,93; \bar{x} = 101,67; x_{geo} = \mu_{xd} = 100$ $\hat{s}_{dx} = 1 + \frac{25,93}{100} = 1,259$ $s_d \text{ nach Abschnitt 2.2.6} = 1,1994$
--	---

Formel 10: Berechnung von \hat{s}_{dx} aus \hat{s}_x

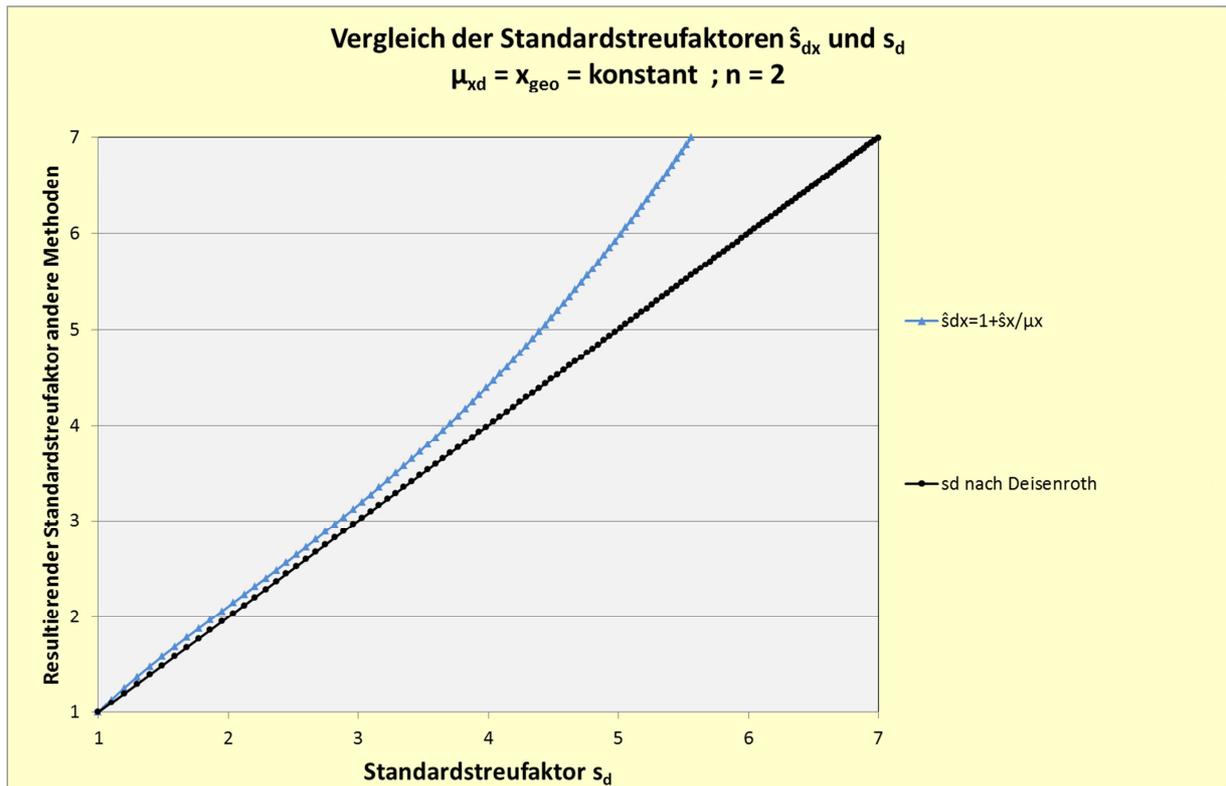


Abbildung 14: Vergleich der Standardstreuferaktoren \hat{s}_{dx} mit s_d

Der Standardstreuferfaktor \hat{s}_{dx} ergibt bis ca. $s_d = 3$ eine geringe Abweichung zum Standardstreuferfaktor s_d . Auch hier ergibt sich bei der Berechnung des Erwartungswertes EX einer Lognormalverteilung nach Formel 11

$EX = \theta = e^{\ln x_{geo} + \frac{1}{2} (\ln \hat{s}_{dx})^2}$	<p>EX = θ = Erwartungswert eine Lognormalverteilung μ_y = Median der y-Ebene = $\ln x_{geo}$ x_{geo} = Geometrischer Mittelwert x-Ebene \hat{s}_{dx} = Schätzwert Standardstreuferfaktor σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y</p>
--	---

Formel 11: Erwartungswert aus x_{geo} und \hat{s}_{dx}

ab einem Streufaktor von ca. > 3 ein zu hoher Erwartungswert.

Der Schätzer \check{s}_{dx} erscheint daher gut geeignet für die Ermittlung von Konfidenzintervallen aus kleinen Stichproben mit $s_d < 3$.

Die gewöhnlich gebrauchte Standardabweichung \hat{s}_x für Normalverteilungen ergibt einen guten Standardstreuferfaktor s_d auch für den Lognormalbereich von $s_d = 1,33$ bis 3.

Bei der Varianzanalyse mit dem χ^2 -Test wird die Streuung um den geometrischen Mittelwert bei konstantem s_d untersucht (siehe Abbildung 15). Die Varianzanalyse mit der Standardabweichung \hat{s}_x ist daher auch für relativ schiefe Verteilungen anwendbar.

<p>Verhältnis $\hat{s}_{x1}/\hat{s}_{x2}$ entspricht x_{geo1}/x_{geo2}</p> $\hat{s}_{dx1} = 1 + \frac{\hat{s}_{x1}}{x_{geo1}}$ $\hat{s}_{dx2} = 1 + \frac{\hat{s}_{x2}}{x_{geo2}}$ <p>Annahme $\hat{s}_{dx1} = \hat{s}_{dx2}$</p> $1 + \frac{\hat{s}_{x1}}{x_{geo1}} = 1 + \frac{\hat{s}_{x2}}{x_{geo2}}$ $\frac{\hat{s}_{x1}}{x_{geo1}} = \frac{\hat{s}_{x2}}{x_{geo2}}$ $\frac{\hat{s}_{x1}}{\hat{s}_{x2}} = \frac{x_{geo1}}{x_{geo2}}$	<p>\hat{s}_{x1} = Standardabweichung Stichprobe 1 \hat{s}_{x2} = Standardabweichung Stichprobe 2 x_{geo1} = Geomittel Stichprobe 1 x_{geo2} = Geomittel Stichprobe 2 Voraussetzung: $\hat{s}_{dx1} = \hat{s}_{dx2}$</p> <p>Schlussfolgerung: Wenn es zutrifft, dass bei einem Hypothesentest zwei Proben mit unterschiedlichem Geomittel den gleichen Standardstreudefaktor s_d haben, ist das Verhältnis von Standardabweichung 1 zu Standardabweichung 2 gleich dem Verhältnis des Geomittel 1 zum Geomittel 2. Dann kann aus den Standardabweichungen bzw. Varianzen auf die Geomittel geschlossen werden. Dies trifft für Normalverteilungen und Lognormalverteilungen bis zu einem Streufaktor von ca. $s_d = 3$ zu.</p>
--	--

Abbildung 15: Verhältnis $\hat{s}_{x1}/\hat{s}_{x2}$ entspricht x_{geo1}/x_{geo2}

2.2.4 Standardstreudefaktor \check{s}_{dx}

Bei einer Normalverteilung ($s_d < 1,33$) kann der Standardstreudefaktor auch aus dem Variabilitätskoeffizienten $V = \frac{\check{s}_x}{\bar{x}} \cong \frac{\check{s}_x}{x_{geo}}$ abgeleitet werden. Der Standardstreudefaktor entspricht in etwa dem Faktor $\check{s}_d = 1 + \frac{\check{s}_x}{x_{geo}}$ (Formel 12).

Bis zu einem Standardstreudefaktor von $s_d = 1,33$ beträgt die Abweichung \check{s}_{dx}/s_d maximal -3% (Abbildung 16).

<p>Berechnung von \check{s}_d aus \check{s}_x</p> $\check{s}_{dx} = 1 + \frac{\check{s}_x}{x_{geo}}$	$\check{s}_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ <p>= empirische Standardabweichung</p> <p>x_i = untransformierte Stichprobenwerte</p> <p>x_{geo} = Geometrischer Mittelwert</p> <p>Beispiel: $x_1 = 83,333$; $x_2 = 120$</p> $\check{s}_x = 18,335; \bar{x} = 101,67; x_{geo} = \mu_x = 100$ $\check{s}_{dx} = 1 + \frac{18,335}{100} = 1,18335$ <p>s_d nach Abschnitt 2.2.6 = 1,1994</p>
--	---

Formel 12: Berechnung von \hat{s}_d aus \hat{s}_x

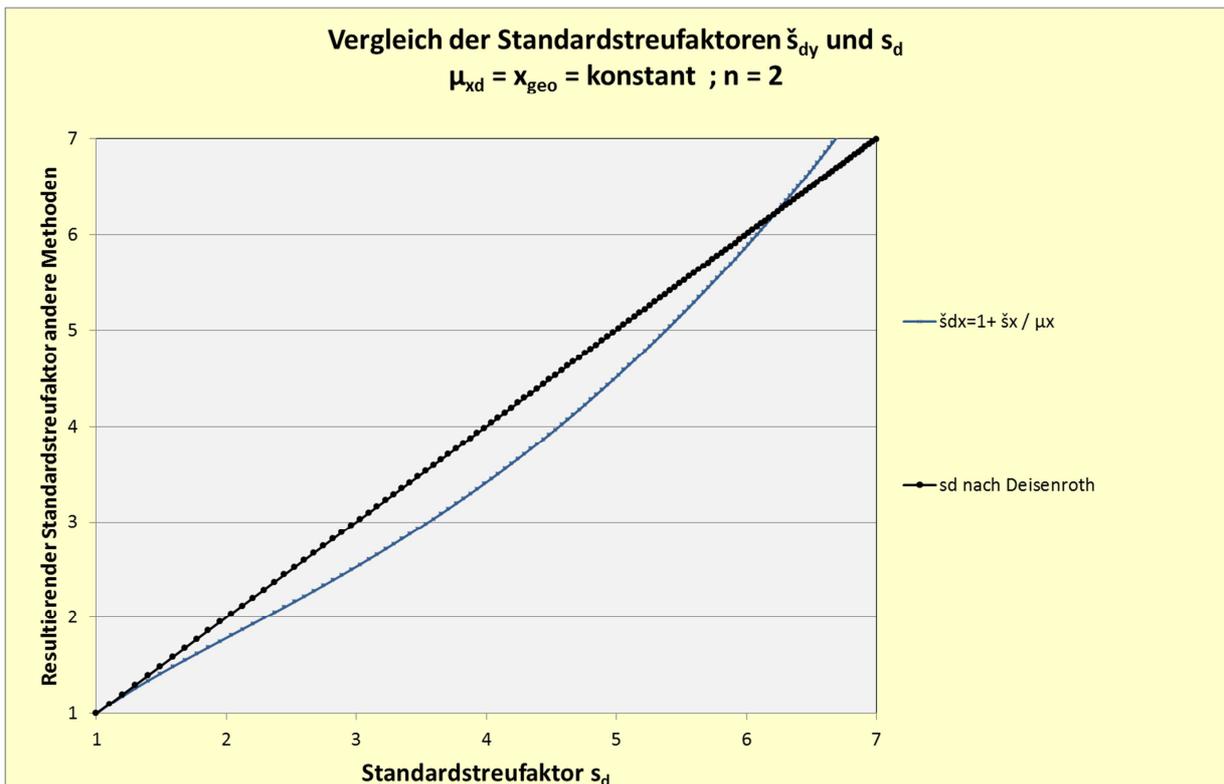


Abbildung 16: Vergleich von \check{s}_{dx} mit s_d

Der Standardstreuferfaktor \check{s}_{dx} ergibt eine geringe Abweichung zum Standardstreuferfaktor s_d bis ca. $s_d = 7$. Auch hier ergibt sich bei der Berechnung des Erwartungswertes EX einer Lognormalverteilung nach Formel 13

$EX = \theta = e^{\ln x_{geo} + \frac{1}{2} (\ln \check{s}_{dx})^2}$	<p>EX = θ = Erwartungswert eine Lognormalverteilung</p> <p>μ_y = Median der y-Ebene = $\ln x_{geo}$</p> <p>x_{geo} = Geometrischer Mittelwert x-Ebene</p> <p>\check{s}_{dx} = maximum likelihood Standardstreuung aus \check{s}_x</p>
--	--

Formel 13: Erwartungswert aus x_{geo} und \check{s}_{dx}

ab einem Streufaktor > 7 ein zu hoher Erwartungswert.

Der Standardstreuung \check{s}_{dx} erscheint daher gut geeignet für die Ermittlung von Konfidenzintervallen aus kleinen Stichproben bis ca. $s_d = 7$.

2.2.5 Standardstreuung $s_{dx \sqrt{a/b}}$

Bei einer Normalverteilung ($s_d < 1,33$) kann der Standardstreuung auch aus der Wurzel des Quotienten $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ mit $x_1 > x_2$ einer Stichprobe mit $n = 2$ abgeleitet werden (Formel 14).

Bis zu einem Standardstreuung von $s_d = 1,33$ beträgt die Abweichung maximal 0,2 % zum Standardstreuung s_d nach Abschnitt 2.2.6 (Abbildung 17).

<p>Berechnung von $s_{dx \sqrt{a/b}}$</p> $s_{dx \sqrt{a/b}} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad ; \quad x_1 > x_2$	<p>$s_{dx \sqrt{a/b}}$ = Schätzwert für Standardstreuung aus Quotient $\sqrt{x_{gro\beta}/x_{klein}}$ bei $n = 2$</p> <p>Beispiel:</p> <p>$x_1 = 83,333$; $x_2 = 120$</p> <p>$x_{geo} = \mu_x = 100$</p> <p>$s_{dx \sqrt{a/b}} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad ; \quad x_1 > x_2$</p> $s_{dx \sqrt{a/b}} = \sqrt{\frac{120}{83,33}}$ <p>$s_{dx \sqrt{a/b}} = 1,2000024$</p> <p>$s_d$ nach Abschnitt 2.2.6 = 1,1994</p>
---	--

Formel 14: $s_{dx \sqrt{a/b}}$ aus Quotient $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ für $n = 2$

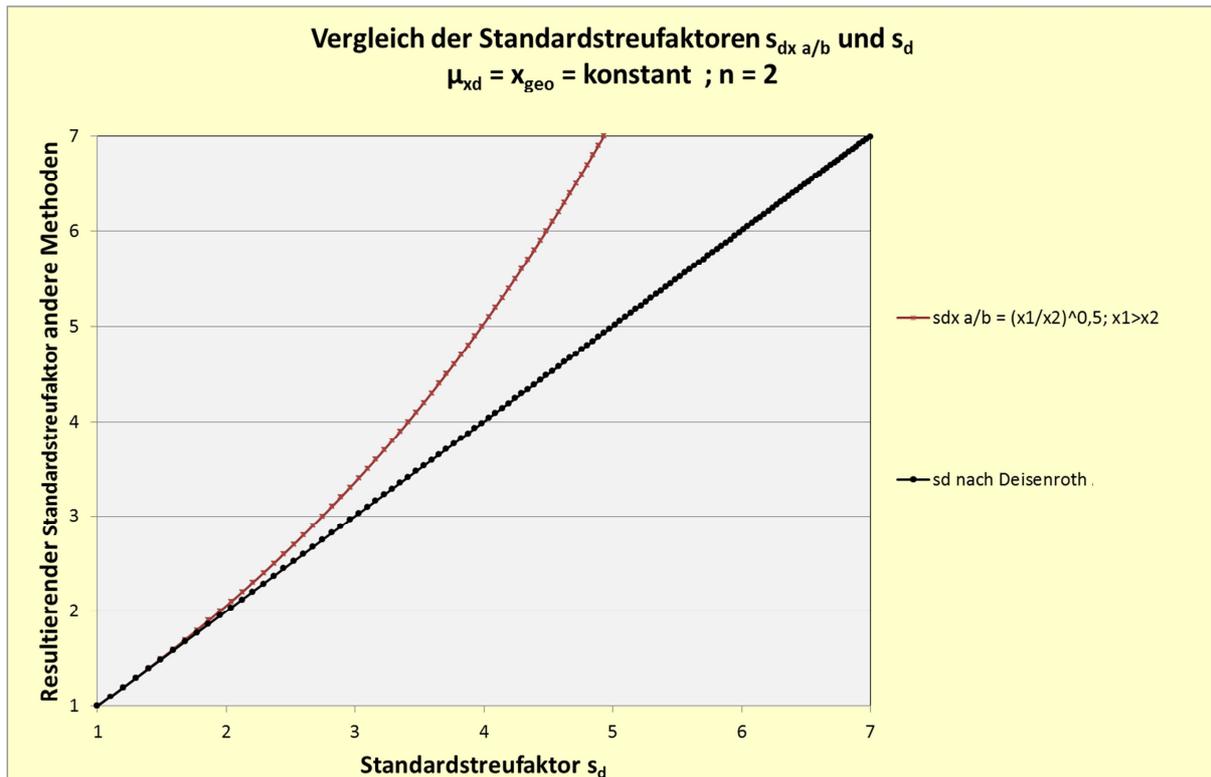


Abbildung 17: Vergleich der Standardstreuferaktoren $s_{dx \sqrt{a/b}}$ und s_d

Der Standardstreuferfaktor $s_{d \sqrt{a/b}}$ ergibt einen guten Schätzer für den Standardstreuferfaktor σ_d bis zu ca. $s_d = 3$. Auch hier ergibt sich bei der Berechnung des Erwartungswertes EX einer Lognormalverteilung nach der Formel

$EX = \theta = e^{\ln x_{geo} + \frac{1}{2} (\ln s_{dx \sqrt{a/b}})^2}$	<p>EX = θ = Erwartungswert eine Lognormalverteilung μ_y = Median der y-Ebene = $\ln x_{geo}$ x_{geo} = Geometrischer Mittelwert x-Ebene $s_{dx \sqrt{a/b}}$ = Schätzwert für Standardstreuferfaktor aus Quotient $\sqrt{x_{gro\beta}/x_{klein}}$ bei $n = 2$</p>
---	--

Formel 15: Erwartungswert aus x_{geo} und $s_{dx \sqrt{a/b}}$

ab einem Streufaktor von ca. >3 ein zu hoher Erwartungswert im Vergleich zum arithmetischen Mittelwert \bar{x} der Ausgangswerte.

Der Standardstreuferfaktor $s_{d \sqrt{a/b}}$ erscheint daher gut geeignet für die Ermittlung von Konfidenzintervallen aus kleinen Stichproben bis ca. $s_d < 3$.

2.2.6 Standardstrefaktor s_d

Im Verlauf der Untersuchungen wurde beobachtet, dass sich bei Anwendung der Formeln für den Erwartungswert EX einer Lognormalverteilung aus \hat{s}_y und \check{s}_y unterschiedliche Erwartungswerte ergeben. Ein Beispiel für die Berechnung der unterschiedlichen Erwartungswerte ist in Abbildung 18 dargestellt.

<p>Beispiel:</p> $x_1 = 0,25 ; x_2 = 1 ; x_3 = 4$ $EX = e^{\bar{y} + \frac{1}{2} \cdot s_y^2}$ $EX1 = e^{\bar{y} + \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_y^2} = 2,6$ $EX2 = e^{\bar{y} + \frac{1}{2} \cdot \check{s}_y^2} = 1,86$ $x_{geo} = 1$ $\bar{x} = 1,75$	<p>$EX =$ Erwartungswert Lognormalvert. $EX1 =$ Erwartungswert mit \hat{s}_y $EX2 =$ Erwartungswert mit \check{s}_y $\bar{x} =$ Arithmetischer Mittelwert = 1,75 $x_{geo} =$ Geometrischer Mittelwert $\cong \mu_{xd} = 1$</p>
--	--

Abbildung 18: Beispiel für die Berechnung unterschiedlicher Erwartungswerte

Ein erwartungstreuer Schätzer müsste einen Erwartungswert in Höhe des arithmetischen Mittelwertes von $\bar{x} = 1,75$ ergeben. Der Streufaktor \hat{s}_y ergibt hier einen Unterschied von 85% bezogen auf den geometrischen Mittelwert x_{geo} . Der Streufaktor \check{s}_y ergibt nur einen geringen Unterschied von 11% bezogen auf den geometrischen Mittelwert x_{geo} .

Daraus wurde geschlossen, dass ein Schätzwert für den Standardstrefaktor σ_d auch mit Hilfe des geometrischen und arithmetischen Mittelwertes einer Stichprobe berechnet werden kann (Formel 16).

<p>Berechnung des Streufaktors s_d aus dem geometrischen und arithmetischen Mittelwert</p> $s_d = e^{\sqrt{2 \ln \frac{\bar{x}}{x_{geo}}}}$	<p>$s_d =$ Standardstrefaktor nach Deisenroth $\bar{x} =$ arithmetischer Mittelwert $x_{geo} =$ Geometrischer Mittelwert</p>
--	---

Formel 16: Berechnung des Standardstrefaktors s_d

Mit diesem Standardstreuungsfaktor s_d ergibt sich ein Erwartungswert in Höhe des arithmetischen Mittelwerts. Auch die empirische Standardabweichung \hat{s}_x kann aus dem Streufaktor s_d berechnet werden (Formel 17).

<p>Berechnung von \hat{s}_x aus s_d</p> $s_d \approx 1 + \frac{\hat{s}_x}{\bar{x}}$ $\hat{s}_x \approx (s_d - 1) \bar{x}$	<p>Beispiel: $x_1 = 83,333$; $x_2 = 120$</p> $\check{s}_x = 18,335; \bar{x} = 101,67; x_{geo} = \mu_{xd} = 100$ $s_d = e^{\sqrt{2 \ln \frac{\bar{x}}{x_{geo}}}} = 1,1994$ $\hat{s}_x \approx (s_d - 1) * 100 \approx 19,94$
---	---

Formel 17: Faustformel zur Berechnung von \hat{s}_x aus \hat{s}_d

Die Ableitung der Formel für s_d aus dem geometrischen und dem arithmetischen Mittelwert erfolgte aus der Formel für die Berechnung des Erwartungswertes für Lognormalverteilungen (Formel 18).

Der Erwartungswert ist der arithmetische Mittelwert \bar{x} der Ausgangswerte. Dieser Wert entspricht bei Lärmmessungen, dem energieäquivalenten Mittelwert L_{eq} . Dem geometrischen Mittelwert der Ausgangswerte entspricht $x_{geo} = e^{\mu_y} = e^{\ln x_{geo}}$.

<p>Ableitung des Streufaktors s_d aus dem Erwartungswert einer Lognormalverteilung</p> $EX = e^{\mu_y + \frac{1}{2} s_y^2}$ $EX = \bar{x}$ $\bar{x} = e^{\mu_y + \frac{1}{2} s_y^2}$ $\bar{x} = e^{\ln x_{geo} + \frac{1}{2} s_y^2}$ $\bar{x} = x_{geo} * e^{\frac{1}{2} s_y^2}$ $\frac{\bar{x}}{x_{geo}} = e^{\frac{1}{2} s_y^2}$ $\ln \frac{\bar{x}}{x_{geo}} = \frac{1}{2} s_y^2$ $s_y^2 = 2 \ln \frac{\bar{x}}{x_{geo}}$ $s_y^2 = (\ln s_d)^2$ $\ln s_d = \sqrt{2 \ln \frac{\bar{x}}{x_{geo}}}$ $s_d = e^{\sqrt{2 \ln \frac{\bar{x}}{x_{geo}}}}$	<p>s_d = Standardstreufoaktor nach Deisenroth</p> <p>\bar{x} = Arithmetischer Mittelwert</p> <p>x_{geo} = Geometrischer Mittelwert</p> <p>EX = Erwartungswert einer Lognormalverteilung</p> <p>s_y = Standardabweichung logtransformierter Werte</p>
--	---

Formel 18: Ableitung des Standardstreufoaktors s_d

3. Vergleich der Streufaktoren von DIN 45645 und ISO 9612

Das Verfahren der DIN 45645 entspricht einem t-Test angewandt auf Dezibel-Messwerte. Im Ergebnis wurde in der DIN 45645 ein Log-t-Test zur Bestimmung des $L_{UCL95\%}$ durchgeführt.

Die ISO 9612 nutzt für die Berechnung der Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$ ein Verfahren nach C.E. Land aus dem Jahre 1973 [4].

Der Land-Test wird in der ISO 9612 nicht direkt erwähnt, sondern er ergibt sich durch Anwendung der „Streufaktoren“ der Tabelle C.4 und dem nachfolgenden Rechenschnitt (Multiplikation mit dem Faktor 1,65) zur „Erweiterten Messunsicherheit U“. Die Tabellenwerte selbst sind mit „Unsicherheitsbeiträge $c1 \cdot u1$ für Messwerte“ benannt. Erst aus den Literaturhinweisen der ISO 9612 ergibt sich der statistische Hintergrund [4]; [5]; [6].

In Abschnitt 6 wird der Land-Test und die DIN EN ISO 9612 näher beschrieben. Die Tabelle C.4 der ISO 9612 und die daraus resultierenden Streufaktoren sind als Anlage 3 beigefügt.

Bei einer Stichprobe mit $n = 3$ und einem Standardstreuungsfaktor von $\hat{s}_{dy \text{ in } dB} = 6 \text{ dB}_{(-)}$ ergeben sich folgende Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ zur Bildung des $L_{UCL95\%}$.

$$SF_{UCL95\% \text{ DIN } 45645; n=3; \hat{s}_{dy \text{ in } dB=6} = 10,1 \text{ dB}_{(-)} = 10^{1,01}$$

$$SF_{UCL95\% \text{ ISO } 9612; n=3; \hat{s}_{dy \text{ in } dB=6} = 76,7 \text{ dB}_{(-)} = 10^{7,67}$$

Es ergibt sich eine Differenz des Streufaktors von $SF_{UCL95\% \text{ Differenz alt-neu}} = 66,6 \text{ dB}_{(-)}$.

Abbildung 19 zeigt einen Streufaktorvergleich der neuen und der alten Norm. In Tabelle 2 ist die Differenz der Streufaktoren in $\text{dB}_{(-)}$ und linear dargestellt.

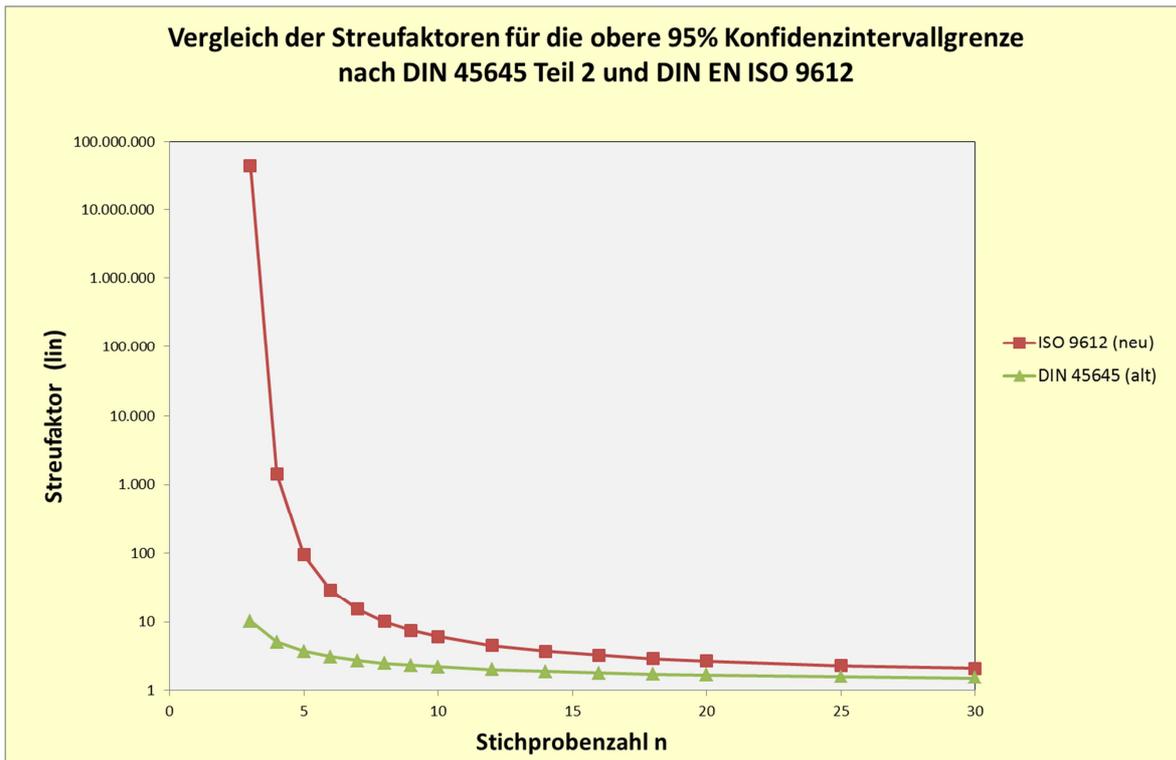


Abbildung 19: $SF_{UCL95\%}$ nach DIN 45645 und ISO 9612 bei $\hat{s}_{dy} = 6 \text{ dB}_{(-)} = 4$

Stichprobenzahl n	Differenz der Streufaktoren in $\text{dB}_{(-)}$	Differenz der Streufaktoren „linear“
3	66,61	4581424,26
4	24,62	289,73
5	14,24	26,57
6	9,75	9,44
7	7,47	5,59
8	6,05	4,02
9	5,19	3,30
10	4,44	2,78
12	3,49	2,23
14	2,94	1,97
16	2,65	1,84
18	2,32	1,71
20	1,97	1,57
25	1,74	1,49
30	1,44	1,39

Tabelle 2: Differenz der Streufaktoren von DIN 45645 und ISO 9612 bei $\hat{s}_{dy} = 6 \text{ dB}_{(-)} = 4$

4. Vorgehensweise und Methoden

Beim Vergleich der Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ der DIN 45645 (alt) und der ISO 9612 (neu) fällt auf, dass die neue Norm erheblich größere Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ ausweist als die alte Norm (Abbildung 19).

Die Streufaktoren der neuen Norm liegen bei kleinen Stichproben um mehrere Zehnerpotenzen über den Streufaktoren der DIN 45645 bzw. dem Log-t-Test (Tabelle 2).

Es stellte sich die Frage, ob die Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ der neuen Norm nicht deutlich zu groß sind und weit von der Realität abweichen.

Es wurde auch vermutet, dass bei der Erstellung der ISO 9612 ein Fehler beim Rechnen mit dB-Werten erfolgte. Da dB-Werte logarithmierte Verhältniszahlen darstellen, sind hier Fehler denkbar.

Zur Aufklärung der großen Differenzen der Streufaktoren zwischen alter und neuer Norm wurden folgende Hypothesen aufgestellt und geprüft:

Hypothese 1: Rechenfehler dB-Werte

Bei der Erstellung der ISO 9612 sind Fehler beim Umrechnen linearer Werte in dB-Werte unterlaufen.

Hypothese 2: Fehlerhafter Land-Test

Die Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ der ISO 9612 bzw. des Land-Test sind unrealistisch hoch.

Hypothese 3: Normalverteilungstests sind auch für dB-Werte geeignet

Der Gauß-Test, der t-Test und modifizierte χ -Tests (d1-Test, d2-Test und dt-Test) sind auch zur Ermittlung der Unsicherheit von dB-Messwerten bzw. für Stichproben aus Lognormalverteilungen geeignet.

4.1 Methoden zum Testen von Hypothese 1: „Rechenfehler dB-Werte“

Durch Recherche der in ISO 9612 genannten Literatur ist erkennbar, dass sich hinter Tabelle C.4 der ISO 9612 der Land-Test verbirgt [5].

Ein direkter Vergleich der Streufaktoren von ISO 9612 [2] und des Land-Tests [4] ist nicht möglich, da die Streufaktoren in unterschiedlichen Transformationen und Umrechnungen vorliegen und die Rasterung in der Originalliteratur nicht der Rasterung der ISO entspricht. Die Übertragung des Land-Tests auf das Gebiet der Akustik wird in [6] beschrieben.

