

Frank Müller

Mathematische Modellierung einer wasserführenden  
Zentralheizungsanlage in einem Einfamilienhaus

THM-Hochschulschriften Band 33



**Frank Müller**

Mathematische Modellierung einer wasser-  
führenden Zentralheizungsanlage in einem  
Einfamilienhaus

THM-Hochschulschriften Band 33

THM-Hochschulschriften Band 33

© 2024 Frank Müller

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich MND - Mathematik, Naturwissenschaften und  
Datenverarbeitung

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit  
schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Die Hochschulschriften sind online abrufbar:

[www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften](http://www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften)

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

# Mathematische Modellierung einer wasserführenden Zentralheizungsanlage in einem Einfamilienhaus

Frank Müller

Technische Hochschule Mittelhessen  
Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften  
und Datenverarbeitung  
Wilhelm-Leuschner-Straße 13  
D-61169 Friedberg, Germany  
Email: Frank.Mueller@mnd.thm.de

08. November 2024

## Zusammenfassung

Die mathematische Modellierung einer wasserführenden Zentralheizungsanlage führt auf ein nichtlineares Differentialgleichungssystem für die Systemtemperaturen, in dem auch der Volumenstrom mit auftritt. Da der Volumenstrom durch den Heizkörperregler geregelt wird, ist für eine Simulation das reale Verhalten des Reglers abzubilden. In dieser Arbeit wird hierfür ein anderer Ansatz verfolgt. Der Heizkörperregler wird durch sein ideales Verhalten beschrieben, d.h. es wird angenommen, dass die Systemtemperatur ihrem Sollwert entspricht. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die bereitgestellte Energie hierfür ausreichend ist. Daher wird eine Bedingung abgeleitet, unter der die ideale Annahme gerechtfertigt ist. Durch dieses Vorgehen gelingt eine Entkopplung des Volumenstromes von den Systemtemperaturen. Dieser kann dann separat bestimmt werden und steht als stetige Funktion für das Anfangswertproblem zur Bestimmung der Systemtemperaturen zur Verfügung.

## Abstract

The mathematical modeling of a water-based central heating system leads to a non-linear system of differential equations for the system temperatures, in which the volume flow also occurs. Since the volume flow is controlled by the radiator controller, the real behavior of the controller must be modeled for a simulation. A different approach is chosen in this work. The radiator controller is described by its ideal behavior, i.e. it is assumed that the system temperature is equal to its setpoint. However, this is only possible if the energy provided is sufficient. Therefore, a condition is derived under which the ideal assumption is justified. This procedure enables the volume flow to be decoupled from the system temperatures. The volume flow can then be determined separately and is therefore available as a continuous function for the initial value problem to determine the system temperatures.

## Keywords

Modeling and simulation, water-based central heating system, thermal building simulation, radiator controller, non-linear system of differential equations

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit wird eine wasserführende Zentralheizungsanlage in einem Einfamilienhaus betrachtet. Diese Heizungsanlage bestehe aus einem Wärmeerzeuger mit Umwälzpumpe, einem Zweirohrsystem und einem einfachen Heizkreis mit Heizkörpern als Heizflächen.

Zur Warmwasserversorgung werden in Einfamilienhäusern häufig Warmwasserspeicher eingesetzt. Ein solcher Warmwasserspeicher beinhaltet das warme Nutzwasser, welches über die Wasserhähne des Hauses genutzt werden kann. Der Nutzwasserkreislauf ist vom Heizungswasser der Heizungsanlage durch eine Systemtrennung getrennt. Die Erwärmung des Wassers im Warmwasserspeicher erfolgt über den Wärmeerzeuger. Da der Heizkreis und der Warmwasserspeicher nicht gleichzeitig mit Wärme versorgt werden können, sind diese beiden Kreisläufe durch ein Drei-Wege-Ventil getrennt. Es wird daher entweder der Heizkreis versorgt oder der Warmwasserspeicher erwärmt. Bei der Erwärmung des Warmwasserspeichers spricht man auch von einer Speicherladung.