Zur Berechnung von Werten zwischen der Rasterung des Land-Tests und der ISO 9612 wurden Excel-Arbeitsblätter (Anlage 3) des Louisiana Department of Environmental Quality herangezogen [19].

In Abschnitt 5 „Messungen in dB“ wird die Berechnung von dB-Werten auf dem Gebiet der Akustik dargestellt.

In Abschnitt 6 „Land-Test“ wird die Berechnung der Unsicherheit nach Land auf das Gebiet der Akustik übertragen und mit der ISO 9612 verglichen.

4.2 Methoden zum Testen von Hypothese 2: „Fehlerhafter Land-Test“

Um mögliche Fehlerursachen in der DIN EN ISO 9612 bzw. im Land-Test zu untersuchen, wurden Excel-Arbeitsroutinen zur Simulation von Zufallsexperimenten mit Stichproben aus normalverteilten Messwerten in dB und lognormalverteilten linearen Messwerten erstellt und die Ergebnisse mit den Angaben der ISO 9612 verglichen.

Die Durchführung, die Darstellung und die Auswertung solcher Zufallsexperimente wird auch Monte-Carlo-Simulation genannt [16].

Der Name Monte Carlo-Simulation beruht auf der Tatsache, dass während der Entwicklung der Atombombe in den 1930er und 1940er Jahre viele Computer-Simulationen durchgeführt wurden, um die Wahrscheinlichkeit von Kettenreaktionen bei der Kernspaltung zu schätzen. Die an dieser Arbeit beteiligten Physiker waren große Anhänger des Glücksspiels. So gaben sie den Simulationen den Code-Namen „Monte Carlo“ nach dem berühmten Ort mit einer Glücksspielbank [16].

In der Anlage 1 „Erstellung von Monte-Carlo-Simulationen mit Excel“ wird die Durchführung, die Darstellung und die Auswertung solcher Zufallsexperimente an Beispielen erläutert.

In Abschnitt 7 werden die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen mit dB-Werten im Vergleich zur ISO 0612 bzw. zum Land-Test gezeigt.

Bei den Ersten Simulationen wurde fälschlicherweise davon ausgegangen, dass der „wahre Standardstreuungsfaktor σ_d “ maximal $6 \text{ dB}_{(-)}$ beträgt. Hierbei treten nur relativ kleine Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ auf. Um den vermuteten Fehler der ISO 9612 quantifizieren zu können, wurden Untersuchungen zum Einfluss des Standardstreuungsfaktor σ_d bzw. dessen Schätzwerte s_d durchgeführt, die in Abschnitt 2 bereits aufgeführt wurden.

Weiter Simulationen in Abschnitt 7 zeigen mögliche Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$, wenn der „wahre Standardstreuungsfaktor σ_d “ sehr groß ist ($\gg 6 \text{ dB}_{(-)}$).

4.3 Methoden zum Testen von Hypothese 3: „Normalverteilungstests für dB“

Die DIN 45645 nutzte den t-Test für dB-Messungen (L_i in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$). Hierdurch wurde ein Log-t-Test für die linearen Ausgangsdaten (x_i in pW/m^2) durchgeführt.

Die Simulationsexperimente aus Abschnitt 4.2 ergaben gewisse Ähnlichkeiten beim Streuverhalten von Normal- und Lognormalverteilungen (siehe Streufaktordiagramme in Abschnitt 10).

Es wurde vermutet, dass sich mit Hilfe des Streufaktormodells nach Limpert [9] Normalverteilungstests auch auf Lognormalverteilungen bzw. dB-Messwerte übertragen lassen.

In Abschnitt 8 „Stichprobentests“ werden verschiedene Stichprobentests über den Standardstreuungsfaktor s_d dargestellt.

In Abschnitt 9 „Vergleich“ werden verschiedene Stichprobentests miteinander verglichen.

In Abschnitt 10 sind Streufaktordiagramme von Normal- und Lognormalverteilungen mit verschiedenen Simulationen von Zufallsexperimenten aus solchen Verteilungen dargestellt, die Rückschlüsse auf die Anwendbarkeit von statistischen Tests auf normalverteilte dB-Messwerte (L_i in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$) und lognormalverteilte lineare Messwerte (x_i in pW/m^2) zulassen.

Es wurden Streufaktordiagramme u.a. zur Summenhäufigkeit des Streufaktors s_d und der Summenhäufigkeit von x_{geo} bei Simulationsexperimenten dargestellt und untereinander als auch mit den entsprechenden Werten des t-Tests und von modifizierten χ^2 -Tests (d1-Test, d2-Test und dt-Test) verglichen.

5. Messungen in Dezibel

Als Besonderheit auf dem Gebiet der Akustik werden die Messwerte L_i in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ angegeben. Solche Dezibel-Werte sind logarithmisch transformierte Faktoren zum Referenzpunkt $x_0 = 1\ pW/m^2$.

Die Standardabweichung \hat{s}_{dy} sowie die Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ werden in $dB_{(-)}$ angegeben. Solche Dezibel-Werte sind logarithmisch transformierte Faktoren zum Referenzpunkt $x_0 = 1$.

Die Tatsache der unterschiedlichen Referenzpunkte für diese Dezibel-Werte wird häufig nicht explizit ausgedrückt, sondern es wird nur mit dB-Werten gearbeitet.

Die logarithmisch transformierten dB-Werte erleichtern den praktischen Umgang mit großen Zahlen. Die Multiplikation von linearen Messwerten kann durch die Addition von dB-Werten ersetzt werden. Für die „echte“ Addition von dB-Werten nutzen Praktiker häufig Faustformeln (Abschnitt 5.5).

5.1 Allgemeine Berechnung von dB-Werten

Dezibel-Werte sind mit dem Faktor 10 multiplizierte logarithmisch transformierte Verhältnisse oder logarithmisch transformierte Faktoren (Formel 19).

$y_i = 10 \log \left(\frac{x_i}{x_0} \right) \quad [dB_{re\ x_0}]$ $y_i = 10 \log(F) \quad [dB_{(-)}]$ <p style="text-align: center;">Umkehrung</p> $\frac{x_i}{x_0} = 10^{0,1 \cdot y_i}$ $F = 10^{0,1 \cdot y_i}$	$y_i =$ logarithmisch transformiertes Verhältnismaß $\frac{x_i}{x_0}$ in dB $\frac{x_i}{x_0} =$ lineares Verhältnismaß der Stichprobe $i = 1 \dots n$ $F =$ Faktor allgemein $n =$ Stichprobenzahl $i = 1 \dots n$ $x_i =$ Energetische Messwerte $i = 1 \dots n$, z.B. $x_1 = 100\ pW/m^2$ $x_0 =$ Energetische Bezugsgröße z.B. Hörschwelle $I_0 = 1\ pW/m^2$ Beispiel: $y_i = 10 \log \left(\frac{100\ pW/m^2}{1\ pW/m^2} \right) = 10 \log(100) = 20\ dB$ $\frac{x_i}{x_0} = 10^{0,1 \cdot y_i} = 10^{0,1 \cdot 20} = 100$ $x_i = 10^{0,1 \cdot y_i} \cdot x_0 = 10^{0,1 \cdot 20} \cdot 1\ pW/m^2 = 100\ pW/m^2$
--	--

Formel 19: Allgemeine Berechnung von dB-Werten

Das Dezibel drückt nicht immer eine physikalische Größe L_i in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ aus, sondern ist allgemein die Angabe eines Faktors einer Größe zu einer Bezugsgröße. Auch der Faktor zwischen zwei energetischen Größen kann in Dezibel ($dB_{(-)}$) ausgedrückt werden.

Bei Anwendung der Formeln für den t-Test auf dB-Messwerte L_i in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ wird im Ergebnis eine Log-t-Test für die Verhältnismaße $\frac{x_i}{x_o}$ bzw. die Messwerte x_i in pW/m^2 erhalten.

In dieser Arbeit wird allgemein für logarithmierte Größen das Symbol „y“ und für lineare Größen das Symbol „x“ verwendet. Werte in dB sind je nach Betrachtung lineare Werte, ausgedrückt in dB, oder logarithmische Größen (beim Rechnen mit dB-Werten).

5.2 Berechnung von Schalldruckpegeln in Dezibel

Bei Lärmmessungen am Arbeitsplatz bezeichnet der Schalldruckpegel in Dezibel das 10-fache des dekadischen Logarithmus eines Schallintensitätsverhältnisses oder das 10-fache des dekadischen Logarithmus eines quadrierten Schalldruckverhältnisses (Formel 20).

$L = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{p_1^2}{p_0^2}$	<p>$L =$ Schallpegel in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ oder $dB_{re\ 20\ \mu Pa}$</p> <p>$I_1 =$ Schallintensität in $\frac{W}{m^2}$</p> <p>$I_0 =$ Bezugsschallintensität in $\frac{W}{m^2} = 10^{-12} W/m^2$</p> <p>$p_1 =$ Schalldruck in Pa</p> <p>$p_0 =$ Bezugsschalldruck in Pa = $20 \cdot 10^{-6} Pa = 20\ \mu Pa$</p>
---	---

Formel 20: Berechnung von dB-Lärmmesswerten im Arbeitsschutz

Der Schallpegel L ist daher immer proportional zur Schallenergie. Durch die Wahl der Bezugsgrößen ergibt sich immer der gleiche dB-Wert, egal ob man zur Berechnung die Schallintensität oder den Schalldruck heranzieht. Da die Schallpegelmesser den Schalldruck messen, wird allgemein vom Schalldruckpegel L_p (engl. sound pressure level) gesprochen.

5.3 Berechnung des geometrischen Mittelwertes von dB-Werten

Durch das Logarithmieren energetischer Messgrößen (z.B. der Schallintensität I in W/m^2) entspricht der arithmetische Mittelwert der dB-Werte \bar{L} dem geometrischen Mittelwert I_{geo} der Ausgangsmesswerte (Formel 21).

$\bar{L} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n L_1 + L_2 \dots L_n$ $= 10 \cdot \log \frac{\sqrt[n]{I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_n}}{I_0}$ $= 10 \cdot \log \frac{I_{geo}}{I_0}$	<p>\bar{L} = arithmetischer Mittelwert von $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ – Werten = geometrischer Mittelwert der Ausgangswerte in dB L_i = Schallpegel $i = 1 \dots n$ in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ I_i = Schallintensität $i = 1 \dots n$ in W/m^2 I_{geo} = geometrischer Mittelwert der Schallintensitäten $1 \dots n$ I_0 = Bezugsschallintensität = $1\ pW/m^2$</p>
--	---

Formel 21: Berechnung des geometrischen Mittelwertes von dB-Messwerten

5.4 Berechnung des arithmetischen Mittelwertes von dB-Werten

Das korrekte Rechnen mit dB-Werten erfordert jeweils die Umwandlung der dB-Werte in die linearen Ausgangsgrößen bzw. die linearen Ausgangsverhältnisse und das Umwandeln des Ergebnisses in dB-Werte. In der unten abgebildeten Formel 4 sind diese beiden Schritte zusammengefasst.

Der arithmetische Mittelwert \bar{L} der Ausgangswerte entspricht dem energetischen Mittelwert L_{eq} in dB (Formel 22).

$L_{eq} = 10 \cdot \log \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 10^{0,1 \cdot L_1} + 10^{0,1 \cdot L_2} + \dots + 10^{0,1 \cdot L_n} \right]$ $= 10 \cdot \log \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n I_1 + I_2 \dots I_n}{I_0}$ $= 10 \cdot \log \frac{\bar{L}}{I_0}$	<p>L_{eq} = energieäquivalenter Mittelwert von $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ – Werten = arithmetischer Mittelwert der energetischen Ausgangsmesswerte in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ L_i = Schallpegel $i = 1 \dots n$ in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ I_i = Schallintensität $i = 1 \dots n$ in W/m^2 \bar{L} = arithmetischer Mittelwert der Schallintensitäten $1 \dots n$ I_0 = Bezugsschallintensität $1\ pW/m^2$</p>
--	---

Formel 22: Berechnung des arithmetischen Mittelwertes von dB-Werten

5.5 Faustformeln für das Rechnen mit dB

Eine Faustformel für das Rechnen mit dB-Werten lautet „ $0 \text{ dB} + 0 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$ “ [7]. Diese Faustformel macht den Sachverhalt deutlich, dass eine Zunahme um 3 dB eine Verdopplung und eine Abnahme um 3 dB eine Halbierung der zugrunde liegenden energetischen Schallgröße bedeutet (Formel 23).

<p>Faustformel zum Rechnen mit dB-Werten</p> $0 \text{ dB} + 0 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$	<p>Diese Faustformel bedeutet:</p> <p>Verdopplung oder Halbierung der energetischen Messwerte x_i</p> <p style="text-align: center;">=</p> <p>Zu- bzw. Abnahme der Schallgröße y_i um 3 dB</p> <p>Beispiel: $100 \text{ pW/m}^2 + 100 \text{ pW/m}^2 = 200 \text{ pW/m}^2$</p> $20 \text{ dB}_{re \ 1 \text{ pW/m}^2} + 20 \text{ dB}_{re \ 1 \text{ pW/m}^2} = 23 \text{ dB}_{re \ 1 \text{ pW/m}^2}$ $20 \text{ dB} + 20 \text{ dB} = 23 \text{ dB}$
---	---

Formel 23: Faustformel zum Rechnen mit dB-Werten

Ermittelt man die Unsicherheit ohne Berücksichtigung der logarithmischen Eigenschaft der dB-Werte, ergibt sich für drei Messwerte $y_1 = 67 \text{ dB}$ und $y_2 = 70 \text{ dB}$ y_2 und $y_3 = 73 \text{ dB}$ vereinfacht folgendes Konfidenzintervall (Formel 24).

<p>Einfaches 68% -Konfidenzintervall für dB-Werte</p> $Y_{[16\%;84\%]} \approx \bar{y} \pm \hat{s}_y = 70 \text{ dB} \pm 3 \text{ dB}$ $L_{UCL84\%} \approx \bar{y} + \hat{s}_y = 70 \text{ dB} + 3 \text{ dB}$	<p>$Y_{[16\%;84\%]}$ = 68% Konfidenzintervall für \bar{y}</p> <p>$L_{UCL84\%}$ = Obergrenze des Konfidenzintervalls</p> $\hat{s}_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ <p>= empirische Standardabweichung in dB</p> <p>y_i = logtransformiertes Verhältnismaß $\frac{x_i}{x_o}$ in dB</p> $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \text{ in dB}$ <p>= geometrischer Mittelwert in dB = $10 \cdot \log\left(\frac{x_{geo}}{x_o}\right)$</p> <p>$x_{geo}$ = geometrischer Mittelwert von $x_{i,i=1..n}$</p> $\frac{x_{geo}}{x_o} = \text{geometrischer Mittelwert von } \frac{x_i}{x_o}$ $= 10^{0,1 \cdot \bar{y}} = 10^{0,1 \cdot 70} = 10^7$
---	---

Formel 24: Einfaches 68% Konfidenzintervall für dB-Werte

Die Angabe bedeutet hier ein 68% Konfidenzintervall von -50% und $+100\%$ um das Verhältnis vom „geometrischen Mittelwert x_{geo} “ zum Bezugswert „ x_0 “ (Formel 25).

<p>Einfaches 68% -Konfidenzintervall übertragen auf lineare Ebene</p> <p>$X_{[16\%;84\%]} = [0,5 \cdot 10^7 \leq 10^7 \leq 2 \cdot 10^7]$</p>	<p>$X_{[16;84]} = 68\%$ Konfidenzintervall für $\frac{x_{geo}}{x_0}$</p>
--	--

Formel 25: Einfaches 68% Konfidenzintervall lineare Werte

Dieses Beispiel macht deutlich, dass bei der Ermittlung von Messunsicherheiten bei dB-Werten einige Besonderheiten auftreten.

Durch das Logarithmieren entspricht der arithmetische Mittelwert der dB-Werte dem geometrischen Mittelwert x_{geo} der Ausgangsmesswerte. Der arithmetische Mittelwert \bar{x} der Ausgangswerte entspricht dem energetischen Mittelwert L_{eq} .

Rechnet man mit logarithmierten Werten, so ist jede Addition der dB-Werte eine Multiplikation der Ausgangswerte:

- Plus 3 dB bedeutet Multiplikation der Ausgangswerte mit dem Faktor 2.
- Plus 6 dB bedeutet Multiplikation der Ausgangswerte mit dem Faktor 4.
- Plus 10 dB bedeutet Multiplikation der Ausgangswerte mit dem Faktor 10.
- Plus 76 dB bedeutet Multiplikation der Ausgangswerte mit dem Faktor $10^{7,6}$.

Entsprechend ergibt jede Subtraktion eine Division der Ausgangswerte:

- Minus 3 dB bedeutet Division der Ausgangswerte durch den Faktor 2.
- Minus 6 dB bedeutet Division der Ausgangswerte durch den Faktor 4.
- Minus 10 dB bedeutet Division der Ausgangswerte durch den Faktor 10.
- Minus 76 dB bedeutet Division der Ausgangswerte durch den Faktor $10^{7,6}$.

Tabelle 3 gibt einen Überblick zum Vergleich von Faktoren in dB und Faktoren linear.

Faktor F in dB	Faktor F linear
0	1
0,5	1,122
1	1,259
2	1,585
3	2
6	4
10	10
20	100
30	1000
76	$10^{7,6}$

Tabelle 3: Vergleich von Faktoren in dB und Faktoren linear

6. Land-Test

Die DIN EN ISO 9612 nutzt zur Ermittlung von Konfidenzintervallen bzw. zur Bestimmung der Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$ ein Verfahren nach C.E. Land [3] aus dem Jahr 1973 (Formel 26).

<p>Obergrenze Konfidenzintervall des arithmetischen Mittelwertes nach Land in linear</p> $X_{UCL95\% Land} = e^{\bar{y} + \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_y^2 + \frac{H_{95\%} \cdot \hat{s}_y}{\sqrt{n-1}}}$ $= \theta * e^{\frac{H_{95\%} \cdot \hat{s}_y}{\sqrt{n-1}}}$ $= \theta * SF_{UCL95\% Land}$	<p>$X_{UCL95\% Land} =$ Obergrenze Konfidenzintervall</p> <p>$x_i, i = 1; \dots; n =$ Zufallsvariable</p> <p>$y_i = \ln x_i =$ Transformierte Zufallsvariable</p> <p>$\bar{y} =$ arithm. Mittelwert der log-transformierten Werte</p> <p>$\hat{s}_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ Schätzwert Standardabweichung</p> <p>$n =$ Stichprobenumfang</p> <p>$\theta = e^{\bar{y} + \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_y^2}$ Erwartungswert Lognormalvert.</p> <p>$H_{95\%} =$ Land-Parameter aus Tab. in [3] oder aus [19] siehe Anlage 2</p> <p>$SF_{UCL95\% Land} =$ 95% Streufaktor Land (lin)</p> <p>Beispiel mit $\hat{s}_y = \ln 4 = 1,386 ; n = 3$</p> <p>$\hat{s}_{dy} = e^{\ln 4} = 4 \approx 6 \text{ dB}_{(-)}$</p> <p>$H_{95\%}(\hat{s}_y; n-1) = 18,055$</p> <p>$SF_{UCL95\% Land} = e^{\frac{H_{95\%} \cdot \hat{s}_y}{\sqrt{n-1}}}$</p> <p>$= 4,8 * 10^7$</p>
---	--

Formel 26: Land-Test

Der Land-Test und die notwendigen $H_{95\%}$ -Parameter sind in der gängigen Statistikk-literatur [8, 11, 12, 13, 15,16] nicht aufgeführt.

Der Land-Test wurde von C.E. Land im Jahr 1973 veröffentlicht [4]. In dieser Veröffentlichung sind auch Tabellenwerte für die Land-Parameter (dort mit C_{u95} -Parameter bezeichnet) aufgeführt, die recht grob gerastert sind.

Anlage 2 enthält einen Auszug aus Excel-Arbeitsblättern des Louisiana Department of Environmental Quality [19]. Dort wird das Formelzeichen $H_{95\%}$ verwendet. In Formel 26 wurde daher das Formelzeichen $H_{95\%}$ für statt C_{u95} für den Land-Parameter gewählt. Die Excel-

Arbeitsblätter des „Louisiana Department of Environmental Quality“ enthält zusätzlich noch eine Interpolationsroutine, womit der in Formel 26 herangezogene Land-Parameter $H_{95\%}(\hat{s}_y; n-1) = 18,055$ für $n = 3$ und $\hat{s}_y \text{ in } dB = 6 \text{ dB}_{(-)}$ bzw. $\hat{s}_y = 1,382$ berechnet wurde.

In den USA wird der Land-Test auch als „H-Statistik“ bezeichnet und z.B. von der Umweltbehörde EPA zur Altlastenbeurteilung eingesetzt. [17, 18, 19] . Die US-amerikanische Gesundheitsbehörde National Institutes of Health (NIH) hat ebenfalls eine Onlineversion des Land-Tests im Internet veröffentlicht [14].

Die Umrechnung der dB-Sicherheitsfaktoren $SF_{in \text{ dB}}$ aus ISO 9612 in lineare Streufaktoren SF_{lin} nach Land und umgekehrt kann nach Formel 27 erfolgen.

Der Streufaktor $SF_{UCL95\% \text{ in } dB}$ wird in ISO 9612 als „Erweiterte Unsicherheit“ bezeichnet und ergibt sich nach ISO 9612 durch die Multiplikation des Streufaktors $SF_{UCL84\% \text{ in } dB}$ mit dem Z_{95} -Perzentil-Faktor 1,65 der Normalverteilung.

Der Streufaktor $SF_{UCL84\% \text{ in } dB}$ wird in Tabelle C.4 der ISO 9612 als „Unsicherheitsbeitrag $c1 \cdot u1$ “ bezeichnet und in $dB_{(-)}$ ausgedrückt. Anlage 3 enthält Tabelle C.4 und zwei weitere Tabellen mit den transformierten Werten $SF_{UCL95\% \text{ Land in } dB}$ und $SF_{UCL95\% \text{ Land lin}}$.

<p style="text-align: center;">Streufaktoren nach Land und Streufaktoren nach ISO 9612</p> $SF_{UCL95\% Land lin} = 10^{0,1 \cdot SF_{UCL95\% ISO in dB}}$ $SF_{UCL95\% ISO in dB} = 10 * \text{Log}(SF_{UCL95\% Land lin})$	<p>$SF_{Land 95\% linear}$ = Streufaktor Land linear</p> <p>$SF_{ISO 95\% in dB}$ = Streufaktor nach ISO 9612 in $dB_{(-)}$</p> <p>Der statistische Anteil des Streufaktors nach DIN EN ISO 9612 ergibt sich aus dem „Unsicherheitsbeitrag $c1 * u1$“ nach Tabelle C.4 multipliziert mit dem Faktor für die erweiterte Unsicherheit von 1,65 (Tabelle C.4 mit Transformationen siehe Anlage 3):</p> $SF_{UCL95\% Iso in dB} = c1 * u1 * 1,65$ <p>Der Eingangsfaktor für den Unsicherheitsbeitrag $c1 * u1$ ist der Schätzwert der Standardabweichung in $dB_{(-)}$</p> $u1 = \hat{s}_{y in dB} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2}$ <p>$L_i in dB = 10 \log \frac{x_i}{x_0} =$ Transformierte Zufallsvariable in $dB_{re 1 pW/m^2}$</p> <p>Beispiel: $u_1 = \hat{s}_{y in dB} = 6 dB_{(-)}, n = 3$</p> <p>Ermittlung des Streufaktors nach DIN EN ISO 9612 nach Tabelle C.4 (siehe Anlage 3)</p> <p>„$c1 * u1$ ISO 9612“ = $SF_{UCL84\% Iso in dB} = 46,5 dB_{(-)}$</p> $SF_{UCL95\% Iso in dB} = c1 * u1 * 1,65$ $= 46,5 dB_{(-)} * 1,65$ $= 76,73 dB_{(-)}$ $SF_{UCL95\% ISO lin} = 10^{0,1 \cdot SF_{UCL95\% ISO in dB}}$ $= 10^{0,1 \cdot 76,73} = 4,7 * 10^7$ <p>Vergleich der Streufaktoren:</p> $SF_{UCL95\% ISO lin} = 4,7 * 10^7$ $SF_{UCL95\% Land lin} = 4,8 * 10^7 \text{ (Formel 26)}$ $SF_{UCL95\% Land lin} \approx SF_{UCL95\% ISO lin}$
---	---

Formel 27: Streufaktoren nach Land und Streufaktoren nach ISO 9612

Wie aus Formel 27 ersichtlich ist, entsprechen die Streufaktoren $SF_{in dB}$ aus ISO 9612 den Streufaktoren SF_{lin} des Land-Tests. Hypothese 1 aus Abschnitt 3 „Rechenfehler mit dB“ wurde damit eindeutig widerlegt.

7. Monte Carlo Simulationen und Land-Test

Simulationen von Lärmmesswerten, die mit einem Standardstreuungsfaktor von $s_d = 4 = 6 \text{ dB}_{(-)}$ um einen geometrischen Mittelwert von $\mu_y = x_{geo \text{ in dB}} = 70 \text{ dB}_{re \ 1pW/m^2}$ streuen, ergeben nach ISO 9612 bei $n = 3$ durchschnittlich eine obere Konfidenzintervallgrenze von $L_{UCL95\% \text{ ISO 9612}} = 151 \text{ dB}_{re \ 1pW/m^2}$ (Formel 28).

<p>Obere Konfidenzintervallgrenze des arithmetischen Mittelwertes nach ISO 9612</p> $L_{UCL95\% \text{ ISO 9612}} = L_{eq} + SF_{UCL95\% \text{ ISO 9612}}$ $= 74,14 \text{ dB}_{re \ 1pW/m^2} + 76,7 \text{ dB}_{(-)}$ $= 151 \text{ dB}_{re \ 1pW/m^2}$	<p>L_{eq} = Energieäquivalenter Mittelwert in $\text{dB}_{re \ 1pW/m^2}$</p> <p>$SF_{UCL95\%}$ = Streufaktor nach Land bzw. nach ISO 9612 in $\text{dB}_{(-)}$</p>
---	--

Formel 28: $L_{UCL95\%}$ in $\text{dB}_{re \ 1pW/m^2}$ nach ISO 9612

Um mögliche Fehlerursachen zu untersuchen, wurde ein Excel-Programm zur Monte Carlo Simulation von Stichproben aus normal- und lognormalverteilten Messwerten ($n = 10000$ erzeugt mit Zufallsgenerator aus Excel) erstellt und die Ergebnisse mit den Angaben der DIN EN ISO 9612 verglichen. Die Abbildung 20 stellt die Ergebnisse dar.

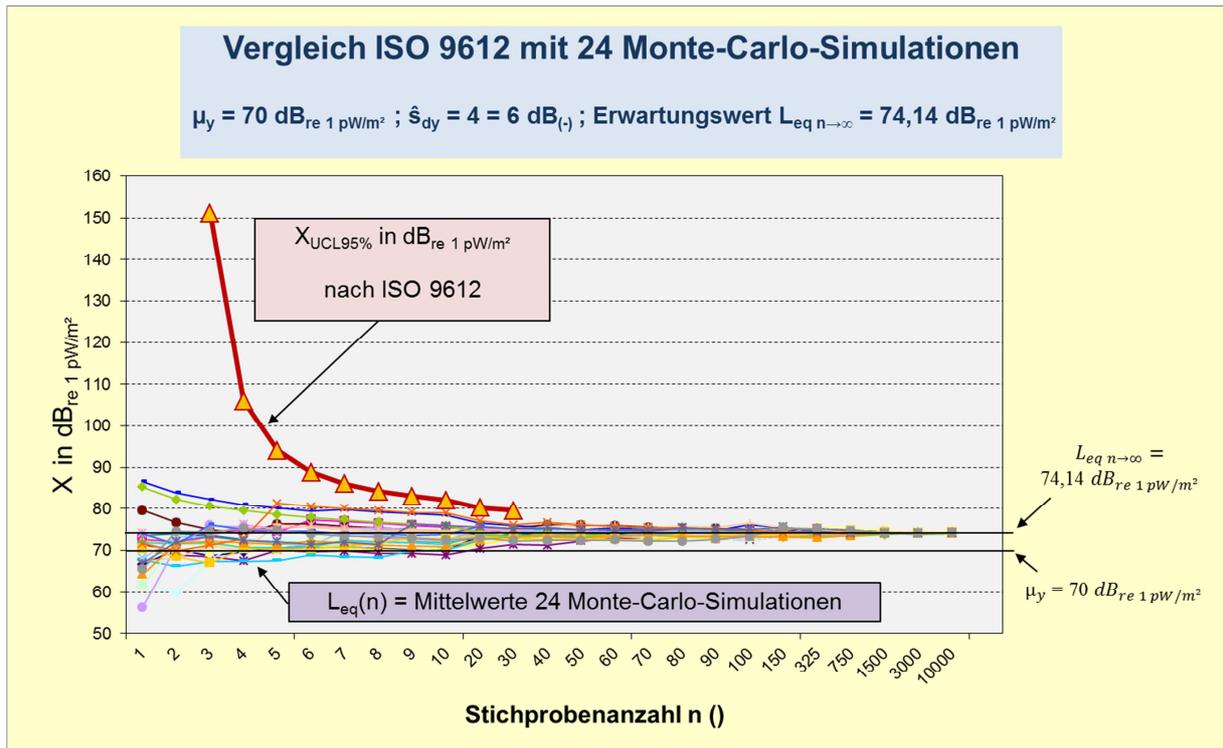


Abbildung 20: Vergleich ISO 9612 mit 24 Monte Carlo Simulationen mit $\hat{s}_{dy} = 4 = 6 \text{ dB}_{(-)}$

Die Ergebnisse deuteten darauf hin, dass sich aus ISO 9612, die auf dem Land-Test beruht, eine erhebliche Überschätzung der Unsicherheit ergibt.

Bei diesen oben aufgeführten ersten Simulationen (Abbildung 20) wurde fälschlicherweise davon ausgegangen, dass der Streufaktor \hat{s}_{dy} maximal $6 \text{ dB}_{(-)}$ beträgt. Dies entspricht einem „Gauß-Test“ mit bekanntem Standardstreuungsfaktor σ_d , übertragen auf dB-Werte.

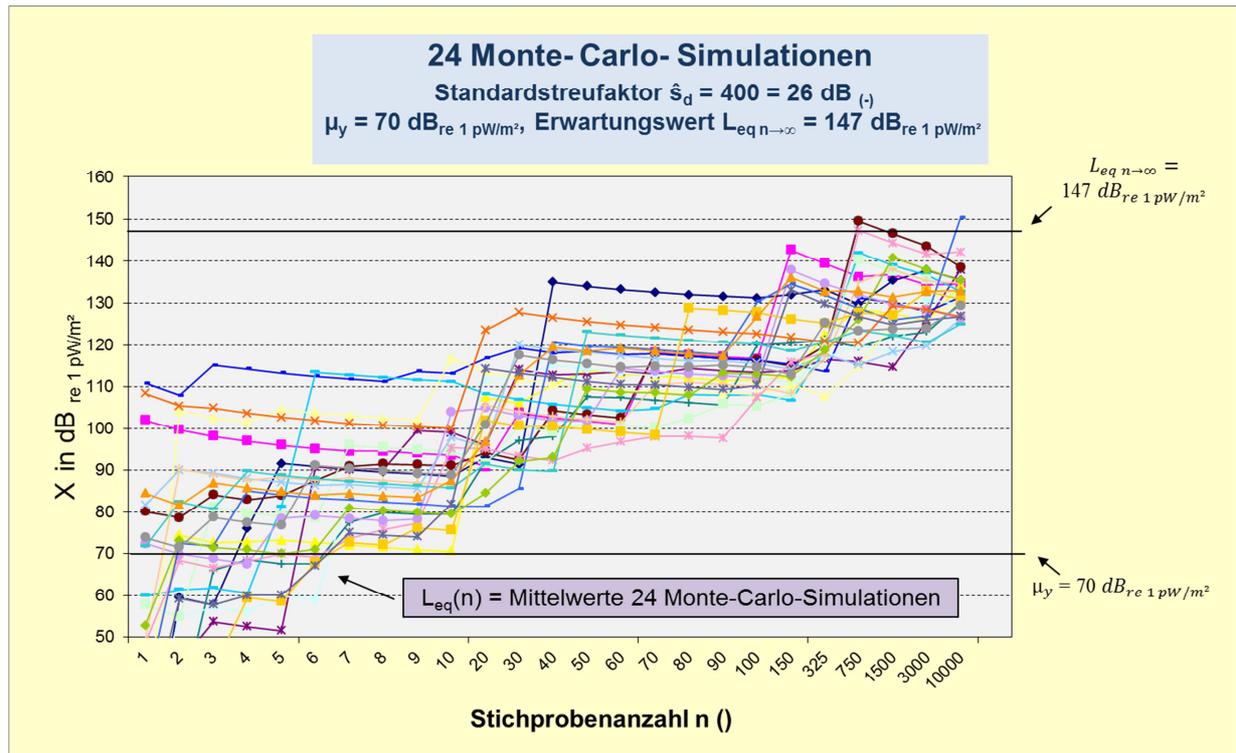


Abbildung 21: Ergebnis von 24 Monte Carlo Simulationen mit $\hat{\sigma}_d = 400 = 26 \text{ dB}_{(-)}$

Wie weitere Simulationen zeigten (Abbildung 21), können sich bei unbekanntem Standardstreuung in der Größenordnung von $\sigma_d = 400 = 26 \text{ dB}_{(-)}$ tatsächlich Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ in der Größenordnung von $77 \text{ dB}_{(-)}$ bei kleinen Stichproben ($n = 3$; $\hat{\sigma}_{d_y} = 4 = 6 \text{ dB}_{(-)}$) ergeben. Da bei so großen Standardstreuungen die großen Streufaktoren viel seltener als die kleinen Streufaktoren auftreten, steigt der L_{eq} auch nach ca. 10000 Proben immer weiter an, bis der Erwartungswert erreicht ist.

Hypothese 2 aus Abschnitt 3 „Fehlerhafter Land-Test“ konnte somit widerlegt werden. Soll das Konfidenzintervall aus einer kleinen Stichprobe geschätzt werden, ergeben sich sehr große Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ für die Konfidenzintervallgrenze $L_{UCL95\%}$. Der Land-Test bzw. ISO 9612 ergeben realistische Konfidenzintervallgrenzen.

Wie in Abschnitt 1.3 erläutert, kann beim Vorliegen von Vorinformationen und Erfahrungswissen auch das vereinfachte Verfahren nach TRLV-Lärm angewendet werden.

Der zu erwartende L_{eq} in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$ bzw. der Erwartungswert \bar{x} einer Lognormalverteilung kann nach Formel 29 berechnet werden [5].

<p>Erwartungswert L_{eq} bzw. \bar{x}</p> $L_{eq} = \mu_y + 0,115 * \hat{s}_y \text{ in } dB^2$ $\bar{x} = x_{geo} * e^{\frac{1}{2} \cdot \hat{s}_y \text{ lin}^2}$	<p>L_{eq} = Energetischer Mittelwert bei Lärmmessungen in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$</p> <p>μ_y = arithmetischer MW der dB-Werte = x_{geo} in dB in $dB_{re\ 1\ pW/m^2}$</p> <p>$\hat{s}_y \text{ in } dB$ = empirischer Standardstreuungsfaktor in dB(-)</p> <p>$\hat{s}_y \text{ lin}$ = empirische Standardabweichung log-Ebene</p> <p>\bar{x}_{lin} = arithmetischer MW der lin-Werte</p> <p>x_{geo} = geometrischer MW der lin-Werte</p> <p>Beispiel: $\hat{s}_d = 400 = 26\ dB_{(-)}$ $\mu_y = x_{geo} \text{ in } dB = 70\ dB_{re\ 1\ pW/m^2}$</p> <p>$L_{eq} = \mu_y + 0,115 * \hat{s}_y \text{ in } dB^2$ $= 70\ dB_{re\ 1\ pW/m^2} + 0,115 * 26dB_{(-)}^2$ $= 147\ dB_{re\ 1\ pW/m^2}$</p> <p>$\bar{x} = x_{geo} * e^{\frac{1}{2} \cdot \hat{s}_y \text{ lin}^2}$ $= x_{geo} * e^{\frac{1}{2} \cdot (\ln \hat{s}_d)^2}$ $= 10^7 pW/m^2 * e^{\frac{1}{2} \cdot (\ln 400)^2}$ $= 10^{14,7} pW/m^2$ $= 147\ dB_{re\ 1\ pW/m^2}$</p>
---	---

Formel 29: Erwartungswert L_{eq} bzw. \bar{x} einer Lognormalverteilung

8. Darstellung von Stichprobentests über Standardstrefaktoren

Im Folgenden wird anhand von Beispielen gezeigt, dass sich der Gauß-Test, der t-Test, der log-t-Test der d1-Test, d2-Test, der dt-Test sowie der Land-Test auch über den Standardstrefaktor s_d bzw. dessen Varianten und die daraus berechneten Streufaktoren $SF_{[\alpha/2;1-\alpha/2]}$ darstellen lassen.

Der t-Test wird zum Schätzen von Konfidenzintervallen des arithmetischen Mittelwertes eingesetzt. Der χ^2 -Test wird zum Schätzen von Konfidenzintervallen bei der Varianzanalyse bzw. zur Ermittlung der Streuung von Standardabweichungen eingesetzt.

Der Streufaktor $SF_{t-Test} = t_{(n-1,1-\alpha)} * s/\sqrt{(n-1)}$ und der Streufaktor $SF_{\chi-Test} = Z * n/\chi_{(n-1,1-\alpha)}$ müssten theoretisch gleich sein, wenn der χ^2 -Test und der t-Test das gleiche Ergebnis erbringen sollen.

Als Anlage 4 ist eine Tabelle für die Perzentile Z, t, χ aus Excel und die hieraus berechneten Perzentilstreufaktoren für den d1-Test und dt-Test bei $n = 50$ beigefügt.

Bei $n = 50$ ähneln sich die Perzentilstreufaktoren von t-Test, χ -Test und d1-Test, sie sind jedoch nicht identisch (Anlage 4).

Die „Fehlertrichter“ beim t-Test und beim d1-Test ähneln sich ebenfalls, sind aber nicht identisch (Abbildung 25). Bei kleinen Stichproben ergeben sich besonders große Unterschiede.

Während der t-Test die lineare Standardabweichung und damit ein additives Streumodell nutzt, liegt dem χ^2 -Test ein multiplikatives Streumodell zugrunde. Beim χ^2 -Test wird nicht eine lineare Abweichung, sondern das Verhältnis von zwei Standardabweichungen untersucht. Dies entspricht einem multiplikativen Streumodell.

Den folgenden d-Tests liegt ebenso wie dem Log-t-Test und dem Land-Test ein multiplikatives Streumodell durch den Standardstrefaktor s_d zugrunde.

8.1 Darstellung Gauß-Test über \hat{s}_x und Gauß-Test über \hat{s}_{dx}

Die Ermittlung des Konfidenzintervalls für Stichproben aus einer normalverteilten Grundgesamtheit ($s_d < 1,33$) erfolgt bei bekannter Standardabweichung durch den Gauß-Test (Formel 30).

<u>Gauß-Test</u>	
$X_{Gau\beta \hat{s}_x} = \bar{x} \pm \frac{Z_{(1-\alpha/2)} \hat{s}_x}{\sqrt{n}}$	$X_{Gau\beta \hat{s}_{x+}} = X_{UCL \text{ Gau\beta } \hat{s}_x}$
$X_{Gau\beta \hat{s}_{dx}} = \theta * \hat{s}_{dx} \frac{Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$	$X_{Gau\beta \hat{s}_{dx}^*} = X_{UCL \text{ Gau\beta } \hat{s}_{dx}}$
$= \theta * / SF_{Gau\beta\text{-Test } \hat{s}_{dx}}$	$SF_{Gau\beta\text{-Test } \hat{s}_{dx}} = \text{Streufaktor Gau\beta-Test über } \hat{s}_x$
	$\hat{s}_x = \text{empirische Standardabweichung}$
	$\hat{s}_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
	$\hat{s}_{dx} = \text{Schätzwert für Standardstreufaktor } \sigma_d \text{ aus}$ empirischer Standardabweichung \hat{s}_x (Abschn. 2.2.3)
$X_{Gaus \hat{s}_x} \approx X_{Gau\beta \hat{s}_{dx}}$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \text{arithmetischer Mittelwert x-Ebene}$
	$\theta = \text{Erwartungswert} = x_{geo} + e^{\frac{1}{2} \cdot (\ln \hat{s}_{dx})^2}$
	$\alpha = \text{Signifikanzniveau}$
	$n = \text{Stichprobenzahl}$
	$Z_{(1-\alpha/2)} = \text{Perzentil der Normalverteilung}$

Formel 30: Gauß-Test über \hat{s}_x und Gauß-Test über \hat{s}_{dx}

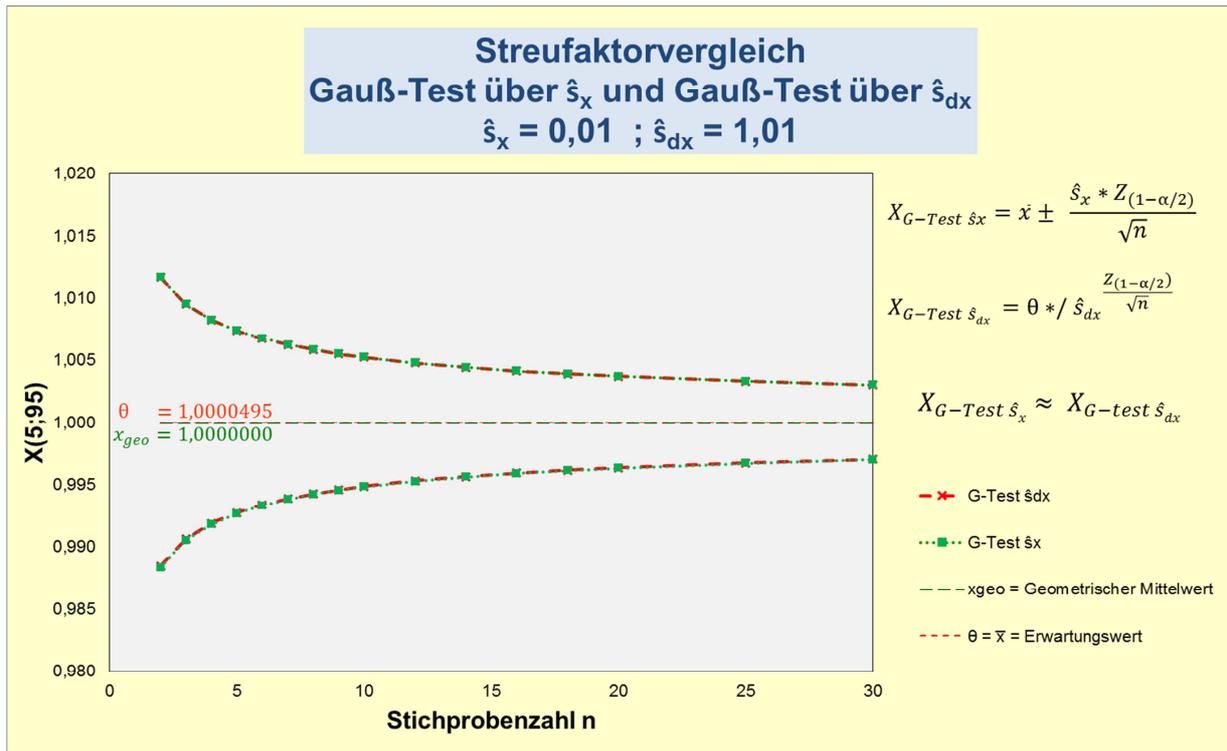


Abbildung 22: Streufaktorvergleich Gauß-Test über \hat{s}_x und Gauß-Test über \hat{s}_{dx}

Wie aus Abbildung 22 ersichtlich ist, ergibt sich bei kleinem Standardstreu­faktor ($\hat{s}_{dx} = 1,01$) eine gute Übereinstimmung der Streufaktoren des Gauß-Tests über \hat{s}_x und des Gauß-Tests über \hat{s}_{dx} .

8.2 Darstellung t-Test über \hat{s}_x und t-Test über \hat{s}_{dx}

Die Ermittlung des Konfidenzintervalls für Stichproben aus einer normalverteilten Grundgesamtheit ($s_d < 1,33$) erfolgt bei unbekannter Standardabweichung durch den t-Test (Formel 31).

<p><u>t-Test</u></p> $X_{t-Test \hat{s}_x} = \bar{x} \pm \frac{t_{(1-\alpha/2)} \hat{s}_x}{\sqrt{n-1}}$ $X_{t-Test \hat{s}_{dx}} = \theta * \frac{t_{1-\alpha/2}}{\hat{s}_{dx} \sqrt{n-1}}$ $= \theta * / SF_{t-Test \hat{s}_{dx}}$ $X_{t-Test \hat{s}_x} \approx X_{t-test \hat{s}_{dx}}$	$X_{t-Test \hat{s}_x+} = X_{UCL t-Test \hat{s}_x}$ $X_{t-Test \hat{s}_{dx}*} = X_{UCL t-Test \hat{s}_{dx}}$ $SF_{t-Test \hat{s}_{dx}} = \text{Streifaktor t-Test über } \hat{s}_{dx}$ $\hat{s}_x = \text{empirische Standardabweichung}$ $\hat{s}_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ $\hat{s}_{dx} = \text{Schätzwert für Standardstriefaktor } \sigma_d \text{ aus}$ <p style="text-align: center;">empirischer Standardabweichung \hat{s}_x</p> $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \text{arithmetischer Mittelwert x-Ebene}$ $\theta = \text{Erwartungswert} = x_{geo} + e^{\frac{1}{2} \cdot (\ln \hat{s}_d)^2}$ $\alpha = \text{Signifikanzniveau}$ $n = \text{Stichprobenzahl}$ $t_{(1-\alpha/2)} = 95\% \text{ Perzentil der t-Verteilung}$
---	---

Formel 31: t-Test über \hat{s}_x und t-Test über \hat{s}_{dx}

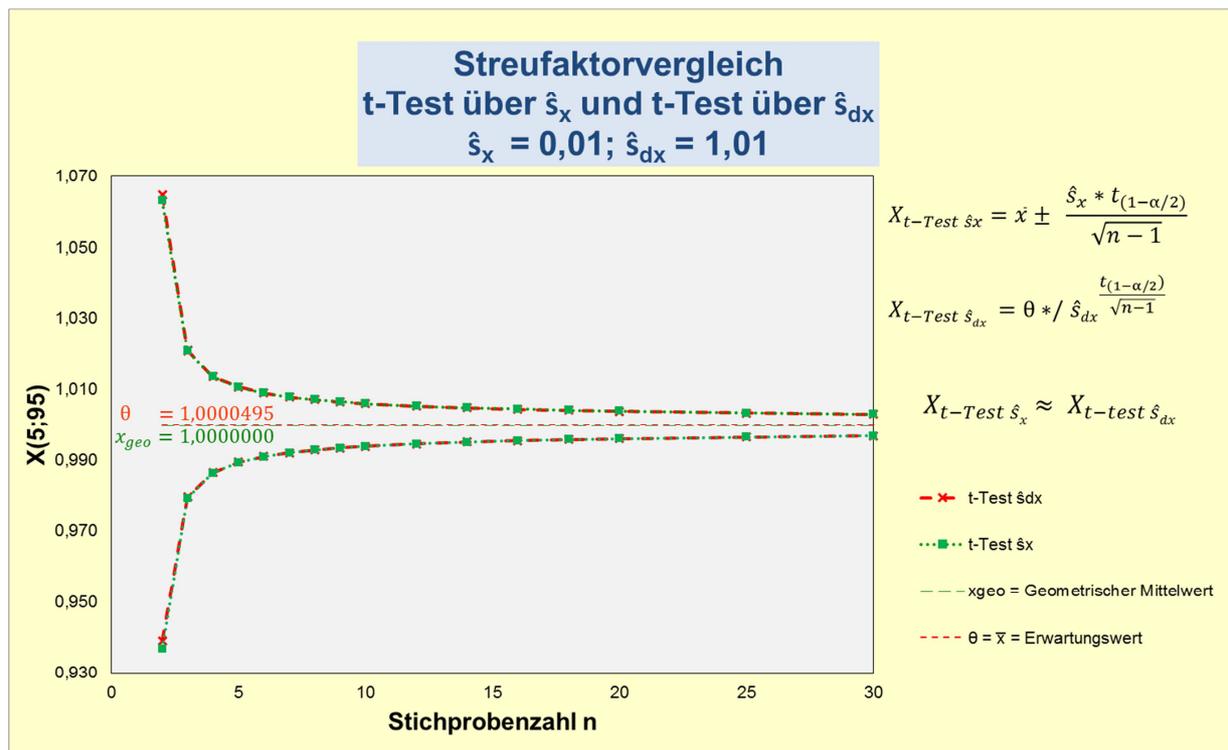


Abbildung 23: Streufaktorvergleich t-Test über \hat{s}_x und t-Test über \hat{s}_{dx}

Wie aus Abbildung 23 ersichtlich ist, ergibt sich bei kleinem Standardstreu­faktoren ($\hat{s}_{dx} = 1,01$) eine gute Übereinstimmung der Streufaktoren des t-Tests über \hat{s}_x und des t-Tests über \hat{s}_{dx} .

8.3 Darstellung Log t-Test über \hat{s}_y und Log t-Test über \hat{s}_{dy}

Durch Transformation der Zufallsvariablen x_i zur logarithmischen Zufallsvariablen $y_i = \ln x_i$ erhält man mit dem t-Test auch für etwas größere Streuungen gute Konfidenzintervalle. Das Konfidenzintervall streut hier aber nicht um den Erwartungswert θ , sondern um den geometrischen Mittelwert $x_{geo} = e^{\bar{y}}$ der Ausgangswerte (Formel 32).

<p><u>Log-t-Test</u></p> $X_{Log-t \hat{s}_y} = e^{\bar{y} \pm \frac{\hat{s}_y \cdot t_{(1-\alpha/2)}}{\sqrt{n-1}}}$ $X_{Log-t \hat{s}_{dy}} = \theta \cdot / \hat{s}_{dy} \frac{t_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}}$ $= \theta \cdot / SF_{t-Test \hat{s}_{dy}}$ $X_{Log-t \hat{s}_y} \approx X_{Log-t \hat{s}_{dy}}$	$X_{Log-t \hat{s}_{y+}} = X_{UCL \text{ Log-t-Test } \hat{s}_y}$ $X_{Log-t \hat{s}_{dy*}} = X_{UCL \text{ Log-t-Test } \hat{s}_{dy}}$ $SF_{t-Test \hat{s}_{dy}} = \text{Streufaktor t-Test über } \hat{s}_{dy}$ $\hat{s}_y = \text{empirische Standardabweichung der Y-Ebene}$ $\hat{s}_{dy} = \text{Schätzwert für Standardstreuung } \sigma_d \text{ aus}$ <p style="text-align: center;">empirischer Standardabweichung \hat{s}_y</p> $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \text{arithmetischer Mittelwert y-Ebene}$ $\theta = \text{Erwartungswert} = x_{geo} + e^{\frac{1}{2} \cdot (\ln \hat{s}_{dy})^2}$ $\alpha = \text{Signifikanzniveau}$ $n = \text{Stichprobenzahl}$ $t_{(1-\alpha/2)} = \text{Perzentil der t-Verteilung}$
--	---

Formel 32: Log t-Test über \hat{s}_y und Log t-Test über \hat{s}_{dy}

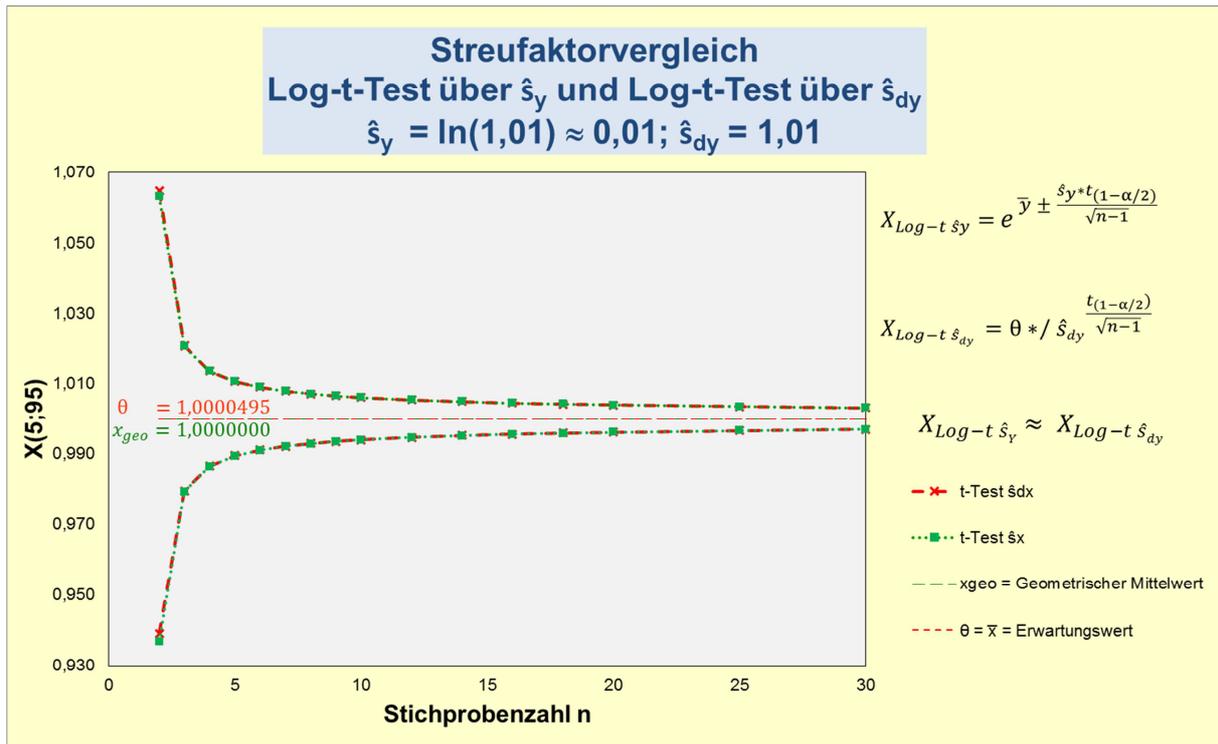


Abbildung 24: Streufaktorvergleich Log t-Test über \hat{s}_y und Log t-Test über \hat{s}_{dy}

Wie aus Abbildung 24 ersichtlich ist, ergibt sich bei kleinem Standardstreu­faktor ($\hat{s}_{dx} = 1,01$) eine gute Übereinstimmung der Streufaktoren des Log-t-Tests über \hat{s}_x und des Log-t-Tests über \hat{s}_{dx} .

8.4 Darstellung d1-Tests über \hat{s}_{dx} und d2-Tests über \hat{s}_{dx}

Die Kombination von Gauß und Chi – Test wird hier als d1-Test bezeichnet (Formel 33) .

<p style="text-align: center;"><u>d1-Test</u></p> $X_{d1-Test \hat{s}_{dx}} = \theta * / \hat{s}_{dx} \frac{Z_{1-\alpha/2}}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2}$ $= \theta * / \hat{s}_{dx} \frac{d_1-Perzentil}{\sqrt{n}*\sqrt{n}}$ $= \theta * / SF_{d1-Test \hat{s}_{dx}}$	<p>$X_{d1-Test \hat{s}_{dx}} =$ d1-Konfidenzintervall</p> <p>$X_{d1(n-1,1-\alpha/2) \hat{s}_{dx}^*} = X_{UCL d1 \hat{s}_{dx}}$</p> <p>$SF_{d1-Test \hat{s}_{dx}} =$ Streufaktor d1-Test über \hat{s}_{dx}</p> <p>$\hat{s}_x =$ empirische Standardabweichung der x-Ebene</p> <p>$\hat{s}_{dx} =$ Schätzwert für Standardstreuung σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_x</p> <p>$x_i =$ Zufallsvariable</p> <p>$y_i = \ln x_i =$ Transformierte Zufallsvariable</p> <p>$n =$ Stichprobenumfang</p> <p>$\theta = e^{\bar{y} + 1/2 \cdot s_y^2} =$ Erwartungswert</p> <p>$\alpha =$ Signifikanzniveau</p> <p>$Z_{1-\alpha/2} =$ 95% Perzentil der Normalverteilung</p> <p>$\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2 =$ 95% Perzentil der Chi²-Verteilung</p> <p>$d_1 - Perzentil =$ Perzentil des d1-Test (s. Anlage 4)</p>
--	---

Formel 33: d1-Test über \hat{s}_{dx}

Bei kleinem Standardstreuung ähnelt das Ergebnis des d1-Test dem t-Test (Abbildung 25):

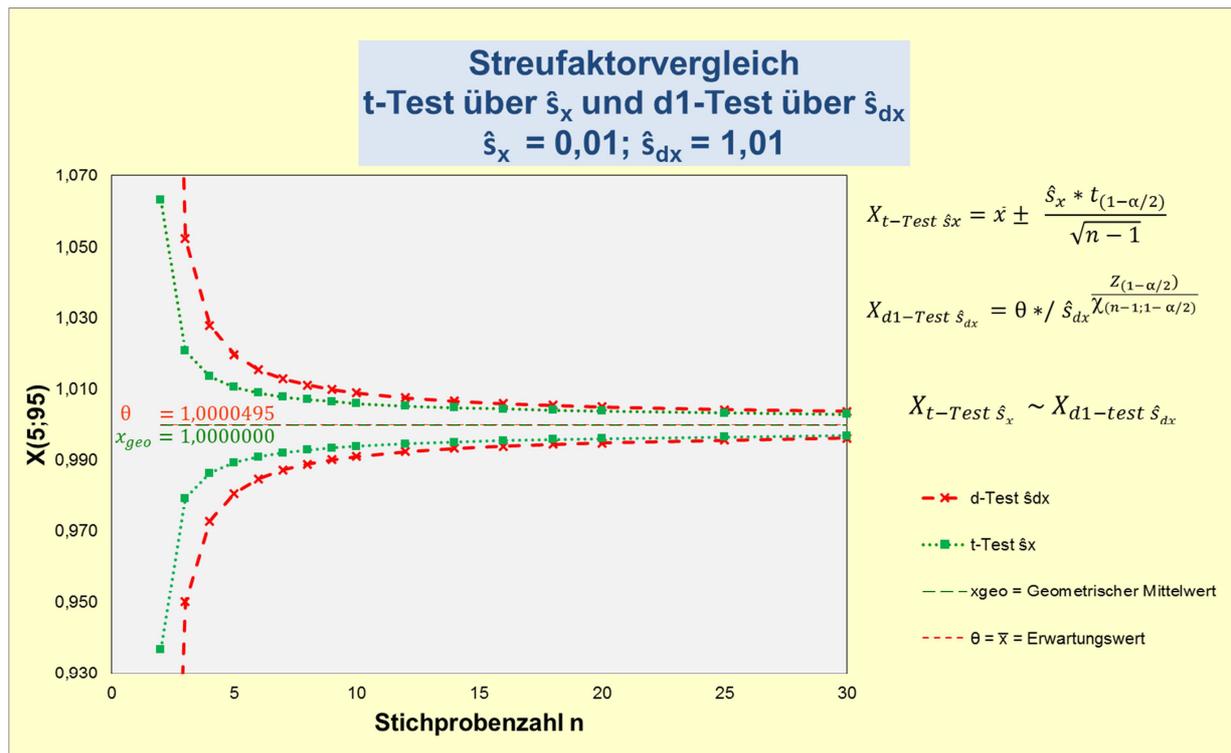


Abbildung 25: Streufaktorvergleich t-Test und d1-Test

Ersetzt man den Wert $\chi_{(n-1; 1-\alpha/2)}$ durch den Wert $\chi_{(n; 1-\alpha/2)}$, ergibt sich eine noch bessere Übereinstimmung (Abbildung 26):

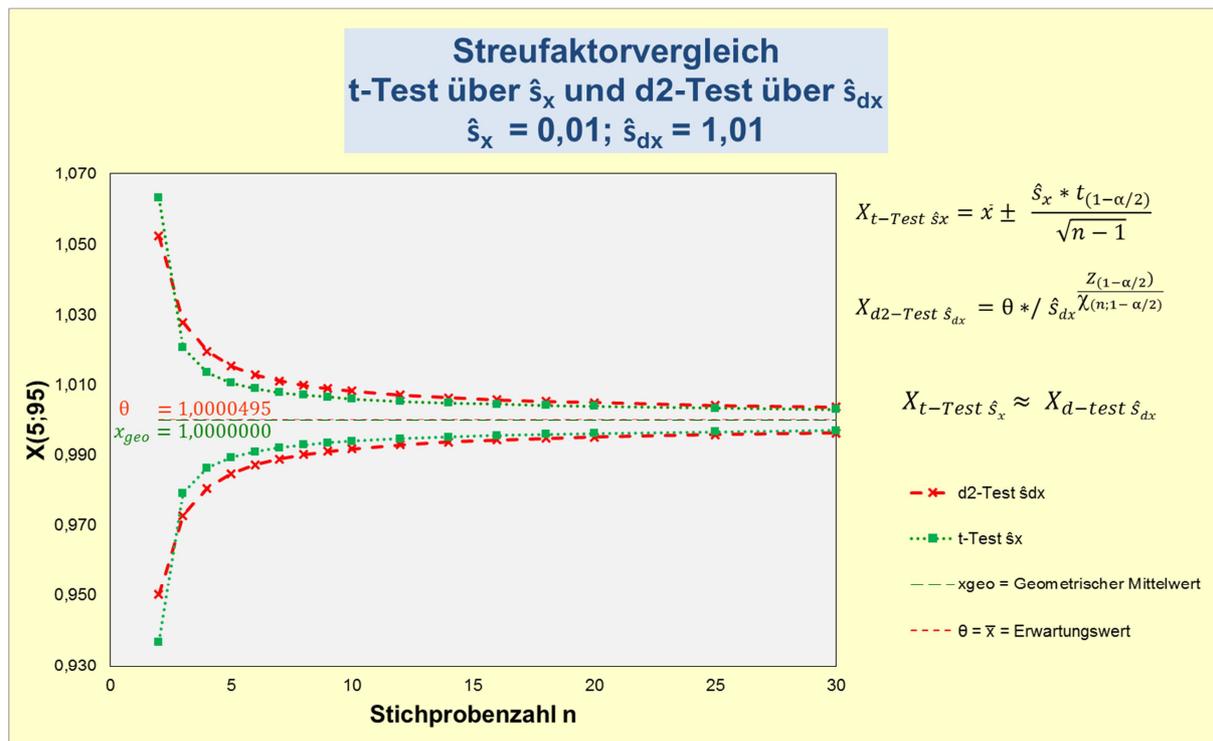


Abbildung 26: Streufaktorvergleich t-Test und d2-Test

Die Ableitung der Formel für den d1-Test erfolgte auf logarithmischer Ebene aus dem Log-Gauß-Test und dem χ^2 -Test und dem Streufaktor s_d (Formel 34-38):

<p>Log-Gauß-Test</p> $Y_{95} = \bar{y} + \frac{Z_{95} \cdot \sigma_y}{\sqrt{n}}$	<p>Y_{95} = 95%-Wert für \bar{y} x_i = Zufallsvariable $y_i = \ln x_i$ = Transformierte Zufallsvariable n = Stichprobenumfang α = Signifikanzniveau = 0,1 $Z_{1-\alpha/2}$ = 95% Perzentil der Normalverteilung σ_y = wahre unbekannt Standardabweichung Y-Ebene</p>
--	--

Formel 34: Gauß-Test

<p>Chi²-Test</p> $\chi_{95}^2 = \frac{n \hat{s}_y^2}{\sigma_{y,95,n}^2}$ $\sigma_{y,95,n} = \frac{\sqrt{n} \hat{s}_y}{\chi_{95}}$	<p>σ_y = wahre unbekannt Standardabweichung Y-Ebene \hat{s}_y = empirische Standardabweichung y-Ebene α = Signifikanzniveau = 0,1 $\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2$ = 95% Perzentil der Chi²-Verteilung</p>
--	---

Formel 35: Chi²-Test

Durch die Kombination von Gauß und Chi-Test (Formel 34 und 35) erhält man Formel 36:

<p>Kombination Gauß und χ^2-Test</p> $Y_{95} - \bar{y} = \hat{s}_y \frac{Z \sqrt{n}}{\chi}$ $Y_{95} - \bar{y} = \hat{s}_y \frac{Z}{\chi}$	<p>Y_{95} = 95% Konfidenzintervallgrenze y-Ebene \bar{y} = arithmetischer Wert y-Ebene \hat{s}_y = empirische Standardabweichung der y-Ebene \hat{s}_{dy} = Schätzwert für Standardstreuung σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y α = Signifikanzniveau = 0,1 Z = 95% Perzentil der Normalverteilung</p>
---	--

Formel 36: Kombination Gauß-Test und χ^2 -Test

Durch das Ersetzen der Werte $\bar{y} = \ln x_{geo}$ und $Y_{95} = \ln X_{95}$ und $s_y = \ln s_d$ ergibt sich Formel 37:

<p>Einsetzen der log-Werte</p> $\ln(X_{95}) - \ln(x_{geo}) = \frac{\ln(\hat{s}_y) \cdot Z}{\chi}$ $\ln\left(\frac{X_{95}}{x_{geo}}\right) = \frac{\ln(\hat{s}_y) \cdot Z}{\chi}$ $\frac{X_{95}}{x_{geo}} = e^{\frac{Z \cdot \ln(\hat{s}_y)}{\chi}}$ $X_{95} = x_{geo} \cdot e^{\frac{Z \cdot \ln(\hat{s}_y)}{\chi}}$ $X_{d1(n-1; \frac{\alpha}{2}; 1-\frac{\alpha}{2})} = x_{geo} \cdot \hat{s}_{dy}^{\frac{Z_{(1-\alpha/2)}}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}}}$	<p>$X_{d1(n-1; \frac{\alpha}{2}; 1-\frac{\alpha}{2})} =$ d1-Konfidenzintervall</p> <p>$\hat{s}_y =$ empirische Standardabweichung der Y-Ebene</p> <p>$\hat{s}_{dy} =$ Schätzwert für Standardstreuung σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y</p> <p>$n =$ Stichprobenumfang</p> <p>$\alpha =$ Signifikanzniveau</p> <p>$Z_{1-\alpha/2} =$ Perzentil der Normalverteilung</p> <p>$\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 =$ Perzentil der Chi²-Verteilung</p>
---	---

Formel 37: Kombination Gauß-Test und χ^2 -Test mit log-Werten

Die Messwerte streuen in Formel 37 um den geometrischen Mittelwert x_{geo} . Bei kleinen Standardstreuungsfaktoren spielt der Unterschied zwischen dem Erwartungswert $\theta = x_{geo} \cdot e^{0,5 \hat{s}_y^2}$ und x_{geo} keine große Rolle.