Für numerische Simulationen der Heizungsanlage sind sowohl der Heizkreis als auch der Warmwasserspeicher mathematisch zu modellieren. In [1] werden daher analytische Lösungen für den Entlade- und den Ladeprozess in einem Schichtenladespeicher sowie ein Approximationsverfahren hierfür entwickelt. Da Gegenstrom-Wärmetauscher für die Versorgung von Warmwasserspeichern eine wichtige Rolle spielen, werden in [2] und [3] verallgemeinerte Lösungen und klassische Benchmark-Lösungen für einen Gegenstrom-Wärmetauscher entwickelt. In dieser Arbeit hier wird der Heizkreis modelliert.

Zur Erstellung eines mathematischen Modells werden Bilanzgleichungen betrachtet. Üblicherweise werden beheizte Räume eines Gebäudes durch die Energiebilanzen von Heizkörper und Raum unter der Annahme einer guten Durchmischung der Raumluft beschrieben [4, 5].

Für viele Anwendungen ist die mathematische Beschreibung eines Heizkörpers ohne Ortsabhängigkeit ausreichend [6, 7]. Eine solche Beschreibung liegt auch der DIN EN 442 für die Beschreibung von Heizkörpern zugrunde. Genauere Analysen der Temperaturverteilung innerhalb eines Heizkörpers führen zu aufwändigeren mathematischen Modellen, die dann numerisch behandelt werden können [8]. Hierbei ist zu beachten, dass dadurch höhere numerische Kosten erzeugt werden. Daher können solche detaillierten Modelle nur für kleine Zeitintervalle verwendet werden, was für Langzeitsimulationen, wie etwa Jahressimulationen, nicht geeignet ist.

Die Beschreibung des Wärmestroms vom Gebäude nach außen erfolgt mit Hilfe des Wärmedurchgangs durch die Fenster und Wände sowie des Wärmetransports innerhalb der Wände [9]. Der Wärmedurchgang lässt sich mit Hilfe der U-Werte beschreiben. Die Temperaturverteilung innerhalb der Wand lässt sich durch ein Anfangs- und Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung beschreiben [9, 10, 11, 12].

Ein gutes mathematisches Modell des Gebäudes und der Heizungsanlage beschreibt die Regelstrecke für Temperaturregler und ist daher wichtig, um in einem Modell-basierten Entwicklungsprozess neue Regelungsmethoden entwickeln zu können [13, 14, 15, 16, 17]. Ebenso ist ein gutes mathematisches Modell vorteilhaft, um das thermische Verhalten der bestehenden Anlage unter verschiedenen Nutzerszenarien zu vergleichen. Eine mögliche Anwendung ist die Abschätzung der Rücklauftemperatur des Gesamtsystems. Diese hat z.B. Auswirkungen auf die Ausnutzung des Brennwerteffektes [7] bei Brennwertgeräten, wofür die Rücklauftemperatur nicht zu hoch werden darf.

In dieser Arbeit wird ein mathematisches Modell entwickelt, welches die vorhandenen Heizkörperregler durch ihr ideales Verhalten beschreibt. Durch diese idealisierte Annahme gelingt eine Entkopplung des Volumenstromes von den Systemtemperaturen, so dass dieser separat bestimmt werden kann und als stetige Funktion für das Anfangswertproblem zur Bestimmung der Systemtemperaturen zur Verfügung steht.