Bei einem s_d von 1,01 ergibt sich ein Faktor von 1,0000495. Bei einem $\hat{s}_{dy} = 4,0$ ergibt der Faktor $e^{0,5 \hat{s}_y^2} = 2,614$ und kann dann nicht mehr vernachlässigt werden. Der vollständige d1-Test lautet daher (Formel 38):

<p>Ergebnis Herleitung d1-Test</p> $X_{d1(n-1; \frac{\alpha}{2}; 1-\frac{\alpha}{2})} = \theta * \hat{s}_{dy}^{\frac{Z_{(1-\alpha/2)}}{\chi_{(n-1, 1-\alpha/2)}}}$ $= \theta * SF_{d1-Test} \hat{s}_{dy}$ $X_{UCL95\% d1 \hat{s}_{dy}} = \theta * SF_{UCL95\% d1 \hat{s}_{dy}}$	<p>$X_{d1(n-1; \frac{\alpha}{2}; 1-\frac{\alpha}{2})}$ = d1-Konfidenzintervall</p> <p>$X_{d1(n-1, 1-\alpha/2) \hat{s}_{dy}}$ = $X_{UCL d1 \hat{s}_{dy}}$</p> <p>$SF_{d1-Test \hat{s}_{dy}}$ = Streufaktor d1-Test über \hat{s}_{dy}</p> <p>\hat{s}_y = empirische Standardabweichung der Y-Ebene</p> <p>\hat{s}_{dy} = Schätzwert für Standardstreuung σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y</p> <p>x_i = Zufallsvariable</p> <p>$y_i = \ln x_i$ = Transformierte Zufallsvariable</p> <p>n = Stichprobenumfang</p> <p>$\theta = e^{\bar{y} + \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_y^2}$ = Erwartungswert</p> <p>α = Signifikanzniveau</p> <p>$Z_{1-\alpha/2}$ = Perzentil der Normalverteilung</p> <p>$\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$ = Perzentil der Chi²-Verteilung</p>
---	---

Formel 38: Ergebnis Herleitung d1-Test

8.5 Darstellung des dt-Tests über den Standardstreudefaktor \hat{s}_{dx}

Die Kombination von d1-Test und t-test wird hier als dt-Test bezeichnet (Formel 39). Diese Kombination wurde getestet, da hier die Schwankung des Mittelwertes durch den $t_{(1-\alpha/2)}$ - Exponent und die Schwankung der Streuung durch den $1/\chi$ -Exponent erfasst wird.

<p><u>dt-Test</u></p> $X_{dt(n-1; \frac{\alpha}{2}; 1-\frac{\alpha}{2})} = \theta * / \hat{s}_{dx} \frac{t_{(1-\alpha/2)}}{\chi_{(n-1, 1-\alpha/2)}}$ $= \theta * / SF_{dt-Test} \hat{s}_{dx}$ $= \theta * / \hat{s}_{dx} \frac{d_t-Perzentil}{\sqrt{n}*\sqrt{n}}$ $X_{UCL95\% dt \hat{s}_{dx}} = \theta * SF_{UCL95\% dt \hat{s}_{dx}}$	<p>$X_{dt(n-1; \frac{\alpha}{2}; 1-\frac{\alpha}{2})} = dt\text{-Konfidenzintervall}$</p> <p>$X_{dt(n-1, 1-\alpha/2) \hat{s}_{dx}} = X_{UCL dt \hat{s}_{dx}}$</p> <p>$SF_{d1(n, 1-\alpha/2)}$ = Streufaktor dt-Test über \hat{s}_{dy}</p> <p>\hat{s}_y = empirische Standardabweichung der Y-Ebene</p> <p>\hat{s}_{dx} = Schätzwert für Standardstreudefaktor σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_{yx}</p> <p>$y_i = \ln x_i$ = Transformierte Zufallsvariable</p> <p>n = Stichprobenumfang</p> <p>$\theta = e^{\bar{y} + \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_y^2}$ = Erwartungswert</p> <p>α = Signifikanzniveau = 0,1</p> <p>$t_{1-\alpha/2}$ = 95% Perzentil der t-Verteilung</p> <p>$\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$ = 95% Perzentil der Chi²-Verteilung</p> <p>$d_t - Perzentil$ = Perzentil des dt-Test (s. Anlage 4)</p>
---	--

Formel 39: Konfidenzintervall für den dt-Test

Abbildung 27 zeigt, dass die Streufaktoren des dt-Tests deutlich vom denen des t-Tests abweichen. Wie in Abschnitt 9.4 und 9.5 gezeigt wird, ergibt sich jedoch eine relativ gute Übereinstimmung des dt-Tests mit dem Land-Test.

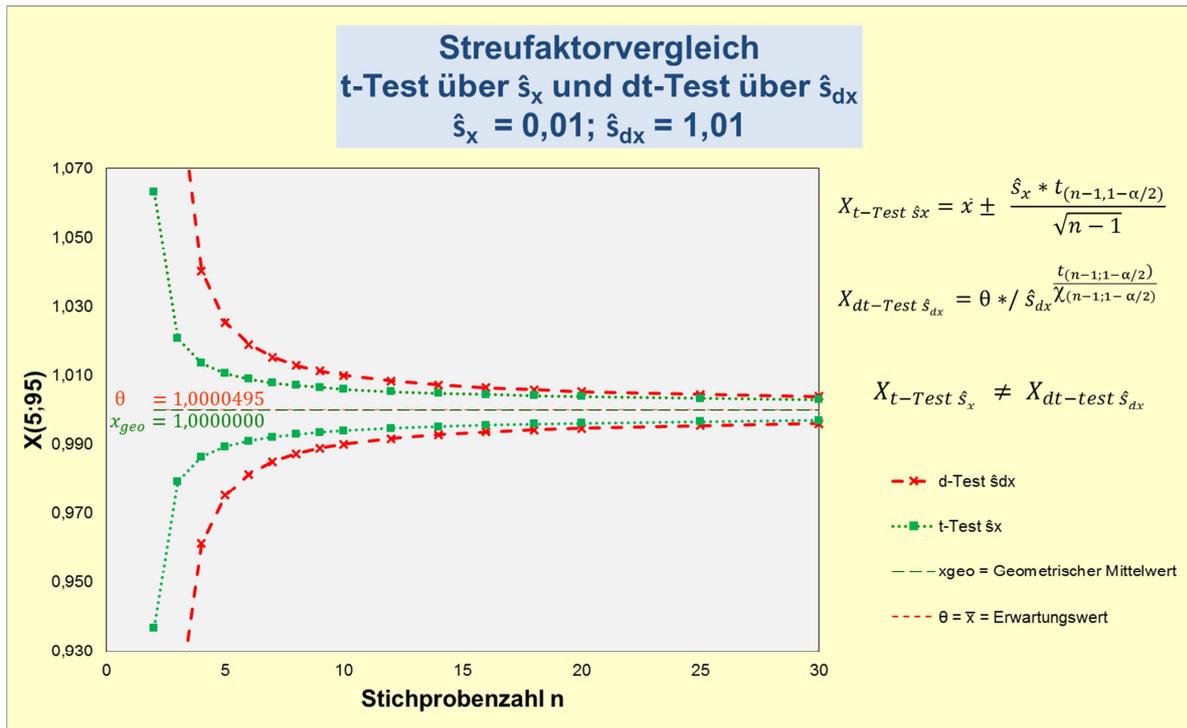


Abbildung 27: Streufaktorvergleich t-Test und dt-Test über den Standardstreuungsfaktor \hat{s}_{dx}

8.6 Darstellung des Land-Tests über den Standardstrefaktor \hat{s}_{dy}

In der Literatur wird der Land-Test über die empirische Standardabweichung der Y-Ebene (log-Ebene) dargestellt [4]; [19].

Wie in Formel 40 und Abbildung 28 dargestellt, lässt sich der Land-Test auch über den Streufaktor \hat{s}_{dy} darstellen:

<p>Land-Test</p> $X_{Land-T \hat{s}_{dy}} = \theta * e^{\frac{H_{95\%} * \hat{s}_y}{\sqrt{n-1}}}$ $= \theta * e^{\frac{H_{95\%} * \ln(\hat{s}_{dy})}{\sqrt{n-1}}}$ $= \theta * \hat{s}_{dy}^{\frac{H_{95\%}}{\sqrt{n-1}}}$ $= \theta * SF_{UCL95\% Land \hat{s}_{dy}}$	$X_{Land-T \hat{s}_{dy}} = X_{UCL95\% Land-T \hat{s}_{dy}}$ $H_{95\%}$ = Land-Parameter für Berchn. $SF_{UCL95\% Land}$ $SF_{UCL95\% Land}$ = Streufaktor Land-Test über \hat{s}_{dy} θ = $e^{\bar{y} + \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_y^2}$ = Erwartungswert \hat{s}_y = empirische Standardabweichung der Y-Ebene \hat{s}_{dy} = Schätzwert für Standardstrefaktor σ_d aus empirischer Standardabweichung \hat{s}_y
---	---

Formel 40: Darstellung des Land-Tests über den Standardstrefaktor \hat{s}_{dy}

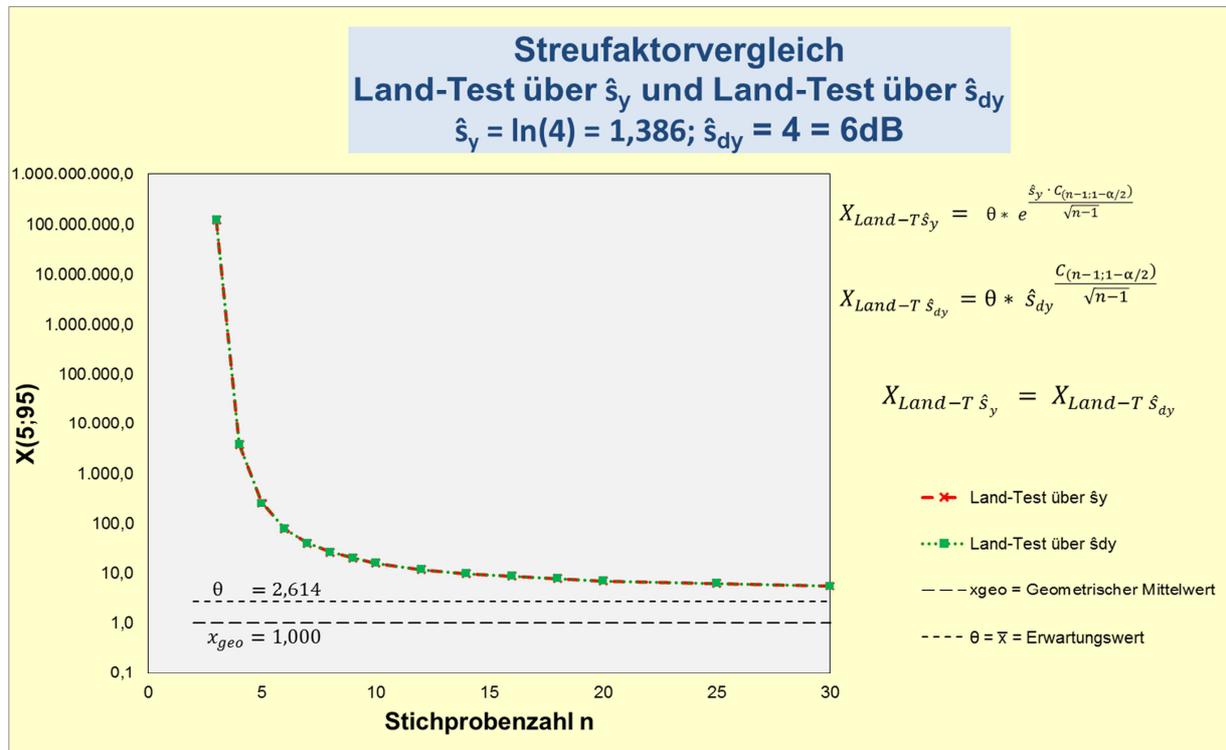


Abbildung 28: Streufaktorvergleich Land-Test über \hat{s}_y und Land-Test über \hat{s}_{dy}

Abbildung 28 zeigt, dass die Streufaktoren des Land-Tests über \hat{s}_y und die Streufaktoren des Land-Tests über \hat{s}_{dy} übereinstimmen.

9. Vergleiche Land-Test mit d-Tests

9.1 Vergleich $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit $X_{UCL95\% \text{ d1-Test}}$

Der d1-Test zeigt einen ähnlichen Kurvenverlauf wie der Land-Test (Abbildung 29). Hier wurde vermutet, dass die Streuexponenten $H_{(n-1;1-\alpha/2)}$ nach Land eventuell fehlerbehaftet sind. Diese Vermutung konnte jedoch nicht belegt werden (Abschnitt 6).

Es ergeben sich deutliche Unterschiede zwischen dem $X_{UCL95\% \text{ d1-Test}}$ und dem $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$. Bei $n = 3$ und $\hat{s}_{dy} = 4 = 6 \text{ dB}_{(-)}$ beträgt der Unterschied 46,3 dB (siehe Abbildung 29).

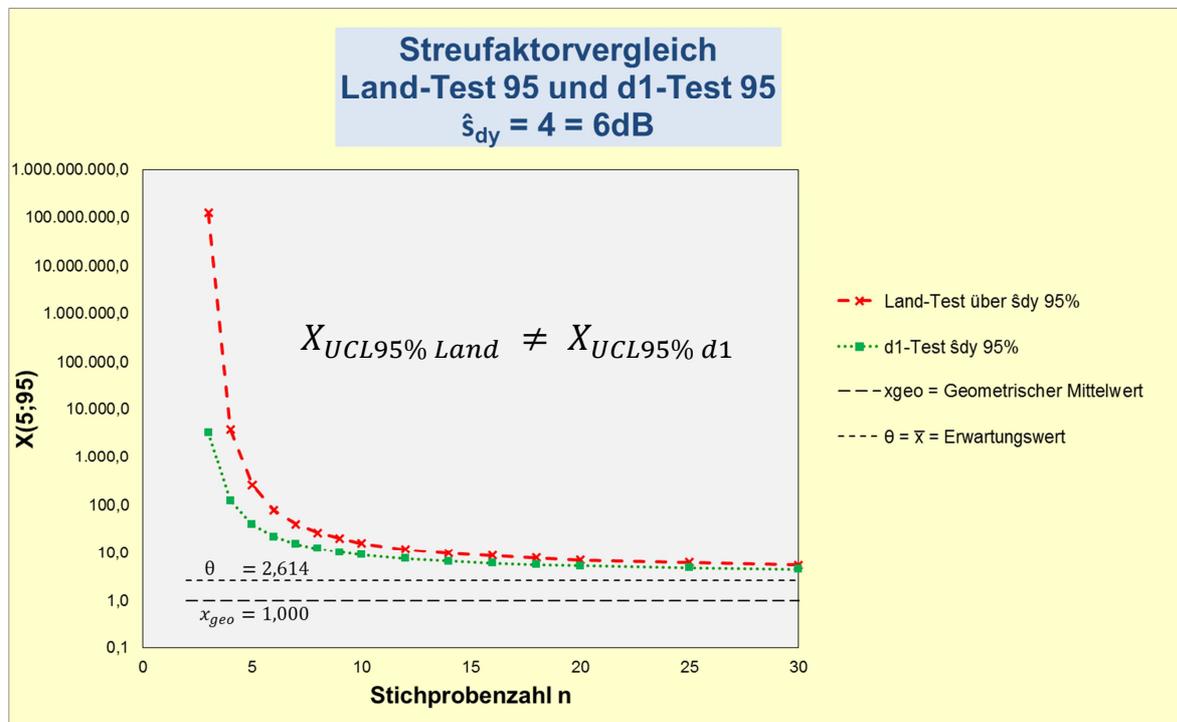


Abbildung 29: Vergleich $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit $X_{UCL95\% \text{ d1-Test}}$

9.2 Vergleich $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit $X_{UCL98,5\% \text{ d1-Test}}$

Vergleicht man das $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit dem $X_{UCL98,5\% \text{ d1-Test}}$ ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung (Abbildung 30).

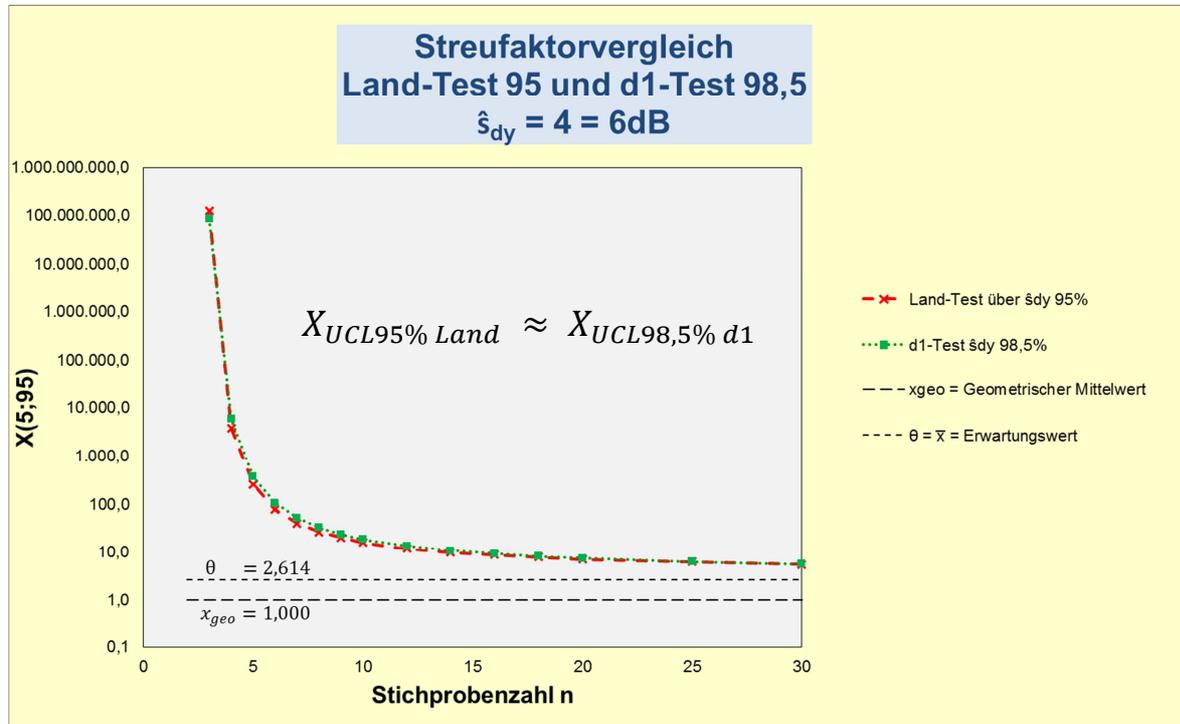


Abbildung 30: Vergleich $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit $X_{UCL98,5\% \text{ d1-Test}}$

Bei kleiner Stichprobenzahl und einem großem Standardstreuungsfaktor s_d haben schon wenige %-Punkte Unterschied für das Signifikanzniveau α einen sehr großen Einfluss auf die resultierende Konfidenzintervallgrenze $X_{UCL95\%}$.

9.3 Vergleich $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit $X_{UCL95\% \text{ dt-Test}}$

Vergleicht man den 95 %-Wert des dt-Tests mit dem 95%-Wert des Land-Tests, ergibt sich relativ zum d1-Test eine bessere Übereinstimmung.

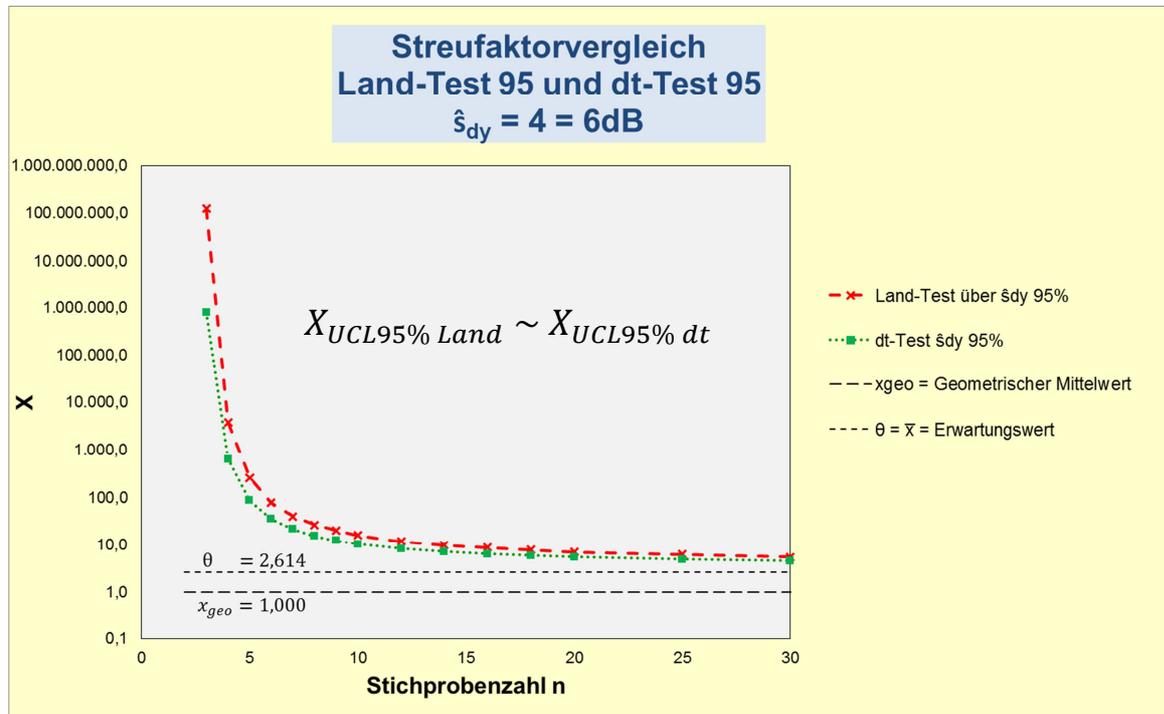


Abbildung 31: Vergleich $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit $X_{UCL95\% \text{ dt-Test}}$

Eine noch bessere Übereinstimmung wird erhalten, wenn man den 96,3%-Wert des dt-Tests mit dem 95%-Land-Test vergleicht (siehe Abschnitt 9.4).

9.4 Vergleich $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit $X_{UCL96,3\% \text{ dt-Test}}$

Vergleicht man den 95 %-Wert des Land-Tests mit dem 96,3%-Wert des dt-Tests, ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung (Abbildung 32).

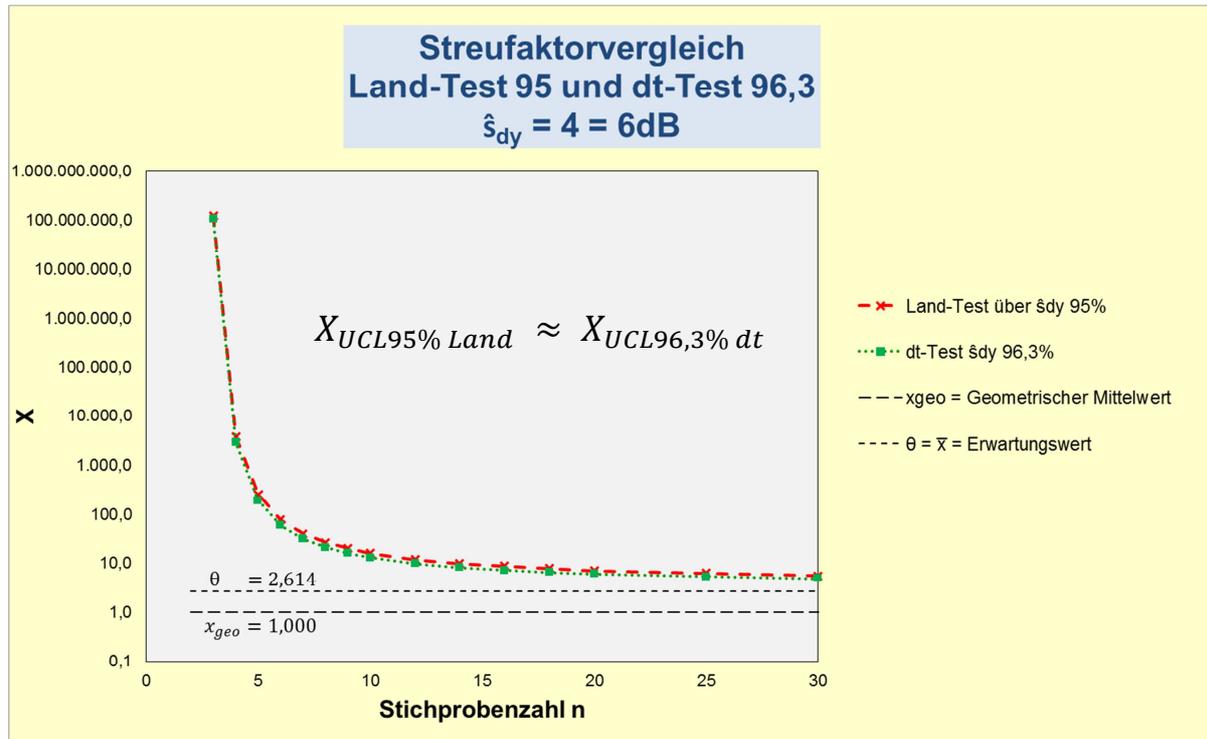


Abbildung 32: Vergleich $X_{UCL95\% \text{ Land-Test}}$ mit $X_{UCL96,3\% \text{ dt-Test}}$

Wie die Abbildungen 31 und 32 zeigen, stimmen der dt-Test und der Land-Test relativ gut überein.

Bei kleiner Stichprobenzahl und einem großem Standardstreu­faktor s_d haben schon wenige %-Punkte Unterschied für das Signifikanzniveau α einen sehr großen Einfluss auf die resultierende Konfidenzintervallgrenze $X_{UCL95\%}$.

10. Streufaktordiagramme

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse von Simulationsexperimenten zu Streufaktoren dargestellt.

Alle Diagramme haben alle den Median von $\mu_x = 1$, bzw. $\mu_{xd} = 1$ (entsprechend $x_{geo} = \theta / e^{\frac{1}{2}(\ln s_d)^2}$ für $n \rightarrow \infty$).

Ab Streufaktordiagramm Nr. 5 (Abbildung 37) wird wegen der Übersichtlichkeit für μ_x und für μ_{xd} nur noch das Formelzeichen μ verwendet.

Von Diagramm zu Diagramm sind dabei jeweils Änderungen der Eingangsparameter vorgenommen worden. Um diese Änderungen nachvollziehen zu können, werden die Änderungen und Schlussfolgerungen jeweils unter dem Diagramm erläutert.

10.1 Summenhäufigkeit Normalverteilung $\sigma_x = 0,01$; $\mu_x = 1$

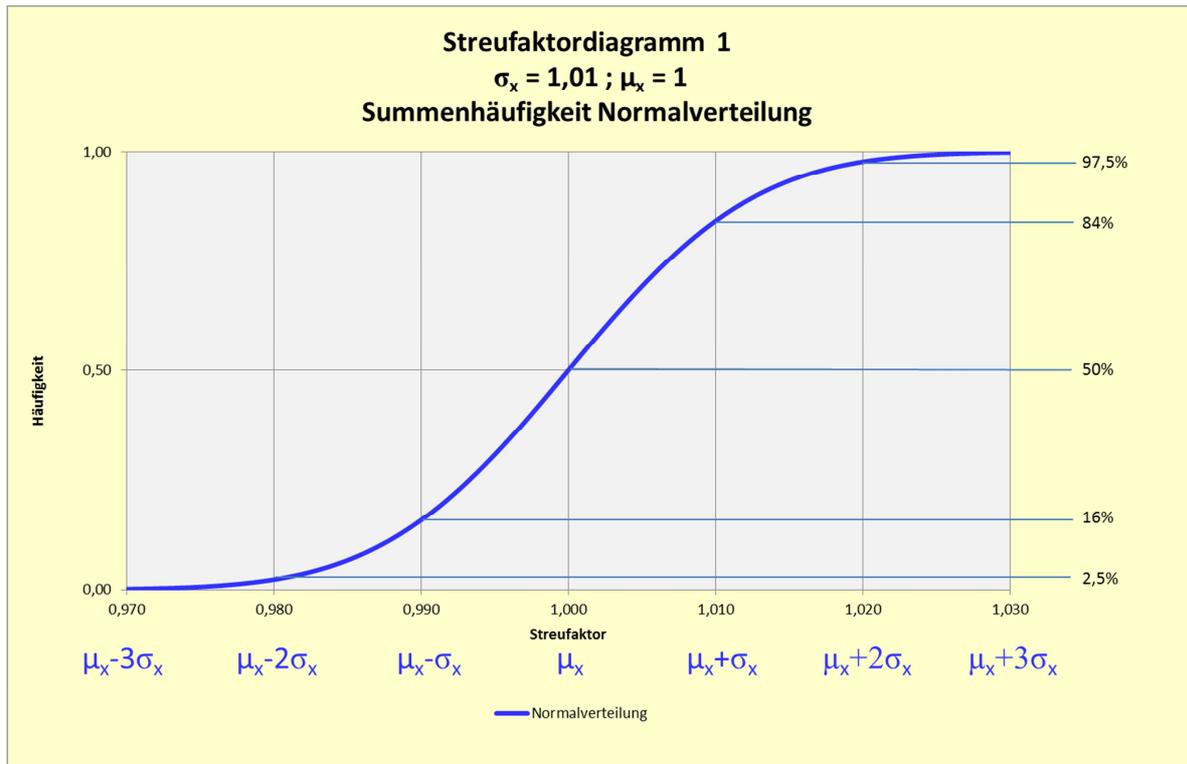


Abbildung 33: Summenhäufigkeit Normalverteilung $\sigma_x = 0,01$, $\mu_x = 1$

In Streuaktordiagramm 1 (Abbildung 33) ist die Summenhäufigkeit der Normalverteilung bei einer kleinen Standardabweichung von $\sigma_x = 0,01$ und $\mu_x = 1$ dargestellt.

Bei großen Stichproben aus einer solchen Normalverteilung erhält man eine Standardabweichung von $s_x = 0,01$ und einen arithmetischen Mittelwert von $\bar{x} = 1$.

Der geometrische Mittelwert x_{geo} bei großen Stichproben wäre jedoch etwas kleiner als 1.

Die Berechnung von \hat{s}_{dx} für Normalverteilungen nach Formel 10 im Abschnitt 2 ergibt:

$$\hat{s}_{dx} = 1 + \frac{\hat{s}_x}{x_{geo}} \approx 1 + \frac{s_x}{\bar{x}} \approx 1 + \frac{0,01}{1} = 1,01$$

Das gleiche Ergebnis wird erhalten, wenn eine große Stichprobe aus einer Lognormalverteilung mit einem Standardstreuaktor von $\sigma_d = 1,01$ genommen wird.

10.2 Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,01$

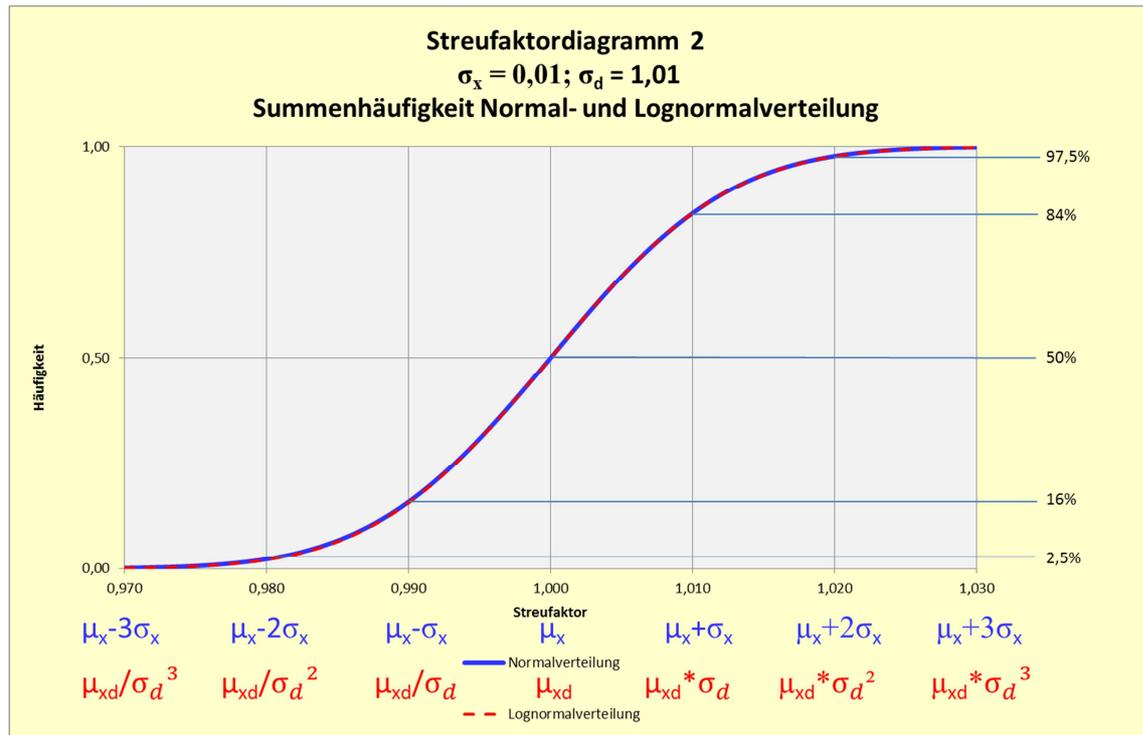


Abbildung 34: Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung $\sigma_d = 1,01$

In Streufaktordiagramm 2 (Abbildung 34) ist die Summenhäufigkeit der Normal- der Lognormalverteilung in einem Diagramm bei einem kleinen Standardstreudefaktor von $\sigma_d = 1,01$ dargestellt. Bei solch kleinen Streuungen ist visuell kein Unterschied zwischen diesen beiden Verteilungsfunktionen erkennbar.

Wie im Abschnitt 2 dargelegt, soll die Normalverteilung bei $n \rightarrow \infty$ um den arithmetischen Mittelwert \bar{x} streuen. Die Lognormalverteilung streut um den geometrischen Mittelwert x_{geo} . Bei einer Normalverteilung ergibt sich, dass auch bei einer annähernd unendlich großen Stichprobe $\mu_x = x_{geo} = \bar{x}$ bzw. θ sein müsste. Dies ist nur bei einem Standardstreudefaktor von $\sigma_d = 1$ möglich.

Eine Normalverteilung ist so betrachtet ein Sonderfall der Lognormalverteilung mit dem Standardstreudefaktor $\sigma_d = 1$, d.h. hier ist keine Streuung vorhanden. Bei einer Lognormalverteilung ist $\mu_{xd} = x_{geo}$ verschieden vom Erwartungswert $\theta = e^{\mu_y + \frac{1}{2}(\ln s_d)^2}$. Bei einer großen Stichprobe ($n \rightarrow \infty$) entspricht $\theta \cong \bar{x}$. Dies trifft bei Stichproben sowohl für Normalverteilungen als auch für Lognormalverteilungen zu.

10.3 Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,3$

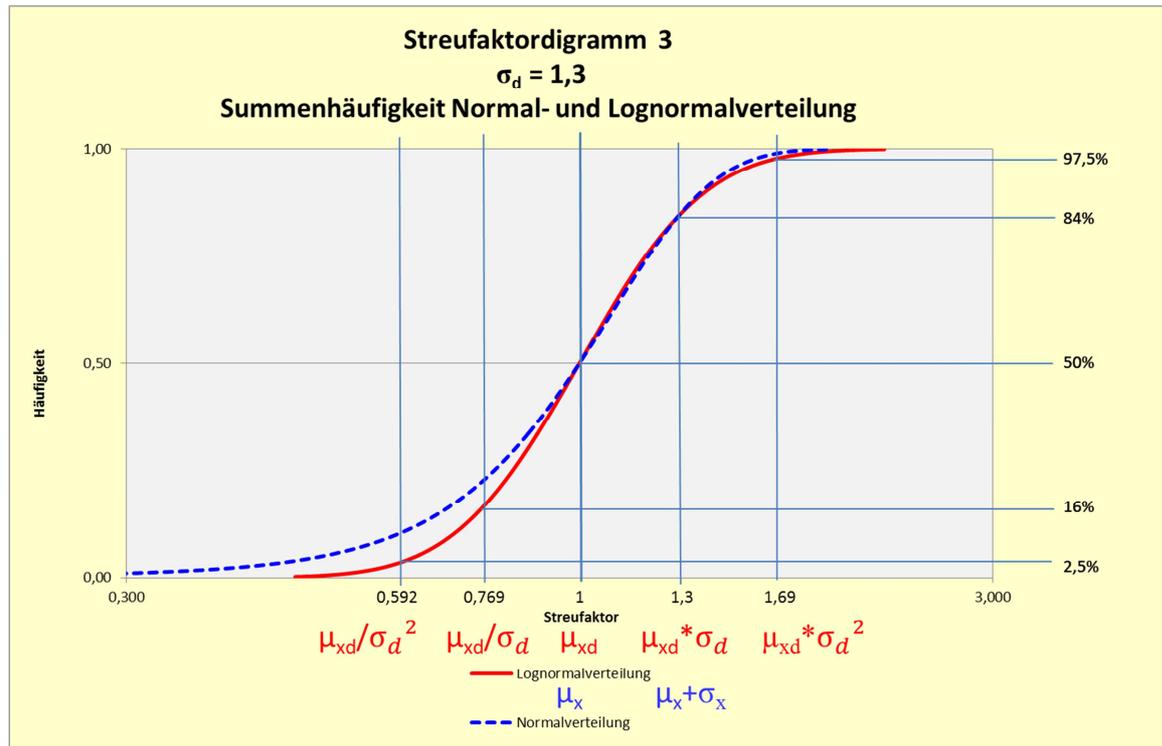


Abbildung 35: Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 1,3$

In Streuaktordiagramm 3 (Abbildung 35) sind die Summenhäufigkeitsfunktionen der Normal- und der Lognormalverteilung in einem Diagramm bei einem Standardstreuaktor von $\sigma_d = 1,3$ dargestellt.

Bei solchen Streuungen ist ein deutlicher Unterschied zwischen diesen beiden Verteilungsfunktionen erkennbar. Üblicherweise wird ab einem Standardstreuaktor von $s_d = 1,33$ bzw. einem Variabilitätskoeffizient von 0,33 von einer Lognormalverteilung ausgegangen [8]. Die obige Normalverteilung wäre somit noch als Normalverteilung akzeptabel.

Eine Lognormalverteilung mit einem Median von $\mu_{xd} = 1$ und einem Standardstreuaktor von $\sigma_d = 1,3$ hat einen Erwartungswert $\theta = 1,035 = e^{\mu_y + \frac{1}{2}(\ln s_d)^2} = x_{geo} * e^{\frac{1}{2}(\ln s_d)^2}$.

Eine Stichprobe aus einer Normalverteilung mit einem empirischen $s_{d\ n \rightarrow \infty}$ von 1,3 und einem empirischen arithmetischen Mittelwert von $\bar{x}_{n \rightarrow \infty} = 1$ hat einen geometrischen Mittelwert von $x_{geo} = \theta / e^{\frac{1}{2}(\ln s_d)^2} = 0,966$. Eine solche „Normalverteilung“ hat ein $\mu_x = 1$ und ein $\mu_{xd} = 0,966$. Alternativ kann eine Lognormalverteilung angenommen werden.

10.4 Summenhäufigkeit Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 4$

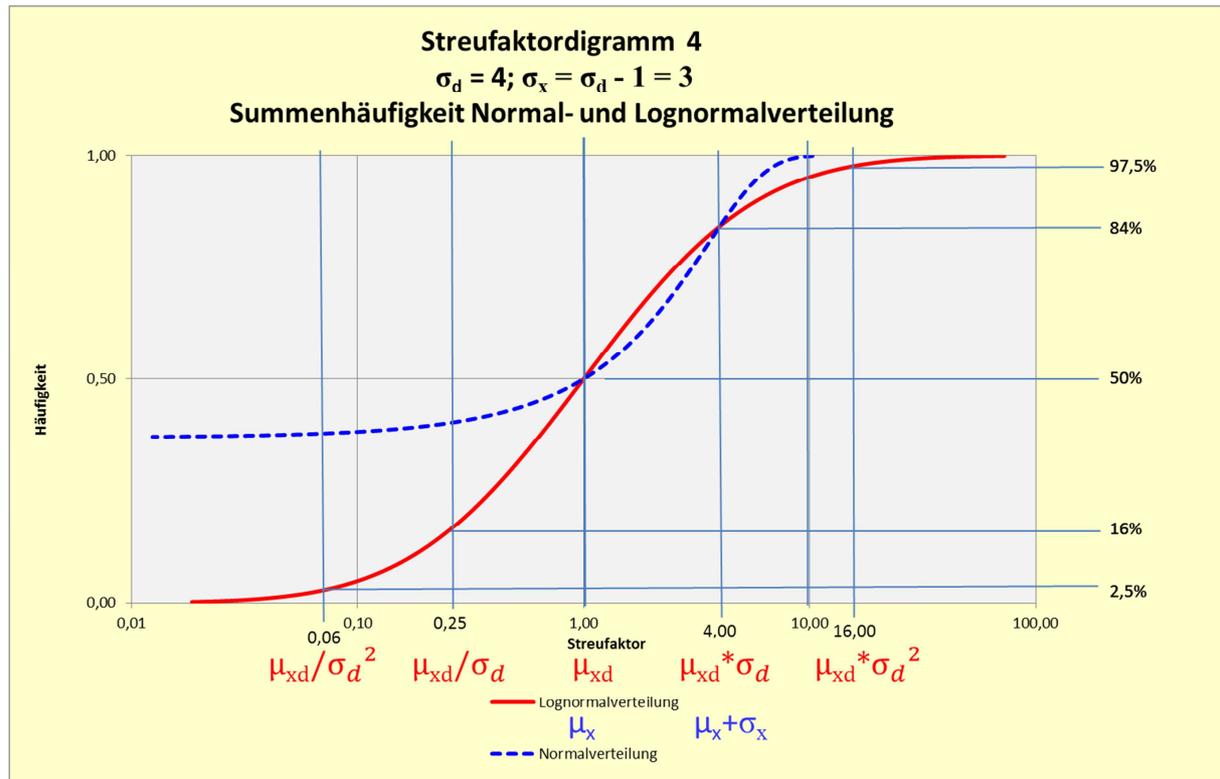


Abbildung 36: Summenhäufigkeitskurve Normal- und Lognormalverteilung bei $\sigma_d = 4$

In Streuaktordigramm 4 (Abbildung 36) sind die Verteilungsfunktion der Normalverteilung und die Verteilungsfunktion der Lognormalverteilung in einem Diagramm bei einem Standardstreuaktor von 4 dargestellt.

Bei solchen Streuungen ist ein noch deutlicherer Unterschied zwischen diesen beiden Verteilungsfunktionen erkennbar.

Beim Vorliegen solch großer Streuungen kann nicht mehr von einer Normalverteilung ausgegangen werden. Üblicherweise wird ab einem Standardstreuaktor $s_d = 1,33$, bzw. einem Variabilitätskoeffizient $V = 0,33$ von einer Lognormalverteilung ausgegangen [8].

10.5 Monte Carlo Simulation s_d und x_{geo} bei $\sigma_d = 4$

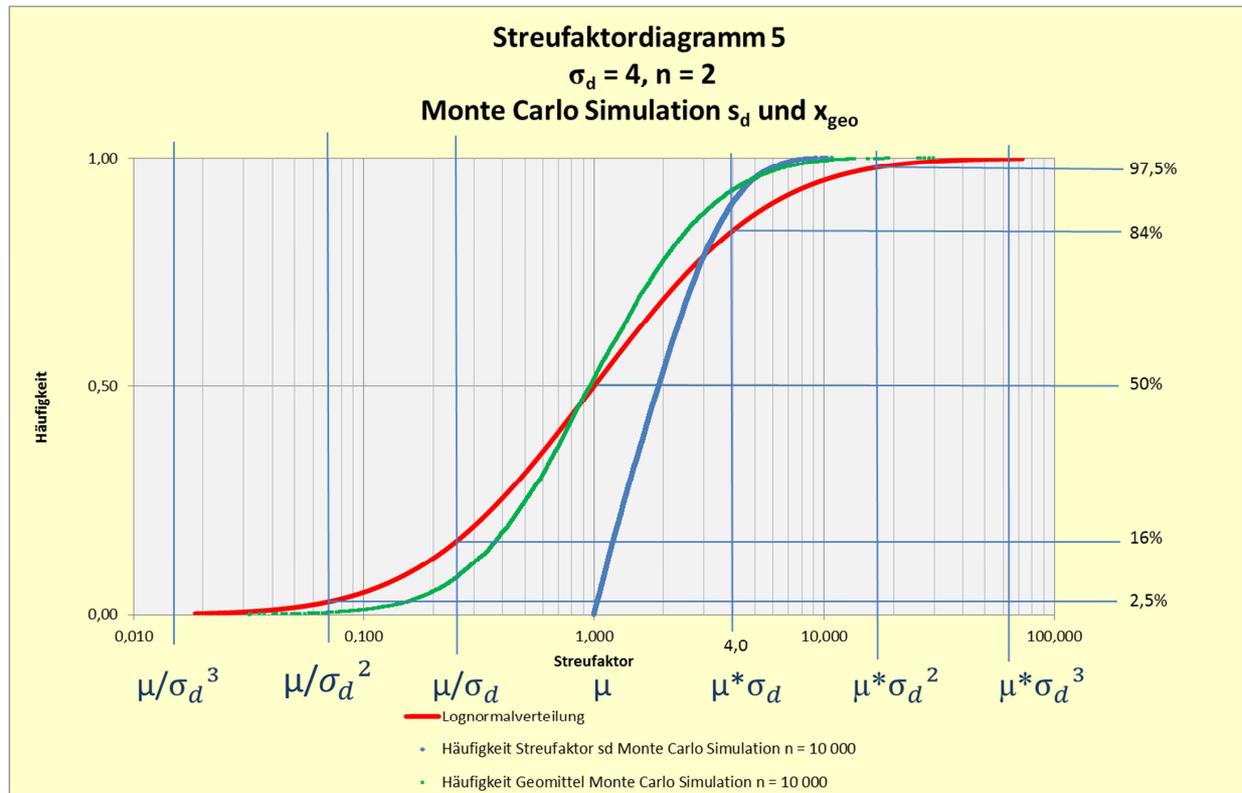


Abbildung 37: Monte Carlo Simulation s_d und x_{geo} bei $\sigma_d = 4$

In Streuaktordiagramm 5 (Abbildung 37) ist eine Lognormalverteilung (rot) mit $\sigma_d = 4$ und zwei Monte Carlo Simulationen aus einer solchen Lognormalverteilung dargestellt.

Erstens ist die Häufigkeitsverteilung des Streufaktors s_d (blau) bei einer Stichprobe mit $n = 2$ aus einer solchen Verteilung bei einer Monte Carlo Simulation mit $n=10\,000$ aufgeführt.

Zweitens ist auch die Häufigkeitsverteilung des Geomittels x_{geo} (grün) bei einer Stichprobe mit $n = 2$ aus einer solchen Verteilung bei einer Monte Carlo Simulation mit $n=10\,000$ aufgeführt.

Im folgenden Streuaktordiagramm 6 (Abbildung 38) ist die Überlagerung dieser beiden Faktoren dargestellt, so wie sie bei einer Stichprobe erhalten werden.

Die Erstellung von Monte Carlo Simulationen wie in Abbildung 37 mit Excel wird in Anlage 1 erläutert.

10.6 Monte Carlo Simulation $x_{geo} * s_d$ und x_{geo}/s_d bei $\sigma_d = 4$

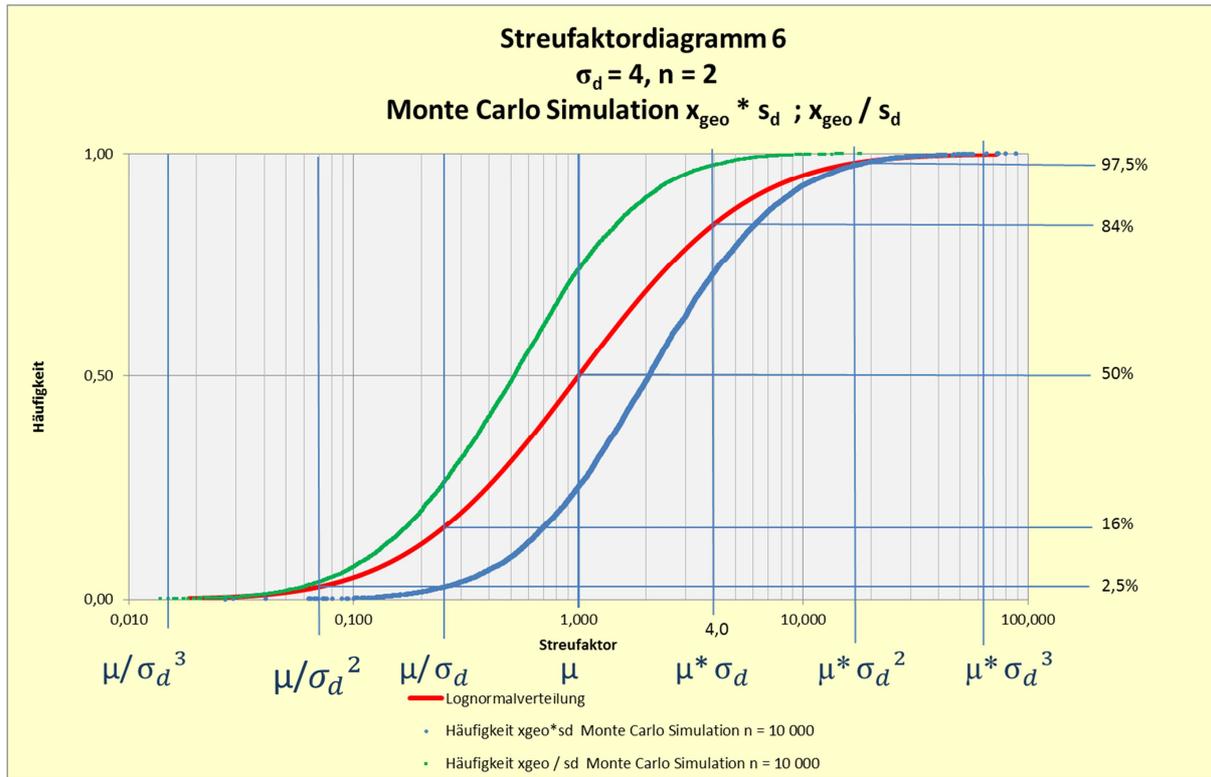


Abbildung 38: Monte Carlo Simulation $x_{geo} * s_d$ und x_{geo}/s_d bei $\sigma_d = 4$

In Streifaktordiagramm 6 (Abbildung 38) ist die Überlagerung des geometrischen Mittelwerts x_{geo} mit dem Standardstriefaktor s_d dargestellt, so wie diese Parameter bei einer Stichprobe mit $n = 2$ erhalten werden.

Das Streifaktordiagramm 6 (Abbildung 38) hat einen relativ großen Standardstriefaktor von $\sigma_d = 4$. Das folgende Streifaktordiagramm 7 (Abbildung 39) hat einen relativ kleinen Standardstriefaktor von $\sigma_d = 1,01$.

10.7 Monte Carlo Simulation $x_{geo} * s_d$ und x_{geo}/s_d bei $\sigma_d = 1,01$

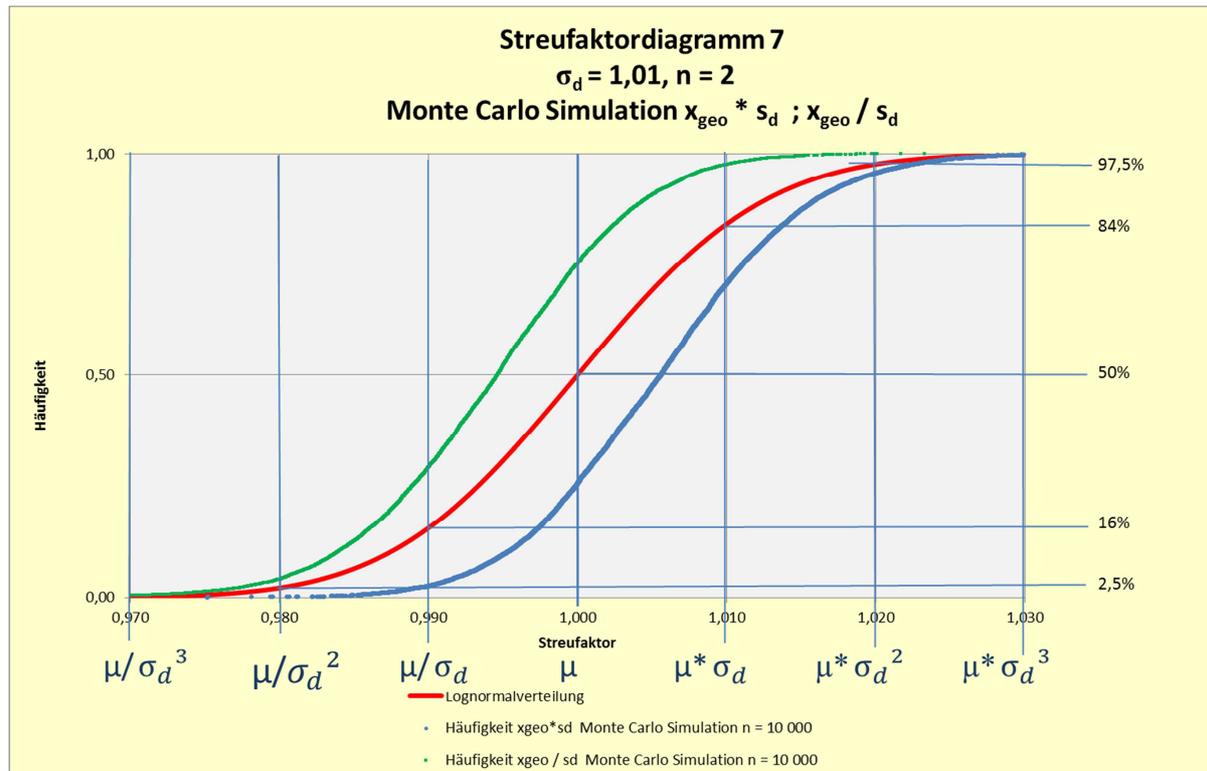


Abbildung 39: Monte Carlo Simulation $x_{geo} * s_d$ und x_{geo}/s_d bei $\sigma_d = 1,01$

Das vorangegangene Streufaktordiagramm 6 (Abbildung 38) hat einen relativ großen Standardstreu­faktor von $\sigma_d = 4$. Das Streufaktordiagramm 7 (Abbildung 39) hat einen relativ kleinen Standardstreu­faktor von $\sigma_d = 1,01$.

Beim Vergleich der Streufaktordiagramme 6 und 7 (Abbildungen 38 und 39) fällt eine große Ähnlichkeit der Streuungen auf.

Da ein Standardstreu­faktor von $\sigma_d = 1,01$ (Streufaktordiagramm 7) als Normalverteilung betrachtet werden kann und auch ein Standardstreu­faktor von $\sigma_d = 4$ (Streufaktordiagramm 6) als Lognormalverteilung betrachtet werden muss, ergibt sich beim Vergleich der Streufaktordiagramme 6 und 7 (Abbildungen 38 und 39) eine große Ähnlichkeit des Streuverhaltens von Normal- und Lognormalverteilungen.

10.8 Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n=3$ bei $\sigma_d = 1,01$

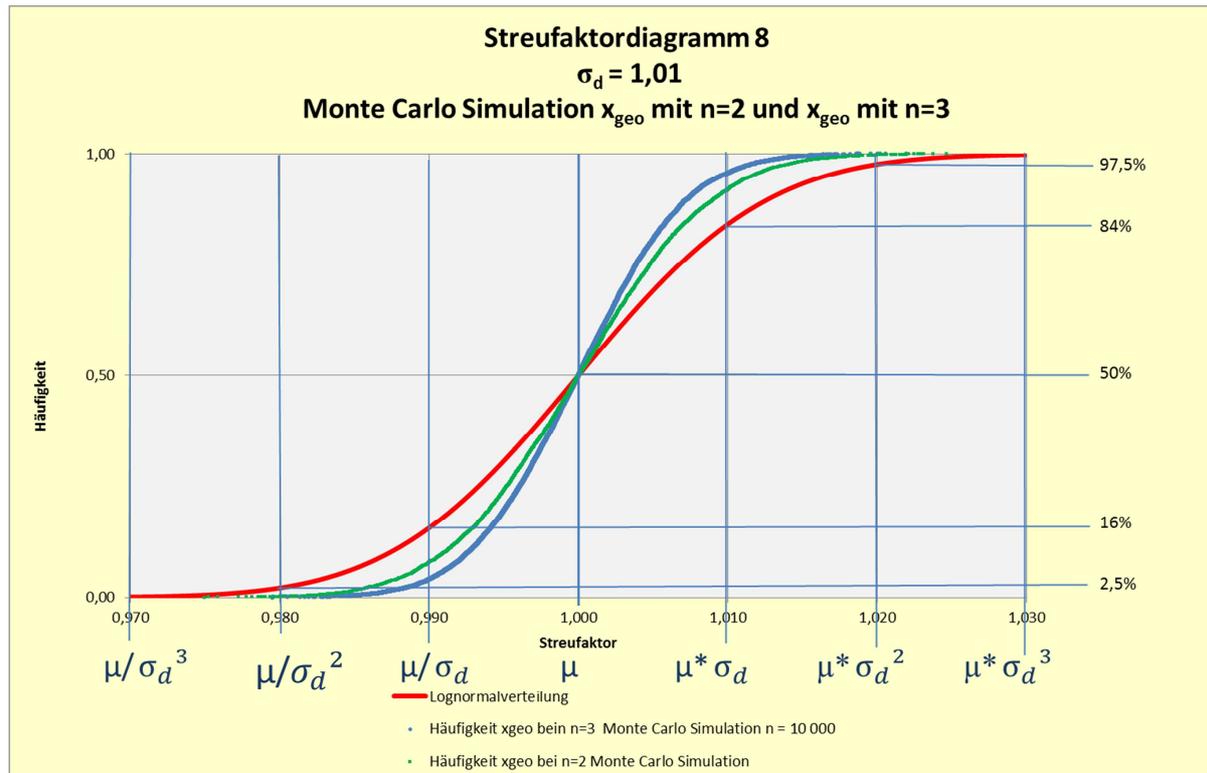


Abbildung 40: Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 1,01$

In Streuaktordiagramm 8 (Abbildung 40) ist die Summenhäufigkeit der geometrischen Mittelwerte x_{geo} bei einer Stichprobe mit $n = 2$ und $n = 3$ bei einem Standardstreuungsfaktor von $\sigma_d = 1,01$ dargestellt.

Im folgenden Streuaktordiagramm 9 (Abbildung 41) sind die erhaltenen Stichproben mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$ potenziert worden, um zu zeigen, dass die dann erhaltene Summenhäufigkeitskurve der Summenhäufigkeitskurve der Normalverteilung ($s_d < 1,33$) entspricht.

10.9 Monte Carlo Simulation $x_{\text{geo}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ mit $n = 2$ und $x_{\text{geo}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 1,01$

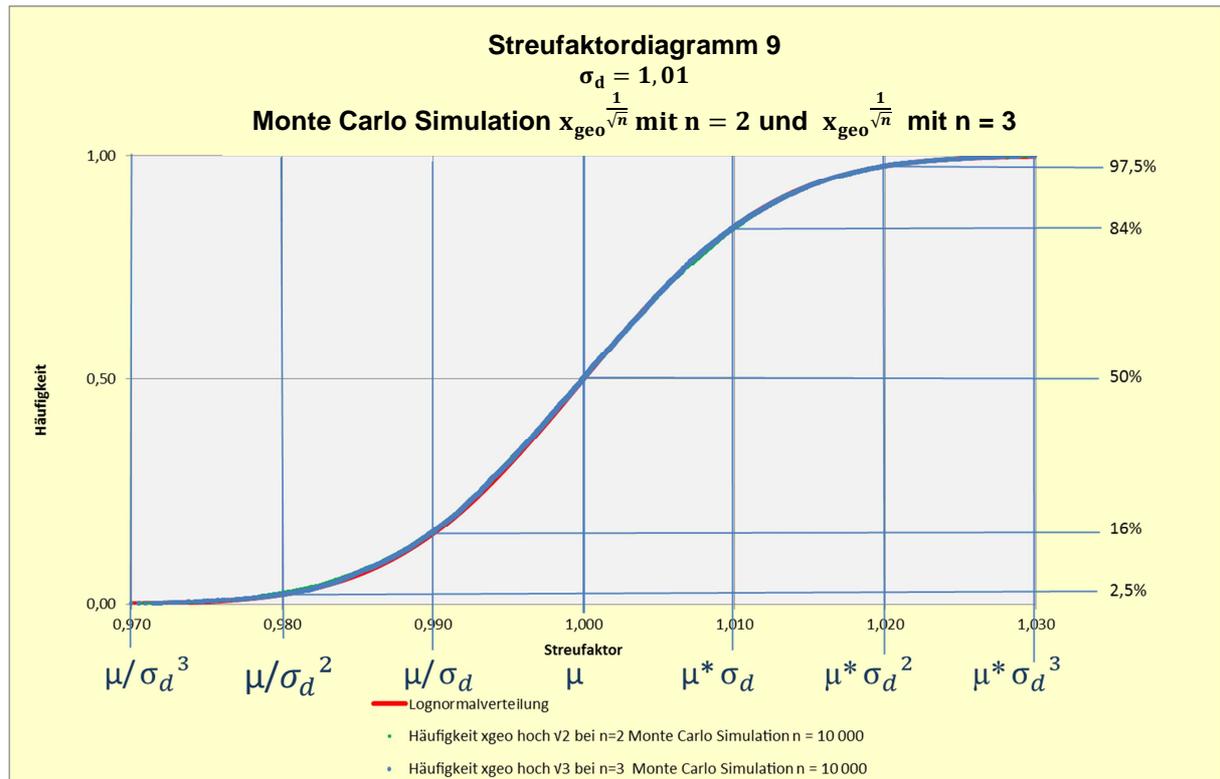


Abbildung 41: Monte Carlo Simulation $x_{\text{geo}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ mit $n = 2$ und $x_{\text{geo}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 1,01$

Im Streufaktordiagramm 9 (Abbildung 41) sind die erhaltenen Stichproben von Streufaktordiagramm 8 (Abbildung 40) mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$ potenziert worden, um zu zeigen, dass die dann erhaltene Summenhäufigkeitskurve der Summenhäufigkeitskurve der Lognormalverteilung entspricht.