## 2 Bilanzgleichungen

### 2.1 Temperatur-Zonen

Für eine thermische Simulation wird das Gebäude in Temperatur-Zonen unterteilt. Eine Temperatur-Zone repräsentiert die Raumluft sowie alle Gegenstände in diesem Teil des Gebäudes. Dies kann ein einzelner Raum sein, ein Teil eines Raumes oder auch eine Zusammenfassung mehrerer Räume. Ist das gesamte Gebäude eine Temperatur-Zone, so spricht man von einem Ein-Raum-Modell. Die Luft in einer Temperatur-Zone wird als homogen angenommen, d.h. es wird angenommen, dass die Luft überall in der Temperatur-Zone die gleichen Eigenschaften und die gleiche Temperatur besitzt. Man nennt dies die Annahme einer guten Mischung [4].

Wir werden nur die beheizten Räume des Hauses betrachten. Befindet sich nur ein Heizkörper im Raum, so betrachten wir den Raum als eine Temperatur-Zone. Sind mehr als ein Heizkörper im Raum vorhanden, so wird jedem Heizkörper ein geeigneter Anteil des Raumes als Temperatur-Zone zugeordnet. Da davon ausgegangen werden kann, dass Heizkörper an einer Außenwand angebracht sind, kann jede Temperatur-Zone wie ein Raum mit Außenwand betrachtet werden. Der Übergang zwischen zwei Temperatur-Zonen eines Raumes kann dann als virtuelle Zwischenwand zwischen beheizten Räumen angesehen werden.

Die Zustandsgrößen sind dann die Luft-Temperatur der Temperatur-Zone, die Rücklauf-Temperatur und der Volumenstrom des Heizkörpers. Um Bestimmungsgleichungen für diese Zustandsgrößen zu erhalten, werden für jeden Heizkörper und für jede Temperatur-Zone Energiebilanzen aufgestellt. Berücksichtigt man Interaktionen zwischen Temperatur-Zonen, so erhält man eine Kopplung der Zustandsgrößen verschiedener Temperatur-Zonen, was die Bestimmung der Zustandsgrößen komplexer gestaltet. Um diese Kopplung zu vermeiden, werden wir diese Interaktionen nicht berücksichtigen, d.h. wir werden hier keinen Energie-Transfer zwischen Temperatur-Zonen berücksichtigen.

### 2.2 Bilanzgleichung eines Heizkörpers

Ein Heizkörper (oder auch Radiator) ist ein Wärmetauscher, der thermische Energie an die Umgebung abgibt. Er besitzt einen Vorlaufanschluss und einen Rücklaufanschluss. Das warme Heizungswasser vom Wärmeerzeuger tritt über den Vorlaufanschluss mit der Vorlauf-Temperatur in den Heizkörper ein, gibt über die Heizfläche thermische Energie an die Umgebung ab und tritt mit der Rücklauf-Temperatur über den Rücklaufanschluss wieder aus dem Heizkörper aus. Im Vorlaufanschluss des Heizkörpers sitzt ein Regler, der den Volumenstrom im Heizkörper so regelt, dass die Temperatur der Temperatur-Zone ihrem Sollwert entspricht.

Es seien  $D_{HK}$  die Menge aller Raumpunkte, die der Heizkörper einnimmt, und  $c_{HK}(x)$  sowie  $\varrho_{HK}(x)$  die spezifische Wärmekapazität sowie die Massendichte des Heizkörpers im Punkt  $x \in D_{HK}$ . Bezeichnen wir die Heizkörpertemperatur im Punkt  $x \in D_{HK}$  zum Zeitpunkt  $t$  mit  $\vartheta_{HK}(x, t)$ , so ist die im Heizkörper gespeicherte Wärmemenge, d.h. die thermische Energie, zum Zeitpunkt  $t$  gegeben durch:

$$Q_{HK}(t) = \int_{D_{HK}} c_{HK}(x) \varrho_{HK}(x) \vartheta_{HK}(x, t) dx \quad (1)$$

Approximiert man nun die Heizkörpertemperatur  $\vartheta_{HK}(x, t)$  durch eine örtlich gemittelte Heizkörpertemperatur  $\vartheta_{HK,M}(t)$ , so folgt:

$$Q_{HK}(t) \approx \vartheta_{HK,M}(t) \int_{D_{HK}} c_{HK}(x) \varrho_{HK}(x) dx \quad (2)$$