Beim Gauß-Test wird davon ausgegangen, dass die Streuung bei Normalverteilungen mit $s_x \cdot Z/\sqrt{n}$ abnimmt. Aus den Streufaktordiagrammen 8 und 9 (Abbildungen 40 und 41) lässt sich schließen, dass die Streuung bei Normalverteilungen auch mit dem Faktor $s_d^{\frac{Z}{\sqrt{n}}}$ abnimmt.

10.10 Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 4$

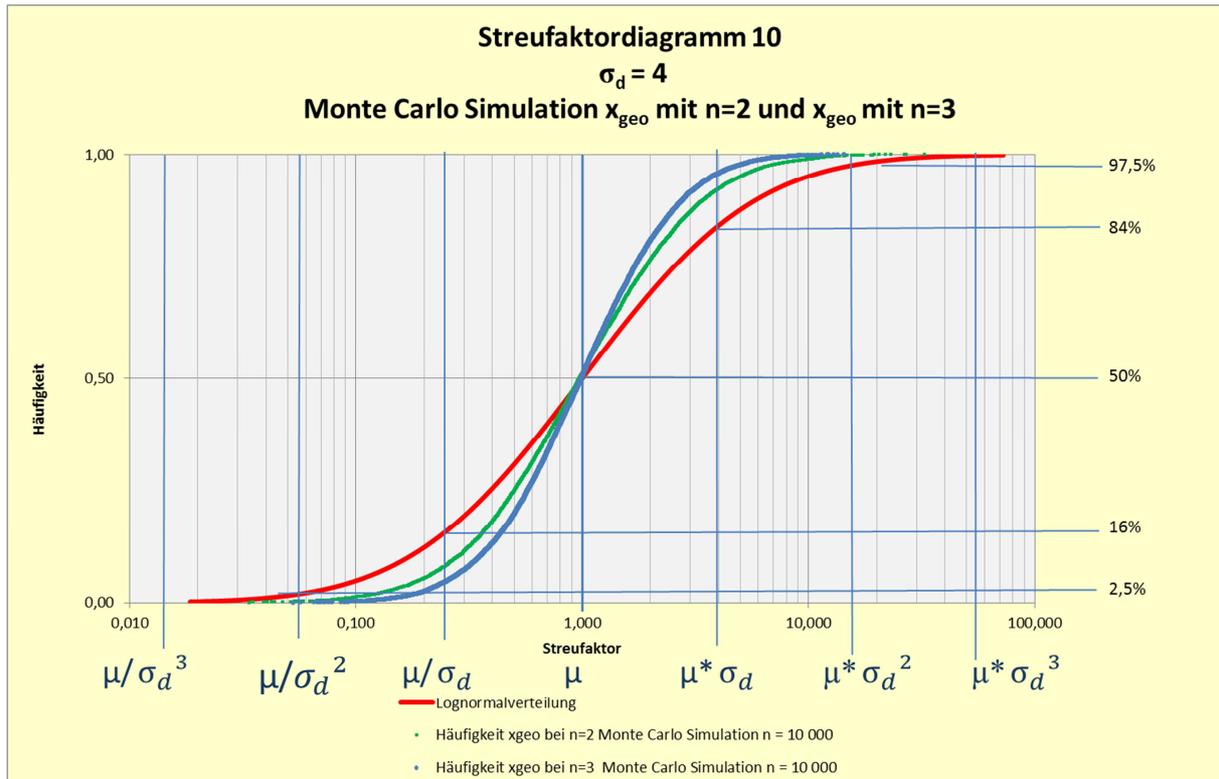


Abbildung 42: Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 4$

Im Streuaktordiagramm 10 (Abbildung 42) ist die Summenhäufigkeit der geometrischen Mittelwerte x_{geo} bei einer Stichprobe mit $n = 2$ und $n = 3$ bei einem Standardstreuaktor von $\sigma_d = 4$ dargestellt.

Im folgenden Streuaktordiagramm 11 (Abbildung 43) sind die erhaltenen Stichproben mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$ potenziert worden, um zu zeigen, dass die dann erhaltene Summenhäufigkeitskurve der Summenhäufigkeitskurve der Lognormalverteilung ($s_d > 1,33$) entspricht.

10.11 Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 2$ und x_{geo} mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 4$

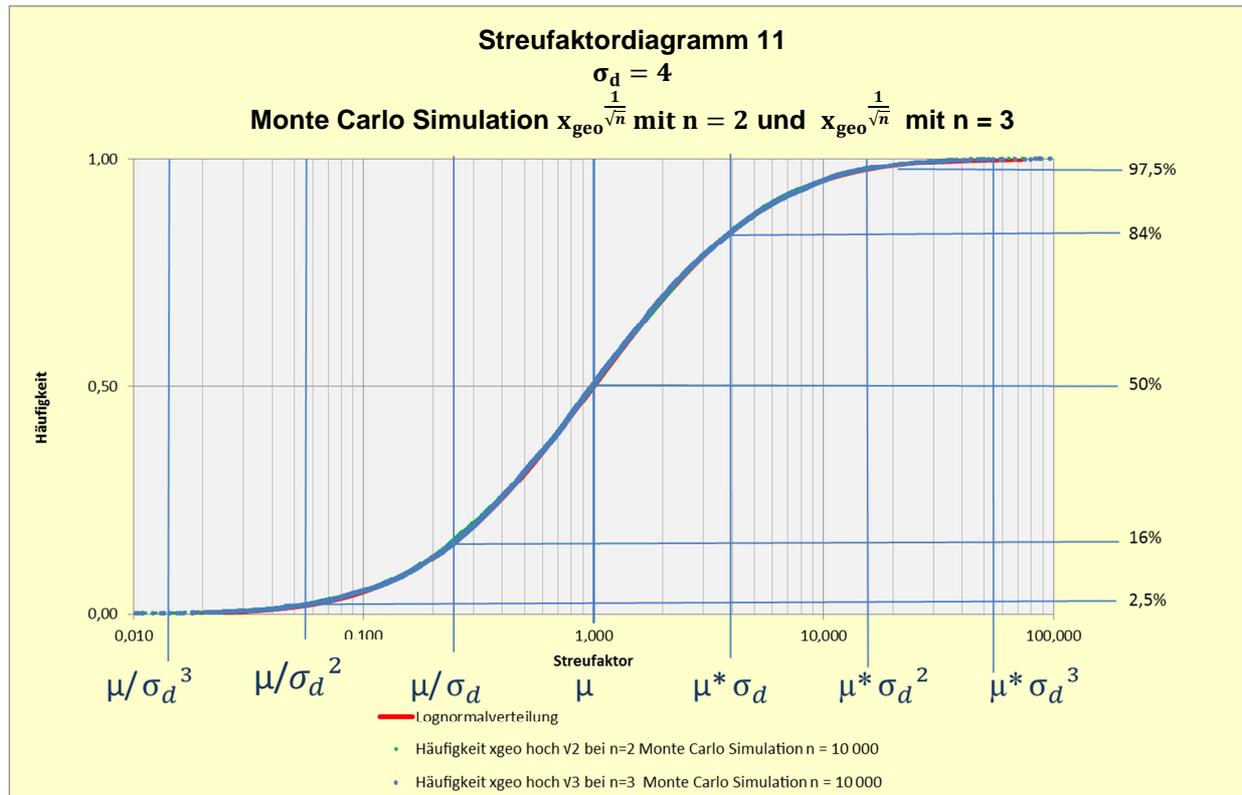


Abbildung 43: Monte Carlo Simulation $x_{geo}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ mit $n = 2$ und $x_{geo}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ mit $n = 3$ bei $\sigma_d = 4$

Im Streuaktordiagramm 11 (Abbildung 43) sind die erhaltenen Stichproben von Streuaktordiagramm 10 (Abbildung 42) mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$ potenziert worden, um zu zeigen, dass die dann erhaltene Summenhäufigkeitskurve der Summenhäufigkeitskurve der Lognormalverteilung ($s_d > 1,33$) entspricht.

Beim Gauß-Test für die Normalverteilung wird davon ausgegangen, dass die Streuung mit $s_x \cdot Z/\sqrt{n}$ abnimmt, was in etwa dem Faktor $s_d^{\frac{Z}{\sqrt{n}}}$ bei kleinem s_d entspricht.

Aus den Streuaktordiagrammen 10 und 11 (Abbildungen 42 und 43) lässt sich schließen, dass die Streuung auch bei Lognormalverteilungen mit dem Faktor $s_d^{\frac{Z}{\sqrt{n}}}$ abnimmt.

Mit dem Standardstreuaktor s_d lässt sich somit die Streuung einer Normalverteilung und die Streuung einer Lognormalverteilung beschreiben.

Der Gauß-Test ist mit Hilfe des Standardstreuaktors s_d auch auf für Lognormalverteilungen ($s_d > 1,33$) anwendbar.

10.12 Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 50$ und s_d mit $n = 50$ bei $\sigma_d = 1,01$

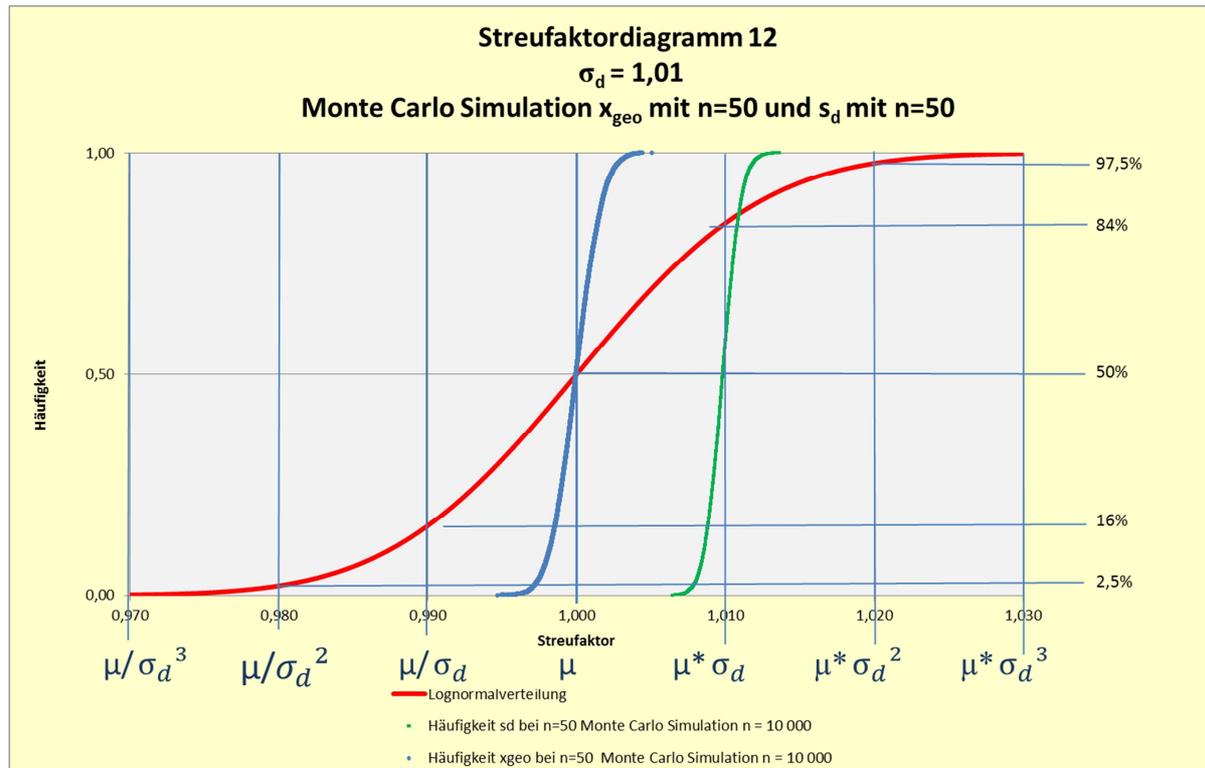


Abbildung 44: Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 50$ und s_d mit $n = 50$ bei $\sigma_d = 1,01$

In Streifaktordiagramm 12 (Abbildung 44) ist die Summenhäufigkeit des geometrischen Mittelwertes x_{geo} und die Summenhäufigkeit des Standardstriefaktors s_d bei einer Stichprobe mit $n = 2$ und einem Standardstriefaktor von $\sigma_d = 1,01$ dargestellt.

Hier ist ein „paralleler“ Verlauf dieser beiden Kurven erkennbar. Der geometrische Mittelwert x_{geo} streut um den Median μ . Der empirisch ermittelte Standardstriefaktor s_d streut um den wahren Standardstriefaktor σ_d .

10.13 Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 50$ und s_d mit $n = 50$ bei $\sigma_d = 4$

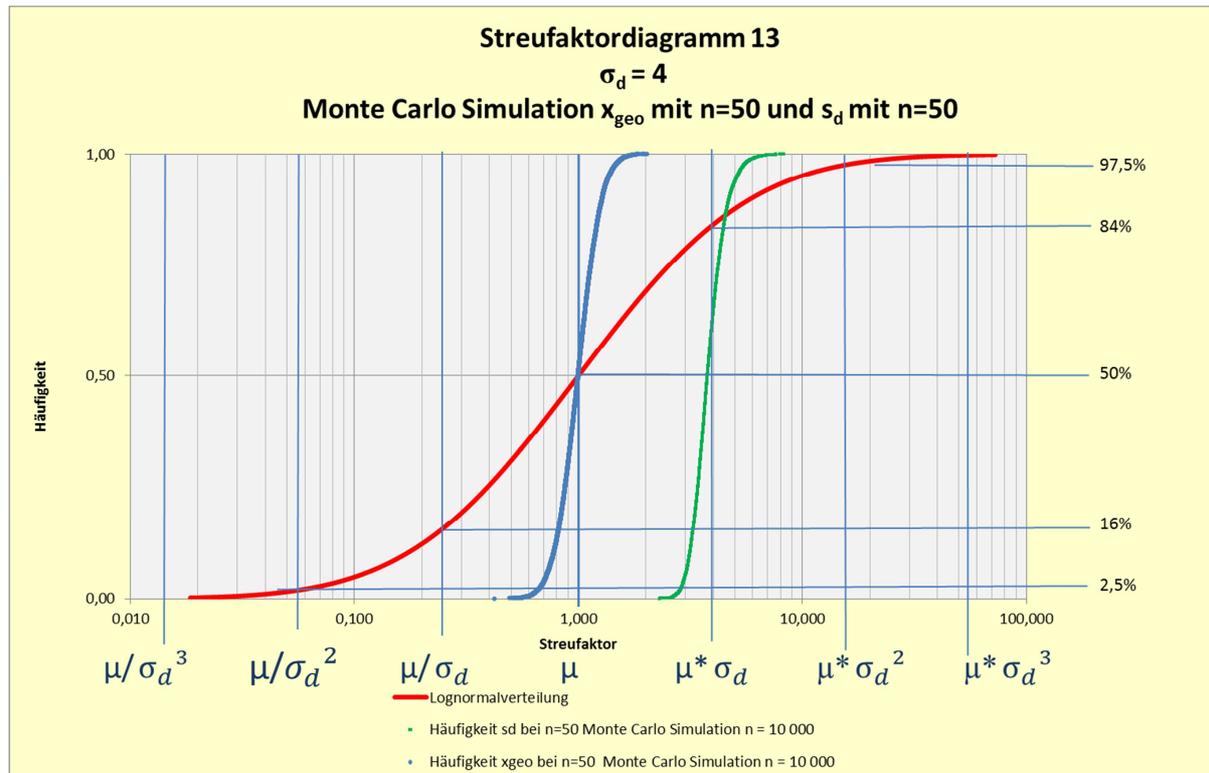


Abbildung 45: Monte Carlo Simulation x_{geo} mit $n = 50$ und s_d mit $n = 50$ bei $\sigma_d = 4$

In Streufaktordiagramm 13 (Abbildung 45) ist die Summenhäufigkeit des geometrischen Mittelwertes x_{geo} und die Summenhäufigkeit des Standardstreu factors s_d bei einer Stichprobe mit $n = 2$ und einem Standardstreu factor von $\sigma_d = 4$ dargestellt.

Auch hier ist ein „paralleler“ Verlauf dieser beiden Kurven erkennbar. Der geometrische Mittelwert x_{geo} streut um den Median μ . Der empirisch ermittelte Standardstreu factor s_d streut um den wahren Standardstreu factor σ_d .

Der Vergleich der Streufaktordiagramme 12 und 13 (Abbildungen 44 und 45) zeigt, dass die Streuverhalten einer Normalverteilung mit $s_d = 1,01$ dem Streuverhalten einer Lognormalverteilung mit $s_d = 4$ sehr ähnlich ist.

10.14 SF_{t-test} und $SF_{mod \chi-Test}$ im Vergleich bei $\sigma_d = 1,01$

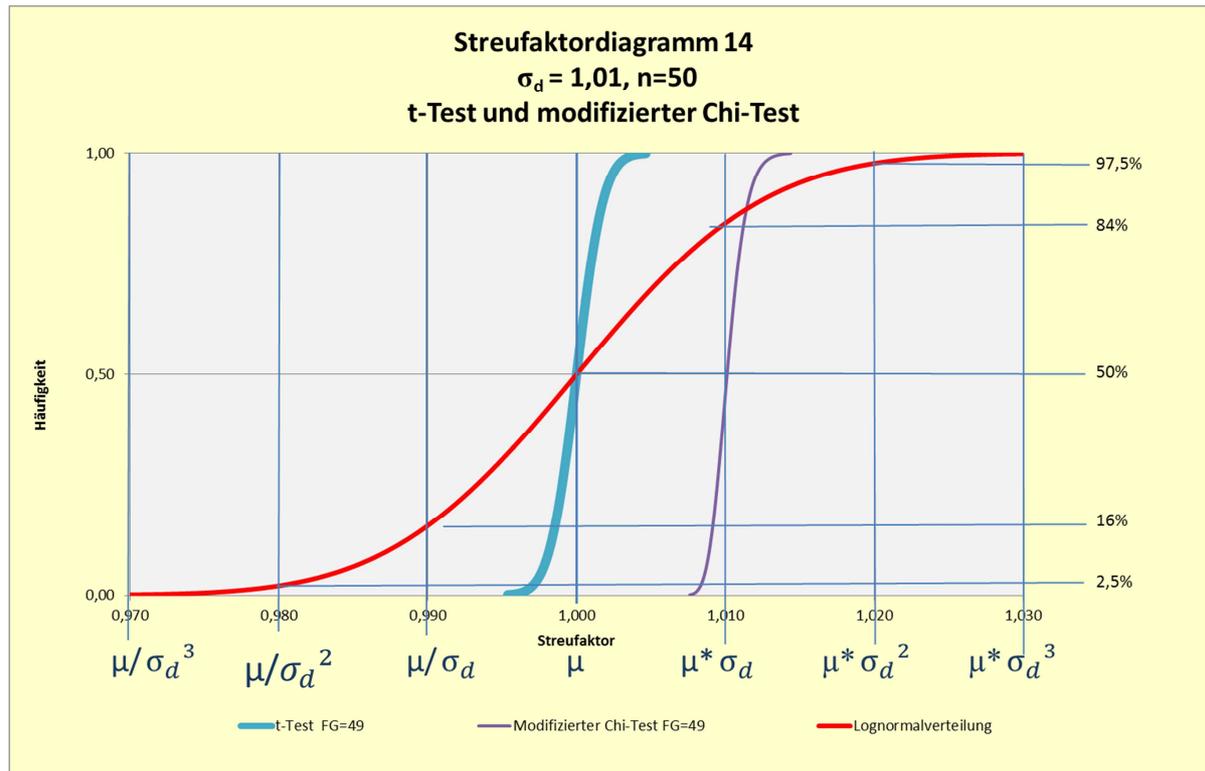


Abbildung 46: SF_{t-test} und $SF_{mod \chi-Test}$ im Vergleich bei $\sigma_d = 1,01$

In Streufaktordiagramm 14 (Abbildung 46) sind die Streufaktoren des t-Tests (SF_{t-Test}) und die Streufaktoren des modifizierten χ -Tests ($SF_{mod \chi-Test}$) in einem Diagramm dargestellt.

Die Streufaktoren des t-Tests wurden mit folgender Formel berechnet:

$SF_{t-Test} = \frac{\hat{s}_x \cdot t}{\sqrt{n-1}}$ $\cong \hat{s}_{dx} \frac{t}{\sqrt{n-1}} \text{ bei Normalverteilung}$	SF_{t-Test} = Streufaktoren des t-Tests t = Perzentil der t-Verteilung FG 49 (Anlage 4) n = Stichprobenzahl \hat{s}_x = Standardabweichung lineare Ebene \hat{s}_{dx} = Standardstreufoaktor aus \hat{s}_x
---	--

Die Streufaktoren des modifizierten χ -Tests wurden mit folgender Formel berechnet:

$SF_{mod \chi-Test} = s_d \frac{Z84 \cdot \sqrt{n}}{\chi} = s_d \frac{1 \cdot \sqrt{n}}{\chi}$	$SF_{mod \chi-Test}$ = Streufaktor des mod χ -Test χ = Perzentil der χ -Test FG 49 (Anlage 4) Z = Perzentil der Normalverteilung (Anlage 4)
--	--

Auch hier ist ein „paralleler“ Verlauf dieser beiden Kurven erkennbar. Der geometrische Mittelwert x_{geo} streut um den Median μ . Der modifizierte χ -Test streut um den Standardstreufoaktor σ_d .

10.15 SF_{t-test} und $SF_{mod\chi-Test}$ im Vergleich mit MCS x_{geo} und s_d bei $\sigma_d = 1,01$

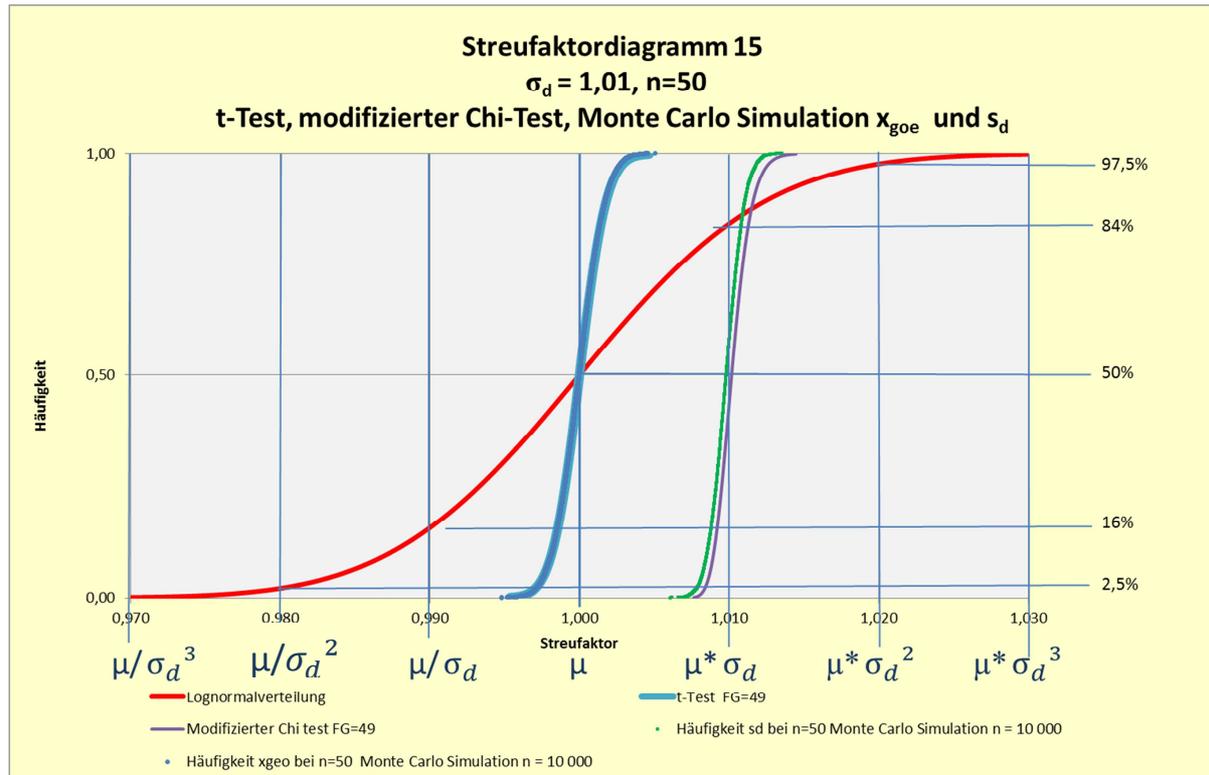


Abbildung 47: SF_{t-test} und $SF_{mod\chi-Test}$ im Vergleich mit MCS x_{geo} und s_d bei $\sigma_d = 1,01$

In Streufaktordiagramm 15 (Abbildung 47) sind die Streufaktoren des t-Tests und die Streufaktoren des modifizierten χ -Tests im Vergleich mit Monte Carlo Simulationen von x_{geo} und s_d in einem Diagramm bei $\sigma_d = 1,1$ dargestellt.

Bei $\sigma_d = 1,01$ ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen den berechneten Streufaktoren SF_{t-Test} und der Monte-Carlo-Simulation aus 10000 Zufallsexperimenten für x_{geo} . Ebenso zeigt sich hier eine recht gute Übereinstimmung zwischen berechneten Streufaktoren $SF_{mod\chi-Test}$ und der Monte-Carlo-Simulation aus 10000 Zufallsexperimenten für s_d .

10.16 $SF_{Log-t-test}$ und $SF_{mod\chi-Test}$ im Vergleich mit MCS x_{geo} und s_d bei $\sigma_d = 4$

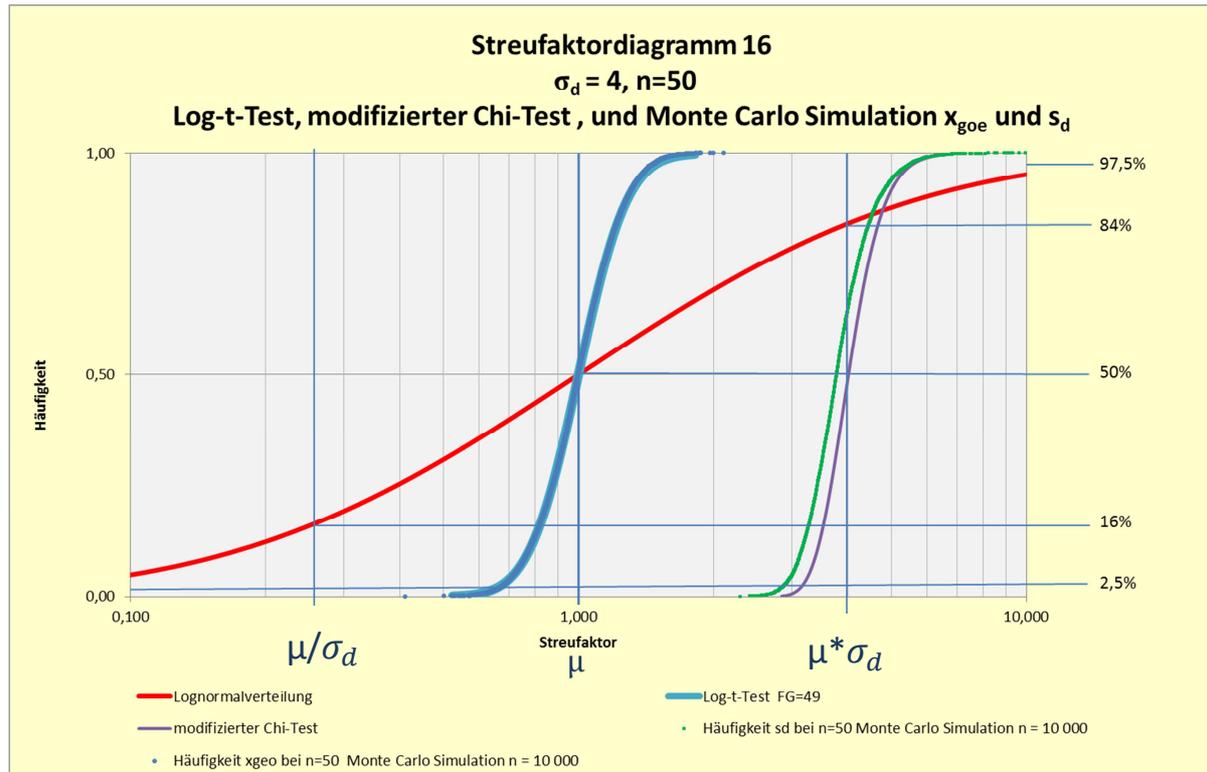


Abbildung 48: $SF_{Log-t-test}$ und $SF_{mod\chi-Test}$ im Vergleich mit MCS x_{geo} und s_d bei $\sigma_d = 4$

In Streufaktordiagramm 16 (Abbildung 48) sind die Streufaktoren des Log-t-Tests und die Streufaktoren des modifizierten χ -Tests im Vergleich mit Monte Carlo Simulationen von x_{geo} und s_d in einem Diagramm bei $\sigma_d = 4$ dargestellt.

Die Streufaktoren des Log-t-Tests wurden mit folgender Formel berechnet:

$SF_{Log-t-Test} = s_d \frac{t}{\sqrt{n-1}}$	$SF_{Log-t-Test}$ = Streufaktoren des Log-t-Tests t = Perzentil der t-Verteilung FG 49 (Anlage 4) s_d = Standardstreudefaktor
--	---

Bei $\sigma_d = 4$ ergibt sich auch eine recht gute Übereinstimmung zwischen den berechneten Streufaktoren $SF_{Log-t-Test}$ und der Monte-Carlo-Simulation aus 10000 Zufallsexperimenten für x_{geo} .

Auch zeigt sich hier eine recht gute Übereinstimmung zwischen berechnete Streufaktoren $SF_{mod\chi-Test}$ und der Monte-Carlo-Simulation aus 10000 Zufallsexperimenten für s_d .

10.17 SF-Log- $t_{UCL84\%}$ und SF- $d1_{UCL84\%}$ und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$

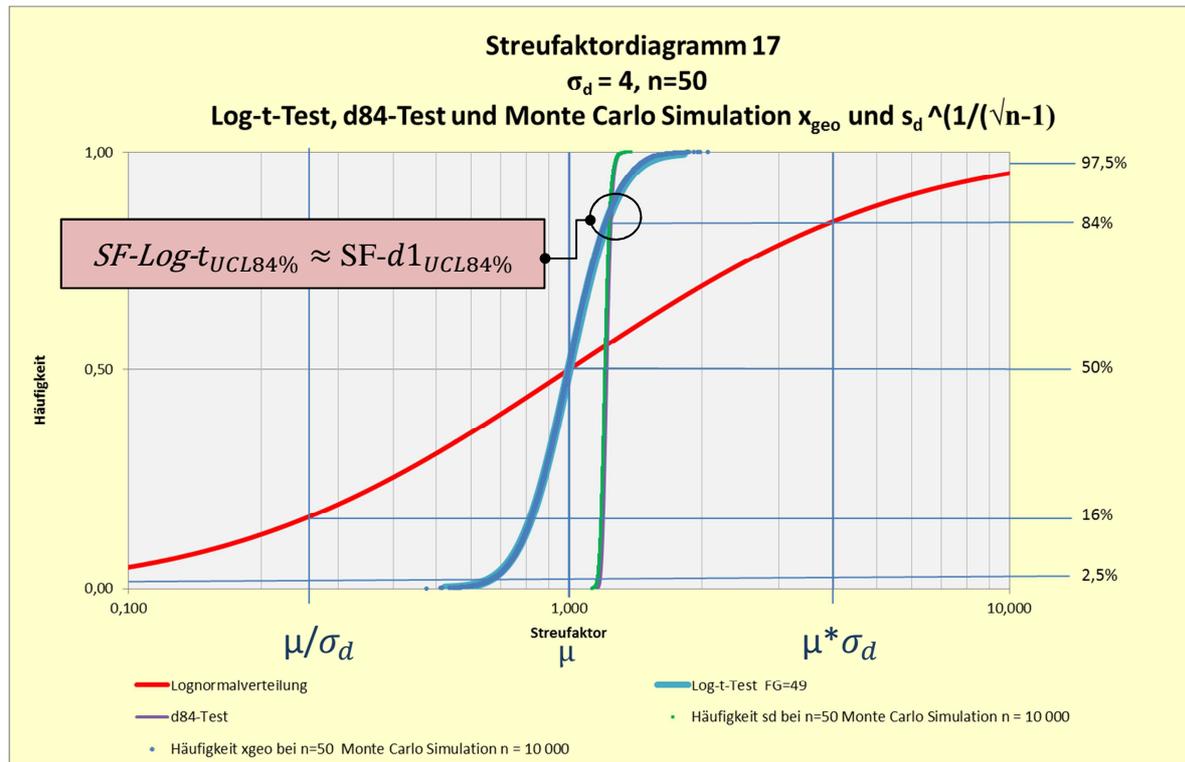


Abbildung 49: SF-Log- $t_{UCL84\%}$ und SF- $d1_{UCL84\%}$ und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$

In Streufaktordiagramm 17 (Abbildung 49) sind die Streufaktoren des Log-t-Tests und des d1-Tests im Vergleich mit Monte Carlo Simulationen von x_{geo} und s_d in einem Diagramm bei $\sigma_d = 4$ dargestellt.

Der Streufaktor $SF-Log-t_{UCL84\%}$ des Log-t-Tests berechnet sich nach folgender Formel:

$SF-Log-t_{UCL84\%} = s_d \frac{t_{84}}{\sqrt{n-1}} = s_d \frac{t_{84}}{\sqrt{49}}$	$SF-Log-t_{UCL84\%}$ = Streufaktor des Log-t-Tests t_{84} = 84% Perzentil der t-Verteilung FG = 49 (Anlage 4) n = Stichprobenzahl
---	---

Der Streufaktor $SF-d1_{UCL84\%}$ des d1-Tests berechnet sich nach folgender Formel:

$SF-d1_{UCL84\%} = s_d \frac{Z_{84}}{\chi_{84}} = s_d \frac{1,0}{\chi_{84}}$	$SF-d1_{UCL84\%}$ = 84%-Streufaktor des d1-Tests χ_{84} = Perzentil des χ -Test FG = 49 (Anlage 4) Z_{84} = 84% Perzentil der Normalverteilung (Anlage 4)
--	---

Bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$ ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen $SF-Log-t_{UCL84\%}$ und $SF-d1_{UCL84\%}$ und den entsprechenden Monte Carlo Simulationen.

10.18 SF-Log-t_{UCL95%} und SF-d1_{UCL95%} und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$

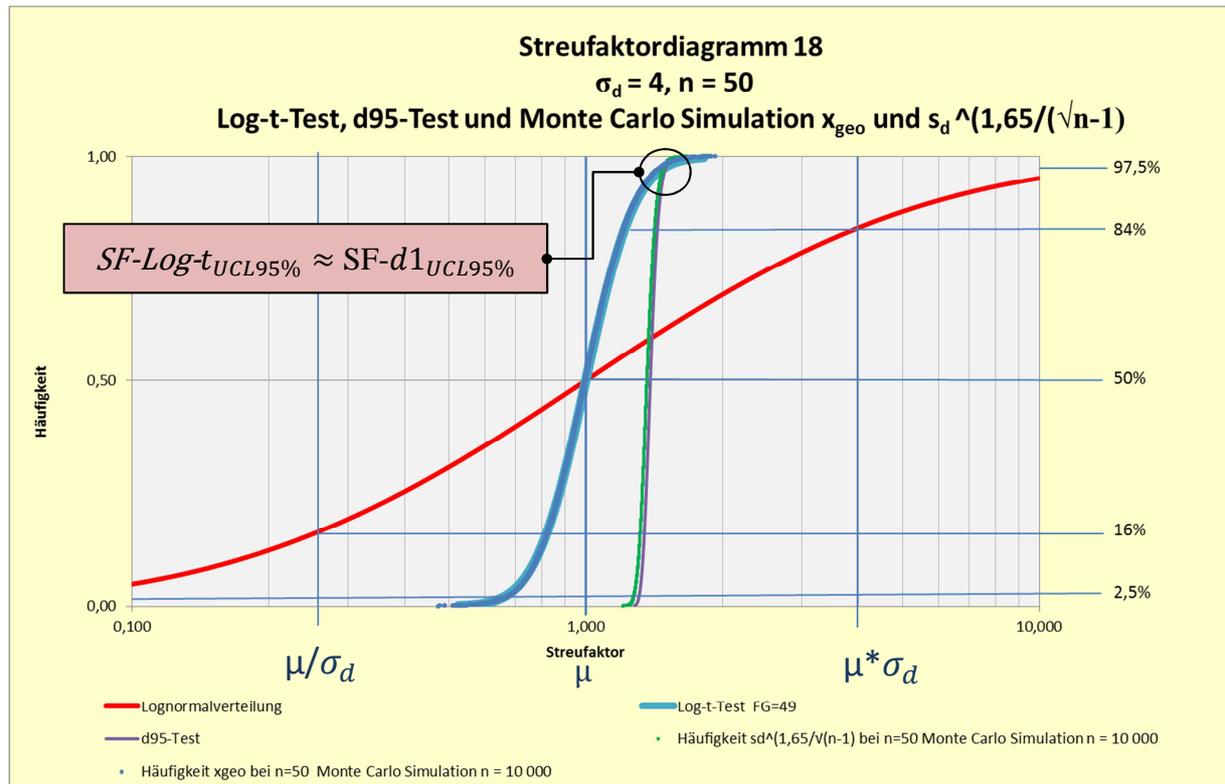


Abbildung 50: SF-Log-t_{UCL95%} und SF-d1_{UCL95%} und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$

In Streufaktordiagramm 18 (Abbildung 50) sind die Streufaktoren des Log-t-Tests und des d1-Tests für die obere Konfidenzintervallgrenze $X_{UCL95\%}$ im Vergleich mit Monte Carlo Simulationen von x_{geo} und s_d in einem Diagramm bei $\sigma_d = 4$ dargestellt.

Der Streufaktor SF-Log-t_{UCL95%} des Log-t-Tests berechnet sich nach folgender Formel:

$SF-Log-t_{UCL95\%} = s_d \frac{t_{95}}{\sqrt{n-1}} = s_d \frac{t_{95}}{\sqrt{49}}$	<p>SF-Log-t_{UCL95%}= Streufaktor des Log-t-Tests t_{95} = 95% Perzentil der t-Verteilung FG = 49 (Anlage 4) n = Stichprobenzahl</p>
---	--

Der Streufaktor SF-d1_{UCL95%} des d1-Tests berechnet sich nach folgender Formel:

$SF-d1_{UCL95\%} = s_d \frac{Z_{95}}{\chi_{95}} = s_d \frac{1,65}{\chi_{95}}$	<p>SF-d1_{UCL95%}= 95%-Streufaktor des d1-Tests χ_{95} = 95% Perzentil der χ-Test FG = 49 (Anlage 4) Z_{95}= 95% Perzentil der Normalverteilung (Anlage 4)</p>
---	---

Bei $\sigma_d = 4$ und $n = 50$ ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen SF-Log-t_{UCL95%} und SF-d1_{UCL95%} und den entsprechenden Monte Carlo Simulationen.

10.19 SF-Log-t_{UCL95%} und SF-d1_{UCL95%} und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 3$

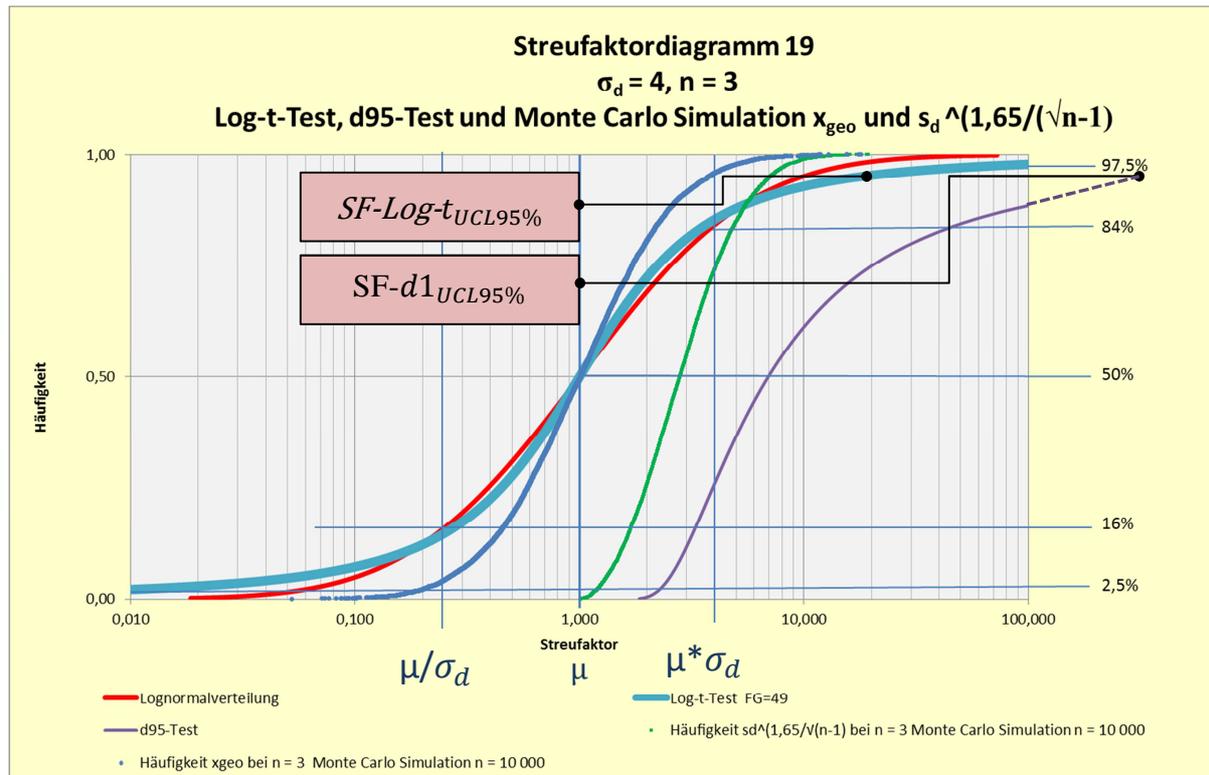


Abbildung 51: SF-Log-t_{UCL95%} und SF-d1_{UCL95%} und MCS bei $\sigma_d = 4$ und $n = 3$

In Streufaktordiagramm 19 (Abbildung 51) sind die Streufaktoren des Log-t-Tests und des d1-Tests für die obere Konfidenzintervallgrenze $X_{UCL95\%}$ im Vergleich bei $\sigma_d = 4$ und $n = 3$ dargestellt.

Der Streufaktor SF-Log-t_{UCL95%} des Log-t-Tests berechnet sich nach folgender Formel:

$SF-Log-t_{UCL95\%} = s_d \frac{t_{95}}{\sqrt{n-1}} = s_d \frac{t_{95}}{\sqrt{2}}$	SF-Log-t _{UCL95%} = Streufaktor des Log-t-Tests t = Perzentil der t-Verteilung FG = 2
--	---

Der Streufaktor SF-d1_{UCL95%} des d1-Tests berechnet sich nach folgender Formel:

$SF-d1_{UCL95\%} = s_d^{\chi_{95}} = s_d^{\frac{1,65}{\chi_{95}}}$	SF-d1 _{UCL95%} = 95%-Streufaktor des d1-Tests χ_{95} = 95% Perzentil der χ -Test FG = 2 Z ₉₅ = 95% Perzentil der Normalverteilung
--	---

Bei kleiner Stichprobenzahl und großem Standardstreu­faktor liefern die durchgeführten Monte Carlo Simulationen keine gute Übereinstimmung mit den Streufaktoren der Tests.

Der d1-Tests ergibt hier einen deutlich größeren Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ als der Log-t-Test. Die großen Streufaktoren des d1-Tests können als Bestätigung der großen Streufaktoren des Land-Tests gedeutet werden.

11. Zusammenfassung

Ziel dieser Untersuchung war es, die Plausibilität der großen Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$, die sich durch die neue Norm DIN EN ISO 9612 z.B. für die Messstrategie „Ganztagsmessung“ ergeben, empirisch zu überprüfen und vermutete Fehler bei der Übertragung von Streufaktoren aus statistischen Tests auf das Gebiet der akustischen Messgröße „Dezibel“ aufzudecken.

Es wurden folgende Hypothesen aufgestellt (Abschnitt 3):

Hypothese 1: Rechenfehler dB-Werte

Bei der Erstellung der ISO 9612 sind Fehler beim Umrechnen linearer Werte in dB-Werte unterlaufen.

Hypothese 2: Fehlerhafter Land-Test

Die Streufaktoren der ISO 9612 bzw. des Land-Test sind unrealistisch hoch.

Hypothese 3: Normalverteilungstests sind auch für dB-Werte geeignet

Der Gauß-Test, der t-Test und modifizierte χ -Tests (d1-Test, d2-Test und dt-Test) sind auch zur Ermittlung der Unsicherheit von dB-Messwerten bzw. für Stichproben aus Lognormalverteilungen geeignet.

Folgende Ergebnisse wurden erarbeitet:

Ergebnis Hypothese 1: Rechenfehler dB-Werte

Die Hypothese 1 konnte klar widerlegt werden. Die Streufaktoren der ISO 9612 für die Ganztagsmessungen sind identisch mit den Streufaktoren des Land-Test (Abschnitt 6 Formel 27).

Hypothese 2: Fehlerhafter Land-Test

Die Hypothese 2 konnte nicht bestätigt werden. Wie die Monte Carlo Simulationen in Abschnitt 7 (Abbildung 21: Ergebnis von 24 Monte Carlo Simulationen mit $\hat{s}_d = 400 = 26 \text{ dB}_{(-)}$) gezeigt haben, können bei unbekanntem Standardstreuungsfaktor in der Größenordnung von $\sigma_d = 400$ tatsächlich Streufaktoren zur Bestimmung der $L_{UCL95\%}$ in der Größenordnung von $SF_{UCL95\% \text{ in dB}} = 77 \text{ dB}_{(-)}$ auftreten.

In der Lärmesspraxis sind Standardstrefaktoren von $\sigma_d = 400 = 26 \text{ dB}_{(-)}$ nur selten zu erwarten. Soll jedoch die $L_{UCL95\%}$ aus einer kleinen Stichprobe mit starker Streuung statistisch ohne Zusatzinformationen zum Arbeitsablauf und den Tätigkeiten ermittelt werden, ergeben sich sehr große Streufaktoren $SF_{UCL95\%}$ für die Konfidenzintervallgrenzen.

Hypothese 3: Normalverteilungstests sind auch für dB-Werte geeignet

Folgende Teilergebnisse wurden zu Hypothese 3 erarbeitet:

1. Der Gauß-Test ist auch für dB-Werte bzw. Lognormalverteilungen ($s_d > 1,33$) geeignet.
2. Die d-Tests sind auch für dB-Werte bzw. Lognormalverteilungen ($s_d > 1,33$) geeignet.
3. Der t-Test für dB-Werte und damit der Log-t-Test ergibt bei Lognormalverteilungen ($s_d > 1,33$) zu kleine Streufaktoren.

Erläuterung Teilergebnis 1 zu Hypothese 3:

Wie die Streufaktordiagramme 8-11 (Abbildung 40-43) zeigen, ähnelt das Streuverhalten normalverteilter Messwerte ($s_d \leq 1,33$) dem Streuverhalten lognormalverteilter Messwerte ($s_d > 1,33$) so sehr, dass der Gauß-Test bzw. der Log-Gauß-Test auch für dB-Werte anwendbar ist. Dieses Verfahren entspricht dem Vorgehen der TRLV-Lärm und ergibt zuverlässige Ergebnisse bei realistischer Einschätzung der „Unsicherheit bei der Erfassung der längerfristig typischen Lärmexposition“, bzw. des Streufaktors $SF_{UCL95\%}$.

Erläuterung Teilergebnis 2 zu Hypothese 3:

Der in DIN EN ISO 9612 verwendete Land-Test und die Variationen des d-Tests zeigen trotz großer absoluter Differenzen bei kleinen Stichproben eine gewisse Ähnlichkeit. Durch geringfügige Änderungen des Signifikanzniveaus ergeben sich sogar gute Übereinstimmungen (Abschnitt 9). Die d-Tests bestätigen den Land-Test und sind auch für dB-Werte bzw. für Lognormalverteilungen ($s_d > 1,33$) anwendbar.

Erläuterung Teilergebnis 3 zur Hypothese 3:

Der t-Test angewendet auf dB-Werte (entspricht Log-t-Test) ergibt bei kleiner Stichprobenzahl mit großer Streuung viel kleinere $L_{UCL95\%}$ -Werte als der Land-Test und auch deutlich kleinere $L_{UCL95\%}$ -Werte als die d-Tests (Abschnitt 10.19). Wenn der Streufaktor $SF_{UCL95\%}$ nicht geschätzt werden kann, sollte der Land-Test bzw. die Verfahrensweisen der ISO 9612 angewendet werden.

Zusammenfassend bedeuten die Ergebnisse dieser Arbeit für die Lärmesspraxis am Arbeitsplatz, dass bei Ganztagsmessungen mit einer Standardabweichung von $\hat{s}_y \text{ in dB} = 6 \text{ dB}_{(-)}$ (entspricht einem Standardstreuungsfaktor von $\hat{s}_{dy} = 4$) die Anzahl der Stichproben mindestens in der Größe von 14 liegen muss, um statistisch abgesicherte Ergebnisse zu erhalten, so wie es in der ISO 9612 empfohlen wird.

Liegen Vorinformationen vor, die das Schätzen von Streufaktoren erlauben, beträgt bei Anwendung des vereinfachten Verfahrens nach TRLV-Lärm der maximale Streufaktor $SF_{UCL95\% \text{ TRLV-Lärm in dB max}} = 6 \text{ dB}_{(-)}$.

12. Literaturverzeichnis

- [1] DIN 45645 Teil 2; Ermittlung von Beurteilungspegeln aus Messungen - Teil 2: Geräuschmissionen am Arbeitsplatz, Ausgabe Juli 1997
Beuth-Verlag GmbH, 10772 Berlin
- [2] DIN EN ISO 9612, Akustik – Bestimmung der Lärmexposition am Arbeitsplatz – Verfahren der Genauigkeitsklasse 2 (Ingenieurverfahren)
Beuth-Verlag GmbH, 10772 Berlin
- [3] Technische Regeln zur Lärm- und Vibrations-Arbeitsschutzverordnung, Teil 2: Messung von Lärm , Ausgabe Januar 2010
Gemeinsames Ministerialblatt Nr. 18-20 vom 23.03.2010 Seite 378
- [4] C.E. LAND; Standards confidence limits for linear functions of the normal mean and variance. J. AM. Stat. Assoc. 68 (1973) 960-963
- [5] THIERY, L, OGNEDAL, T. Note about statistical background of the methods used in ISO/DIS 9612 to estimate the uncertainty of occupational exposure measurements. Acta Acust. Acust. 2008, 94, pp 331-334
- [6] GRZEBYK, M., THIERY, L. Confidence intervals for the mean of sound exposure levels. Am. Indust. Hyg. Assoc. J. 2003, 64, pp 640-645
- [7] HOFFMANN, VON LÜBKE .: 0 Dezibel + 0 Dezibel = 3 Dezibel
Einführung in die Grundbegriffe und die quantitative Erfassung des Lärms.
3. Auflage. Berlin: Schmidt-Verlag 1978
- [8] LOTHAR SACHS, JÜRGEN HEDDERICH
Angewandte Statistik, Methoden-sammlung mit R
13. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009

- [9] LIMPERT, E.; STAHEL, W.A.; ABBT, M.:
Log-normal Distribution across the science: Keys and clues.
In: *BioScience* 51, (2001), S. 341-352
- [10] WARNVERMERK ARBEITSKREIS NA 001-01-02-10 AK "BESTIMMUNG DER GERÄUSCHEXPOSITION BEI DER ARBEIT"
<http://www.beuth.de/cmd%3Bjsessionid=F55A33FF3FF57EA50C29E925ECCAFB50.2?workflowname=infoInstantdownload&docname=1542173&contextid=beuth&servicerefname=beuth>
abgerufen am 03.02.2012
- [11] JOACHIM HARTUNG , Statistik - Lehr und Handbuch der Angewandten Statistik
15. Auflage, Oldenburg Verlag München
- [12] SCHWARZE, Grundlagen der Statistik I, Beschreibende Verfahren
8 . Auflage, Verlag Neue Wirtschafts-Briefe Herne/Berlin
- [13] SCHWARZE, Grundlagen der Statistik II, Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik
6 . Auflage, Verlag Neue Wirtschafts-Briefe Herne/Berlin
- [14] Onlineversion des Land-Tests mit weiteren Informationen zum Land-Test
National Institutes of Health (NIH)
<http://conflimit.nci.nih.gov/RunOnline/AnalyzeLognormalData.shtml>
abgerufen am 01.10.2011
- [15] MURRAY R. SPIEGEL, Statistik
Übers. u. Bearb. Reinald Schramm, Carola Heitmeyer
2. Auflage, McGraw-Hill Book Company Europe, New York , Hamburg
Schaum's Outline
- [16] Microsoft Office
<http://office.microsoft.com/en-us/excel-help/introduction-to-monte-carlo-simulation-HA001111893.aspx#BMuses>

abgerufen am 03.02.2012

[17] Gilbert, R.O. Statistical Methods for Environmental Pollution Monitoring
Van Nostrand Reinhold, New York, New York 1987

[18] USEPA Supplement Guidance to RAGS, Calculating the Concentration Term 1992
Publication 9285,7-081)

<http://www.deq.state.or.us/lq/pubs/forms/tanks/UCLsEPASupGuidance.pdf>

abgerufen am 05.02.2011

[19] Louisiana Department of Environmental Quality
602 N. Fifth Street Baton Rouge, LA 70802

[http://www.deq.louisiana.gov/portal/LinkClick.aspx?fileticket=26b8EhwUUTs%3D&t
abid=2932](http://www.deq.louisiana.gov/portal/LinkClick.aspx?fileticket=26b8EhwUUTs%3D&t
abid=2932)

abgerufen am 05.02.2011

Anlage 1: Erstellung von Monte Carlo Simulationen mit Excel

Die Durchführung, die Darstellung und die Auswertung von Zufallsexperimenten wie in den folgenden Abbildungen 52-61 werden auch Monte Carlo Simulationen genannt [16].

Mit Excel lassen sich Zufallszahlen aus einer Lognormalverteilung mit dem Befehl „Funktion Einfügen“ erzeugen:

$$f(x) = \text{LOGNORM.INV}(\text{ZUFALLSZAH}L(0-1); \text{LN}(\mu_{xd}); \text{LN}(\sigma_d))$$

Abbildung 52 zeigt ein Excel-Arbeitsblatt. Hier wird im Feld B2 eine Zufallszahl aus einer Lognormalverteilung mit $\mu_{xd} = 1$ und $\sigma_d = 4$ erzeugt.



Abbildung 52: Erzeugung einer Zufallszahl in Excel aus einer Lognormalverteilung in Feld B2

Erweitert man das Arbeitsblatt wie in Abbildung 53 gezeigt, wird im Feld D2 der geometrische Mittelwert x_{geo} der Zufallszahlen von Feld B2 und Feld C2 errechnet.

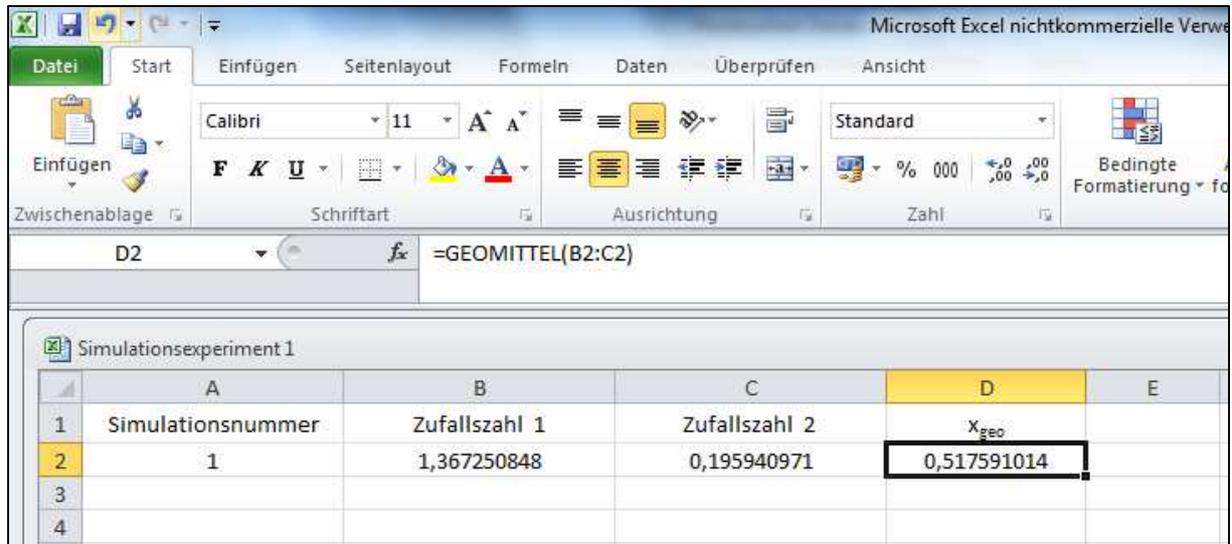


Abbildung 53: Berechnung von x_{geo} aus Zufallszahlen in Feld D2

Erweitert man das Arbeitsblatt wie in Abbildung 54 gezeigt, wird im Feld H2 der Standardstreu­faktor \hat{s}_{dy} von Feld B2 und Feld C2 errechnet.

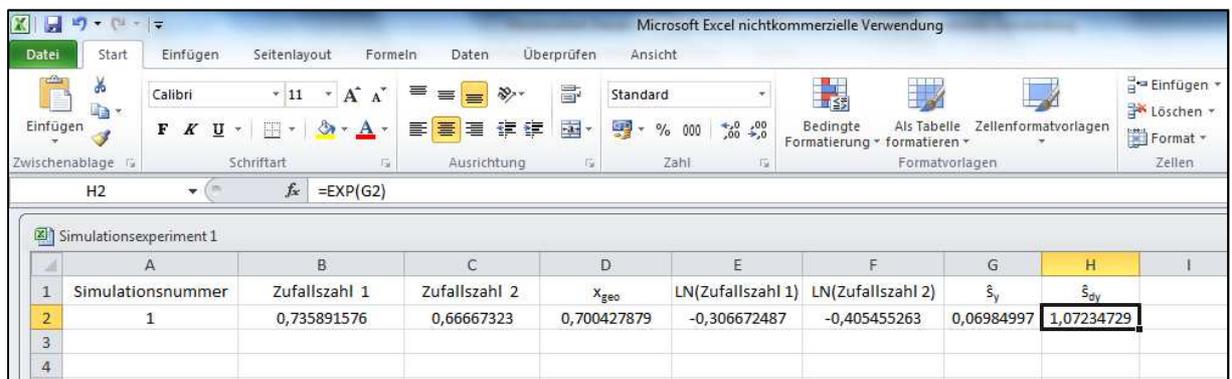


Abbildung 54: Berechnung von \hat{s}_{dy} aus Zufallszahlen in Feld D2

Erweitert man das Arbeitsblatt wie in Abbildung 55 gezeigt, wird im Feld I2 der Standardstreuungsfaktor s_d von Feld B2 und Feld C2 errechnet.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Simulationsnummer	Zufallszahl 1	Zufallszahl 2	x_{geo}	LN(Zufallszahl 1)	LN(Zufallszahl 2)	\hat{s}_y	\hat{s}_{dy}	s_d
2	1	9,798623171	0,459597012	2,122125805	2,282241883	-0,777405234	2,16349722	8,70151566	3,77554011
3									
4									

Abbildung 55: Berechnung von s_d aus Zufallszahlen in Feld I2

Erweitert man das Arbeitsblatt wie in Abbildung 56 gezeigt, werden für x_{geo} , s_d und \hat{s}_{dy} je 10 Zufallsexperimente „Stichproben mit $n = 2$ aus einer Lognormalverteilung“ durchgeführt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Simulationsnummer	Zufallszahl 1	Zufallszahl 2	x_{geo}	LN(Zufallszahl 1)	LN(Zufallszahl 2)	\hat{s}_y	\hat{s}_{dy}	s_d
2	1	28,91007141	0,242988368	2,650436014	3,364190026	-1,414741706	3,37921503	29,3477251	6,33728127
3	2	0,53236574	14,79068943	2,806074898	-0,630424544	2,69399789	2,35072165	10,4931393	4,1261256
4	3	0,528344786	0,245797072	0,360368702	-0,638006205	-1,403248993	0,54110836	1,71790988	1,4595107
5	4	14,26149393	53,17870848	27,53920529	2,657563173	3,9736581	0,93061965	2,53608017	1,88960946
6	5	0,786380607	2,579387516	1,424212176	-0,240314371	0,947551974	0,83994835	2,31624733	1,78200182
7	6	1,365691234	0,783240184	1,034245742	0,311660699	-0,244315881	0,39313481	1,48161811	1,31814913
8	7	0,290685472	0,241555155	0,264984102	-1,23551345	-1,420657447	0,13091658	1,13987268	1,09691974
9	8	0,185077791	3,722521742	0,830033795	-1,686979051	1,314401326	2,12229642	8,35029124	3,7005587
10	9	17,030373	0,190873672	1,802955859	2,834998397	-1,656143473	3,17571687	23,9439785	5,86130168
11	10	0,036191441	10,11116019	0,604927645	-3,318932628	2,313639783	3,98283015	53,6687099	7,8646897
12									
13									

Abbildung 56: Simulation von 10 Zufallsexperimenten „Stichproben mit $n = 2$ “

Die Ergebnisse solcher Zufallsexperimente lassen sich auch grafisch darstellen. In Abbildung 57 ist eine grafische Auswertung von s_d und \hat{s}_{dy} über x_{geo} dargestellt.