Der Heizkörper besteht im Wesentlichen aus einem Metallanteil und einem Wasseranteil. Wir bezeichnen die Mengen der Raumpunkte des Metall- bzw. Wasseranteils mit  $D_{HK,M}$  bzw.  $D_{HK,W}$ . Nehmen wir in beiden Anteilen die spezifische Wärmekapazität als konstant an, erhalten wir:

$$\begin{aligned} Q_{HK}(t) &\approx \vartheta_{HK,M}(t) \left( c_M \int_{D_{HK,M}} \varrho_{HK,M}(x) dx + c_W \int_{D_{HK,W}} \varrho_{HK,W}(x) dx \right) \\ &= \vartheta_{HK,M}(t) (c_M m_{HK,M} + c_W m_{HK,W}) \\ &= C_{HK} \vartheta_{HK,M}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Dabei bezeichnen

$$m_{HK,M} = \int_{D_{HK,M}} \varrho_{HK,M}(x) dx, \quad m_{HK,W} = \int_{D_{HK,W}} \varrho_{HK,W}(x) dx \quad (4)$$

die Massen des Metallanteils und des Wasseranteils sowie

$$C_{HK} = c_M m_{HK,M} + c_W m_{HK,W} \quad (5)$$

die Wärmekapazität (oder auch thermische Masse) des Heizkörpers. Zur Bestimmung der Wärmekapazität (5) werden die Massenanteile und die spezifischen Wärmekapazitäten des Metall- und des Wasseranteils benötigt. Die Wärmekapazität (5) kann geschrieben werden in der Form:

$$\begin{aligned} C_{HK} &= c_M m_{HK,M} + c_W m_{HK,W} = c_W \left( \frac{c_M}{c_W} m_{HK,M} + m_{HK,W} \right) \\ &= c_W m_{HK} \end{aligned} \quad (6)$$

mit:

$$m_{HK} = \frac{c_M}{c_W} m_{HK,M} + m_{HK,W} \quad (7)$$

Wir setzen nun Gleichheit in (3), d.h. wir beschreiben die im Heizkörper gespeicherte Wärmemenge zum Zeitpunkt  $t$  durch:

$$Q_{HK}(t) = C_{HK} \vartheta_{HK,M}(t) \quad (8)$$

Der Wärmestrom (oder auch Wärmefluss) des Heizkörpers ist die zeitliche Änderung der Wärmemenge des Heizkörpers. Dieser ist gleich der Differenz aus zugeführter und abgegebener thermischer Leistung, d.h. es gilt:

$$\frac{dQ_{HK}(t)}{dt} = P_{HK,zu}(t) - P_{HK,ab}(t) \quad (9)$$

Die dem Heizkörper mit dem Heizungswasser zugeführte thermische Leistung ist gegeben durch [6, 7]:

$$P_{HK,zu}(t) = c_W \varrho_W \dot{V}(t) (\vartheta_V(t) - \vartheta_R(t)) \quad (10)$$

Dabei bezeichnen  $\vartheta_V(t)$  und  $\vartheta_R(t)$  die Vorlauftemperatur und die Rücklauftemperatur sowie  $\dot{V}(t)$  den Volumenstrom im Heizkörper zum Zeitpunkt  $t$ . Weiterhin sind  $c_W$  und  $\varrho_W$  die spezifische Wärmekapazität und die Massendichte des Heizungswassers, die beide als konstant angenommen werden.

Für die Beschreibung der thermischen Leistungsabgabe eines Heizkörpers an seine Umgebung wird üblicherweise folgendes Modell verwendet [6, 7]:

$$P_{HK,ab}(t) = k_{HK} \left( \Delta \vartheta_{Ue,m}(t) \right)^a \quad (11)$$

Dabei sind  $k_{HK}$  der Wärmeübertragungskoeffizient,  $a \geq 1$  der Heizkörperexponent des Heizkörpers und  $\Delta\vartheta_{Ue,m}(t)$  die räumlich gemittelte Übertemperatur des Heizkörpers zum Zeitpunkt  $t$ . Heizkörperexponenten liegen typischerweise zwischen 1 und 1.4.