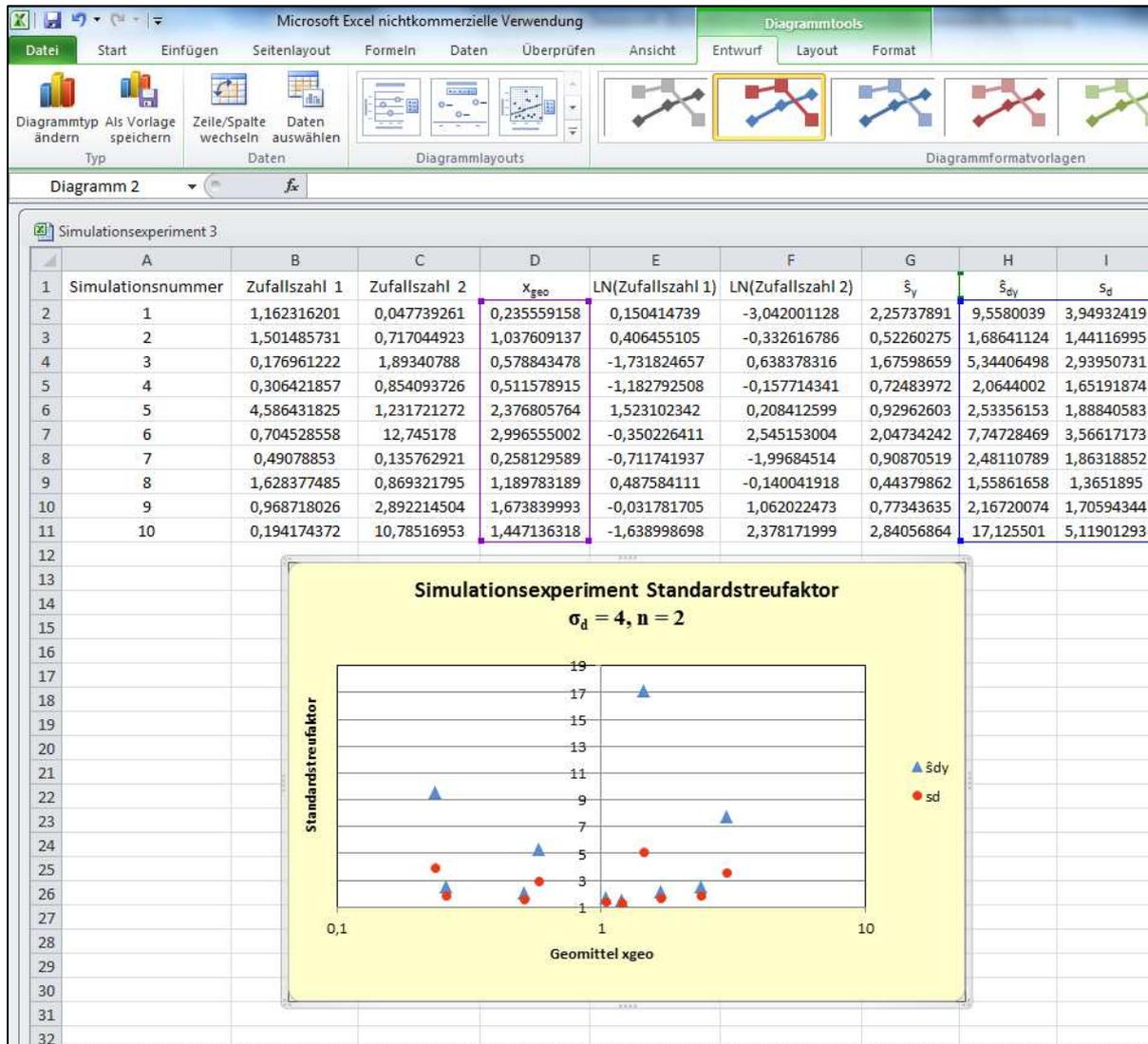


Abbildung 57: Grafische Darstellung von 10 Zufallsexperimenten

Erweitert man die Anzahl der Zufallsexperimente auf 10000, ergibt sich eine grafische Auswertung wie in Abbildung 58.

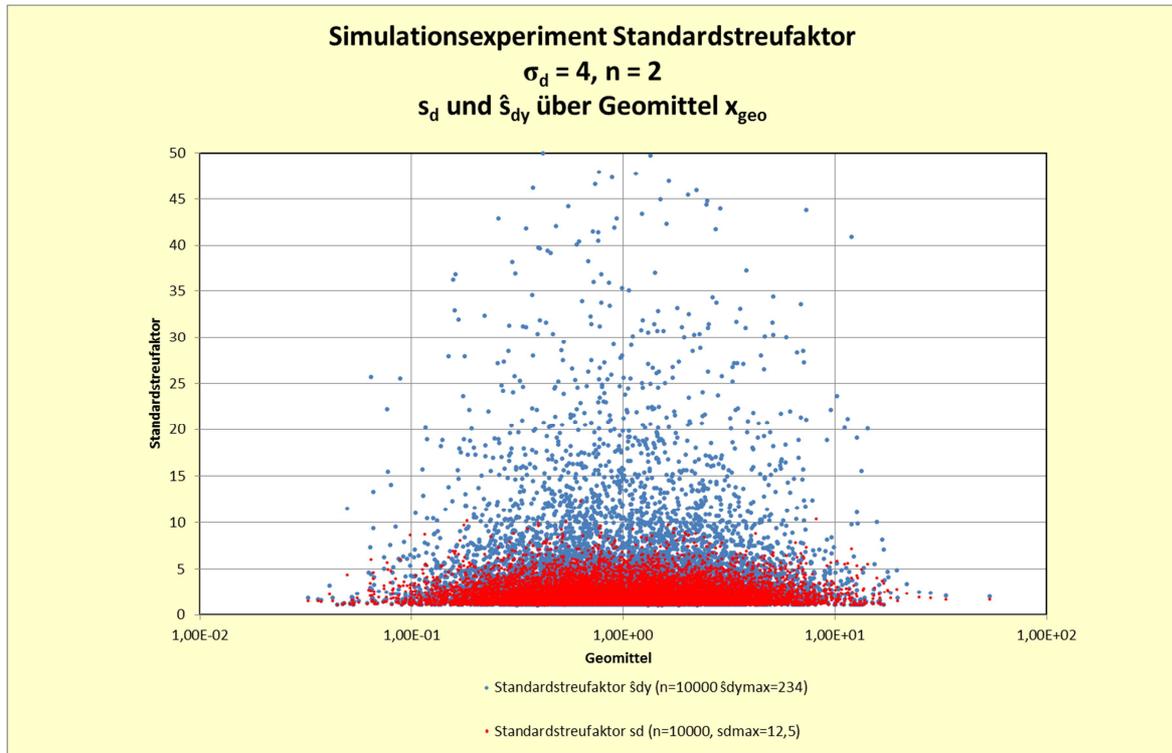


Abbildung 58: Simulationsexperiment zum Standardstrefaktor s_d und \hat{s}_{dy}

Wertet man die Ergebnisse des Auftretens der Streufaktoren s_d und \hat{s}_{dy} mit der Excel-Funktion „Häufigkeit“ aus, ergibt sich bei $n = 10$ die Auswertung wie in Abbildung 59 gezeigt:

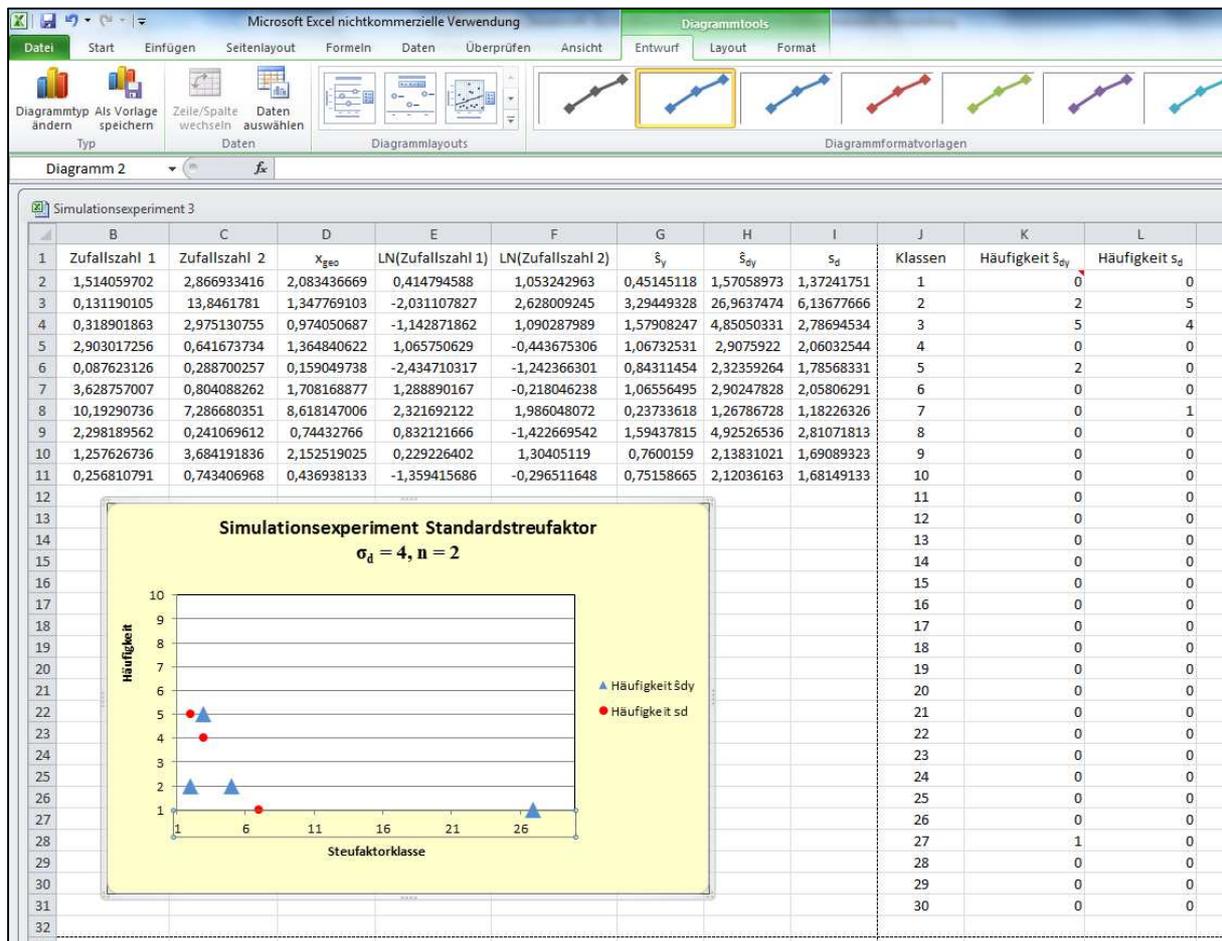


Abbildung 59: Grafische Auswertung von 10 Zufallsexperimenten klassiert nach Häufigkeit

Wertet man die Ergebnisse des Auftretens der Streufaktoren s_d und \hat{s}_{dy} mit der Funktion „Rang“ aus und bringt sie in eine Rangfolge von 0-10 bzw. einer relativen Rangfolge 0-1, ergibt sich bei $n = 10$ die Darstellung wie in Abbildung 60 gezeigt:

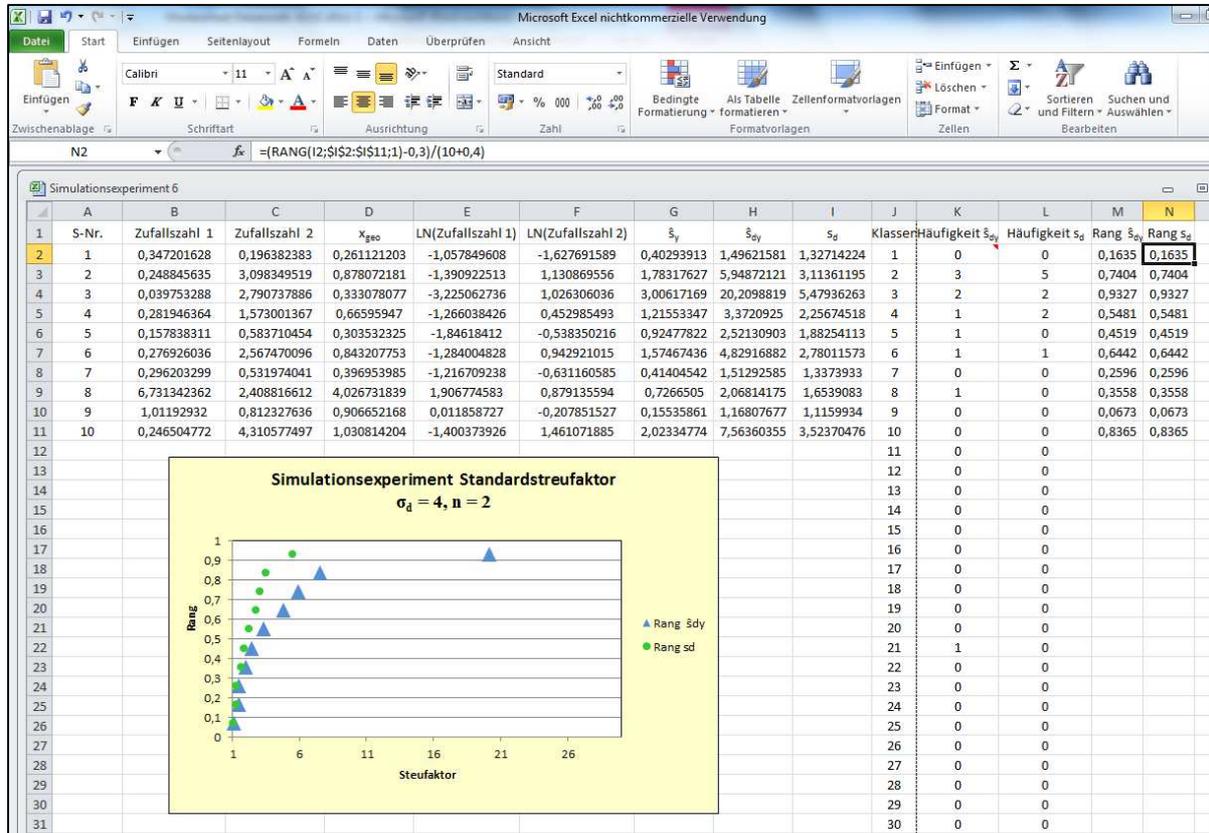


Abbildung 60: Grafische Darstellung von 10 Zufallsexperimenten

Erweitert man die Anzahl der Zufallsexperimente auf 10000, ergibt sich eine Monte-Carlo-Simulation wie in Abbildung 61. Zusätzlich zur Simulation von s_d und \hat{s}_{dy} ist in Abbildung 61 die Lognormalverteilung mit $\sigma_d = 4$ eingezeichnet.

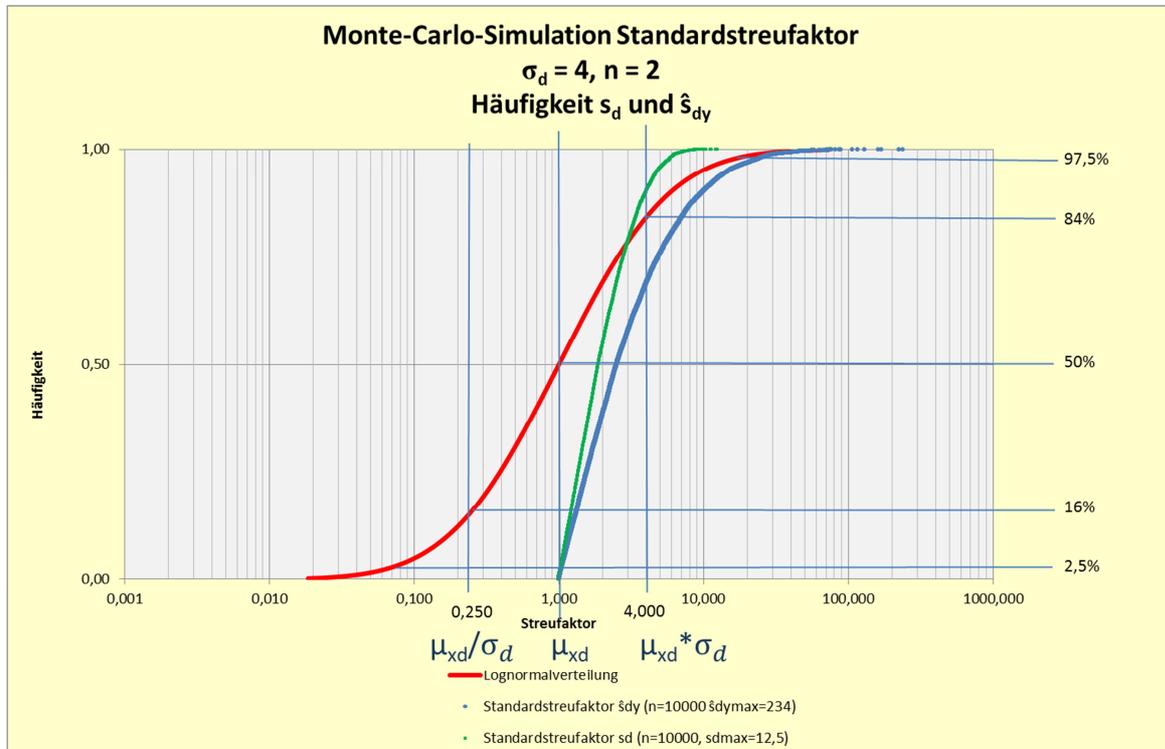


Abbildung 61: Monte-Carlo-Simulation s_d und \hat{s}_{dy} bei Stichproben mit $n = 2$ und $\sigma_d = 4$

Mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation von Abbildung 61 wurden folgende 99,99 %-Werte (10000 Simulationen) als „Schätzer für den wahren Standardstrefaktors $\sigma_d = 4$ “ ermittelt:

$$\text{Standardstrefaktor } s_{dmax-99,99\%} = 12,5$$

$$\text{Standardstrefaktor } \hat{s}_{dymax-99,99\%} = 234$$

Der Standardstrefaktor s_{dmax} beträgt hier maximal das 3,125-fache des „wahren Standardstrefaktors $\sigma_d = 4$ “.

Der Standardstrefaktor \hat{s}_{dymax} betrug hier maximal das 58,5-fache des „wahren Standardstrefaktors $\sigma_d = 4$ “.

Ergebnis der Zufallsexperimente bzw. Monte-Carlo-Simulationen von Abbildung 52-61:

„Bei einer Stichprobe mit $n = 2$ ergibt sich mit dem „Schätzer Standardstrefaktor \hat{s}_{dy} “ häufiger ein zu großer Schätzwert für den wahren Streufaktor σ_d anders als mit dem „Schätzer Standardstrefaktor s_d “.

Interpolation calculations for the H-statistic:

s-value:	1,38	Rows	Values	Percentages		100%		
		11	1,25		Values	3	3	
		12	1,5	0%	1,25	16,330		
				53%	1,382	18,055	18,055	
				100%	1,5	19,600		

n-value: 3 Columns Values
1 3

Final interpolated H-statistic value shaded in Red
n values shaded in green
s values shaded in yellow
Corresponding H-statistic table value shaded in blue
Intermediate H-statistic values shaded in gray

Column #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n value	3	5	7	10	12	15	21	31	51	101
Row #	s value									
1	0,1	2,75	2,035	1,886	1,802	1,775	1,749	1,722	1,701	1,684
2	0,2	3,295	2,198	1,992	1,881	1,843	1,809	1,771	1,742	1,718
3	0,3	4,109	2,402	2,125	1,977	1,927	1,882	1,833	1,793	1,761
4	0,4	5,22	2,631	2,282	2,089	2,026	1,968	1,905	1,856	1,813
5	0,5	6,495	2,947	2,465	2,22	2,141	2,068	1,989	1,928	1,876
6	0,6	7,807	3,287	2,673	2,368	2,271	2,181	2,085	2,01	1,946
7	0,7	9,12	3,662	2,904	2,532	2,414	2,306	2,191	2,102	2,025
8	0,8	10,43	4,062	3,155	2,71	2,57	2,443	2,307	2,202	2,112
9	0,9	11,74	4,478	3,402	2,902	2,738	2,589	2,432	2,31	2,206
10	1	13,05	4,905	3,698	3,103	2,915	2,744	2,564	2,423	2,306
11	1,25	16,33	6,001	4,426	3,639	3,389	3,163	2,923	2,737	2,58
12	1,5	19,6	7,12	5,184	4,207	3,896	3,612	3,311	3,077	2,881
13	1,75	22,87	8,25	5,96	4,795	4,422	4,081	3,719	3,437	3,2
14	2	26,14	9,387	6,747	5,396	4,962	4,564	4,141	3,812	3,533
15	2,5	32,69	11,67	8,339	6,621	6,067	5,557	5,013	4,588	4,228
16	3	39,23	13,97	9,945	7,864	7,191	6,57	5,907	5,388	4,947
17	3,5	45,77	16,27	11,56	9,118	8,326	7,596	6,815	6,201	5,681
18	4	52,31	18,58	13,18	10,38	9,469	8,63	7,731	7,024	6,424
19	4,5	58,85	20,88	14,8	11,64	10,62	9,669	8,652	7,854	7,174
20	5	65,39	23,19	16,43	12,91	11,77	10,71	9,579	8,688	7,929
21	6	78,47	27,81	19,68	15,45	14,08	12,81	11,44	10,36	9,449
22	7	91,55	32,43	22,94	18	16,39	14,9	13,31	12,05	10,98
23	8	104,6	37,06	26,2	20,55	18,71	17,01	15,18	13,74	12,51
24	9	117,7	41,68	29,46	23,1	21,03	19,11	17,05	15,43	14,05
25	10	130,8	46,31	32,73	25,66	23,35	21,22	18,93	17,13	15,59

Das Ergebnis für die Interpolationsberechnung des Landparameters lautet:

$$H_{95\%; n=3; \hat{s}_{dy} = 6 \text{ dB}_{(-)} \approx 4 = 18,055$$

Dieser Wert steht im roten Feld J6 dieses obigen Excel-Arbeitsblatts.

Anlage 3: Streufaktoren nach Tabelle C.4 ISO 9612 und Transformationen

Anwendbar für n Messwerte mit der „Standardunsicherheit u1“

$$u1 = \hat{s}_y \text{ in dB} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2}$$

$\hat{s}_y \text{ in dB}$ n	SF _{UCL84%} in dB(-) = "Unsicherheitsbeitrag c1*u1" in dB(-) nach ISO 9612											
	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
3	0,6	1,6	3,1	5,2	8,0	11,5	15,7	20,6	26,1	32,2	39,0	46,5
4	0,4	0,9	1,6	2,5	3,6	5,0	6,7	8,6	10,9	13,2	16,1	19,2
5	0,3	0,7	1,2	1,7	2,4	3,3	4,4	5,6	6,9	8,5	10,2	12,1
6	0,3	0,6	0,9	1,4	1,9	2,6	3,3	4,2	5,2	6,3	7,6	8,9
7	0,2	0,5	0,8	1,2	1,6	2,2	2,8	3,5	4,3	5,1	6,1	7,2
8	0,2	0,5	0,7	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,6	4,4	5,2	6,1
9	0,2	0,4	0,7	1	1,3	1,7	2,1	2,6	3,2	3,9	4,6	5,4
10	0,2	0,4	0,6	0,9	1,2	1,5	1,9	2,4	2,9	3,5	4,1	4,8
12	0,2	0,3	0,5	0,8	1,0	1,3	1,7	2,0	2,5	2,9	3,5	4,0
14	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,2	1,5	1,8	2,2	2,6	3,0	3,5
16	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8	1,1	1,3	1,6	2,0	2,3	2,7	3,2
18	0,1	0,3	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,5	1,8	2,1	2,5	2,9
20	0,1	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3	2,6
25	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,7	2,0	2,3
30	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	2,0

$\hat{s}_y \text{ in dB}$ n	SF _{UCL95%} in dB(-) = "Unsicherheitsbeitrag c1*u1*1,65" in dB(-)											
	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
3	1,0	2,6	5,1	8,6	13,2	19,0	25,9	34,0	43,1	53,1	64,4	76,7
4	0,7	1,5	2,6	4,1	5,9	8,3	11,1	14,2	18,0	21,8	26,6	31,7
5	0,5	1,2	2,0	2,8	4,0	5,4	7,3	9,2	11,4	14,0	16,8	20,0
6	0,5	1,0	1,5	2,3	3,1	4,3	5,4	6,9	8,6	10,4	12,5	14,7
7	0,3	0,8	1,3	2,0	2,6	3,6	4,6	5,8	7,1	8,4	10,1	11,9
8	0,3	0,8	1,2	1,8	2,3	3,1	4,0	5,0	5,9	7,3	8,6	10,1
9	0,3	0,7	1,2	1,7	2,1	2,8	3,5	4,3	5,3	6,4	7,6	8,9
10	0,3	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5	3,1	4,0	4,8	5,8	6,8	7,9
12	0,3	0,5	0,8	1,3	1,7	2,1	2,8	3,3	4,1	4,8	5,8	6,6
14	0,2	0,5	0,8	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	3,6	4,3	5,0	5,8
16	0,2	0,5	0,8	1,0	1,3	1,8	2,1	2,6	3,3	3,8	4,5	5,3
18	0,2	0,5	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0	2,5	3,0	3,5	4,1	4,8
20	0,2	0,5	0,7	0,8	1,2	1,5	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3
25	0,2	0,3	0,5	0,8	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,8	3,3	3,8
30	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	1,2	1,5	1,8	2,1	2,5	2,8	3,3

$\hat{s}_y \text{ in dB}$ n	SF _{UCL95% linear} = "Unsicherheitsbeitrag c1*u1*1,65" in linear = 10^(0,1*SF _{UCL95% in dB(-)})											
	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
3	1,3	1,8	3,2	7,2	20,9	79,0	389,5	2506,1	20253,5	205589,1	2722701,3	47043540,6
4	1,2	1,4	1,8	2,6	3,9	6,7	12,7	26,2	62,9	150,7	453,4	1472,3
5	1,1	1,3	1,6	1,9	2,5	3,5	5,3	8,4	13,8	25,3	48,2	99,2
6	1,1	1,3	1,4	1,7	2,1	2,7	3,5	4,9	7,2	11,0	17,9	29,4
7	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,3	2,9	3,8	5,1	6,9	10,2	15,4
8	1,1	1,2	1,3	1,5	1,7	2,1	2,5	3,1	3,9	5,3	7,2	10,2
9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,9	2,2	2,7	3,4	4,4	5,7	7,8
10	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	2,1	2,5	3,0	3,8	4,7	6,2
12	1,1	1,1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,9	2,1	2,6	3,0	3,8	4,6
14	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	2,0	2,3	2,7	3,1	3,8
16	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,1	2,4	2,8	3,4
18	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,6	3,0
20	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	1,9	2,1	2,4	2,7
25	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,9	2,1	2,4
30	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	1,9	2,1

Wenn der nach Tabelle C.4 bestimmte Wert c1*u1 größer als 3,5 dB(-) ist (**fettgedruckte Werte**), empfiehlt die ISO 9612, den Messplan zu überarbeiten oder zu ändern, um damit $\hat{s}_y \text{ in dB}$ zu verringern. Bei $\hat{s}_y \text{ in dB} = 6$ sind mindestens 14 Messungen notwendig, um den fettgedruckten Bereich zu verlassen.

Anlage 4: Tabelle für Perzentile Z, t, χ , d1 und dt für n = 50

Z Z-Perzentil in Excel = NORM.INV(0-100% ; $\bar{x} = 0$; $s_d = 1$)

t t-Perzentil für in Excel = T.INV(0-100% ; FG=49)

χ χ -Perzentil in Excel = CHIINV(0-100% ; FG=49)

Z/ χ^*n d1-Perzentil für = Z/ χ^*n , Berechnet aus Z, χ und n

t/ χ^*n dt-Perzentil = t/ χ^*n , Berechnet aus t, χ und n

Wahrscheinl. 0-1	Z-Perzentil	t-Perzentil 49 FG	χ -Perzentil 49 FG	d1-Perzentil = Z/ χ^*n	dt-Perzentil = t/ χ^*n
0,02	-2,053748911	-2,109872718	71,40607855	-1,409315547	-1,477376129
0,04	-1,750686071	-1,787757872	67,6270742	-1,294367745	-1,321776739
0,06	-1,554773595	-1,582365989	65,25465415	-1,191312417	-1,212454506
0,08	-1,40507156	-1,426726248	63,47881498	-1,106724787	-1,123781413
0,1	-1,281551566	-1,299068785	62,03753679	-1,032883986	-1,047002228
0,12	-1,174986792	-1,1894359	60,81142735	-0,966090456	-0,977970713
0,14	-1,080319341	-1,092398331	59,73560831	-0,904250724	-0,9143611
0,16	-0,994457883	-1,004652151	58,77072299	-0,846048706	-0,854721619
0,18	-0,915365088	-0,924027856	57,8910091	-0,790593481	-0,798075444
0,2	-0,841621234	-0,849018399	57,07862918	-0,737247237	-0,74372704
0,22	-0,772193214	-0,778530195	56,32068531	-0,685532509	-0,691158311
0,24	-0,706302563	-0,711741284	55,60752134	-0,635078264	-0,639968539
0,26	-0,643345405	-0,648015515	54,93169769	-0,585586676	-0,589837509
0,28	-0,582841507	-0,586848059	54,28734145	-0,536811614	-0,540501748
0,3	-0,524400513	-0,527829373	53,66971757	-0,488544133	-0,491738541
0,32	-0,467698799	-0,47062055	53,07493607	-0,44060232	-0,443354797
0,34	-0,412463129	-0,414935939	52,49974633	-0,392823926	-0,395178994
0,36	-0,358458793	-0,360530553	51,9413886	-0,345060849	-0,347055173
0,38	-0,305480788	-0,30719073	51,39748444	-0,297174844	-0,298838293
0,4	-0,253347103	-0,254727026	50,86595391	-0,249034063	-0,250390493
0,42	-0,201893479	-0,202968677	50,34495173	-0,200510153	-0,201577983
0,44	-0,150969215	-0,151759178	49,83281702	-0,151475699	-0,152268312
0,46	-0,100433721	-0,100952651	49,32803272	-0,101801871	-0,10232787
0,48	-0,050153583	-0,050410758	48,82919204	-0,051356147	-0,051619488
0,5	0	0	48,33496994	0	0
0,52	0,050153583	0,050410758	47,84409805	0,052413553	0,052682316
0,54	0,100433721	0,100952651	47,3553418	0,106042652	0,106590563
0,56	0,150969215	0,151759178	46,86747862	0,161059673	0,161902435
0,58	0,201893479	0,202968677	46,37927634	0,21765484	0,218813975
0,6	0,253347103	0,254727026	45,88947059	0,27604056	0,277544088
0,62	0,305480788	0,30719073	45,39674026	0,336456744	0,338340075
0,64	0,358458793	0,360530553	44,89967954	0,399177452	0,40148455
0,66	0,412463129	0,414935939	44,39676502	0,464519351	0,467304249
0,68	0,467698799	0,47062055	43,88631538	0,532852662	0,536181434
0,7	0,524400513	0,527829373	43,36644075	0,604615578	0,608568934
0,72	0,582841507	0,586848059	42,83497699	0,680333629	0,685010358
0,74	0,643345405	0,648015515	42,28939835	0,760646203	0,766167811
0,76	0,706302563	0,711741284	41,72669805	0,846343703	0,852860779
0,78	0,772193214	0,778530195	41,14322037	0,938420968	0,946122093
0,8	0,841621234	0,849018399	40,53441741	1,038156322	1,04728087
0,82	0,915365088	0,924027856	39,89448399	1,147232645	1,158089745
0,84	0,994457883	1,004652151	39,21578775	1,26793052	1,280928177
0,86	1,080319341	1,092398331	38,4879351	1,403451936	1,419143854
0,88	1,174986792	1,1894359	37,69614756	1,558497178	1,577662409
0,9	1,281551566	1,299068785	36,81821727	1,740376993	1,764165787
0,92	1,40507156	1,426726248	35,81819564	1,961393553	1,991622167
0,94	1,554773595	1,582365989	34,63132137	2,244750609	2,284587949
0,96	1,750686071	1,787757872	33,11923991	2,643004604	2,69897177
0,98	2,053748911	2,109872718	30,87075894	3,326366084	3,417267328