Zur Beschreibung der Übertemperatur wird häufig die Differenz aus der örtlich gemittelten Heizkörpertemperatur und der Temperatur der dem Heizkörper zugeordneten Temperatur-Zone verwendet, wobei für die örtlich gemittelte Heizkörpertemperatur das arithmetische Mittel aus Vor- und Rücklauftemperatur genommen wird. Bezeichnet  $\vartheta_Z(t)$  die Temperatur der zugeordneten Temperatur-Zone zum Zeitpunkt  $t$ , so wird in diesem Fall die Übertemperatur beschrieben durch [7] :

$$\Delta\vartheta_{Ue,m}(t) = \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \quad (12)$$

Für Systeme mit größeren Temperaturspreizungen zwischen Vor- und Rücklauftemperatur, wie etwa direkten Fernwärmesystemen, wird zur Beschreibung der Übertemperatur die Verwendung der logarithmischen Übertemperatur [6, 7] empfohlen. In [6] wird

$$\frac{\vartheta_R - \vartheta_Z}{\vartheta_V - \vartheta_Z} < 0.7 \quad (13)$$

als Bedingung für die Verwendung der logarithmischen Übertemperatur angegeben.

Wir werden die Darstellung (12) für die Beschreibung der Übertemperatur verwenden. Mit (11) erhalten wir dann:

$$P_{HK,ab}(t) = k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \right)^a \quad (14)$$

Zur Bestimmung des Wärmeübertragungskoeffizienten  $k_{HK}$  kann die Normleistung  $P_{HK,N}$  des Heizkörpers nach DIN EN 442 verwendet werden. In der DIN EN 442 ist die stationäre Normleistung eines Heizkörpers definiert für Normbedingungen, d.h.:

$$\vartheta_V = 75^\circ\text{C}, \quad \vartheta_R = 65^\circ\text{C}, \quad \vartheta_Z = 20^\circ\text{C} \quad (15)$$

Aus

$$P_{HK,N} = k_{HK} \left( \frac{75^\circ\text{C} + 65^\circ\text{C}}{2} - 20^\circ\text{C} \right)^a = k_{HK} (50\text{K})^a \quad (16)$$

folgt:

$$k_{HK} = \frac{P_{HK,N}}{(50\text{K})^a} \quad (17)$$

Mit (8), (9), (10) und (14) erhalten wir:

$$C_{HK} \frac{d\vartheta_{HK,M}(t)}{dt} = c_W \varrho_W \dot{V}(t) (\vartheta_V(t) - \vartheta_R(t)) - k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \right)^a \quad (18)$$

Die Ableitung der mittleren Heizkörpertemperatur kann durch die Ableitung der Rücklauftemperatur hinreichend genau beschrieben werden [7], d.h. es gilt:

$$\frac{d\vartheta_{HK,M}(t)}{dt} \approx \frac{d\vartheta_R(t)}{dt} \quad (19)$$

Wir ersetzen daher die Ableitung der mittleren Heizkörpertemperatur durch die Ableitung der Rücklauftemperatur und erhalten somit die Bilanzgleichung für den Heizkörper:

$$C_{HK} \frac{d\vartheta_R(t)}{dt} = c_W \varrho_W \dot{V}(t) (\vartheta_V(t) - \vartheta_R(t)) - k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \right)^a \quad (20)$$

Die Normleistung, der Heizkörperexponent, die Leermasse und der Wasserinhalt sind angegeben in der technischen Dokumentation des Heizkörpers. Die Leermasse kann als Masse des Metallanteils genommen werden und der Wasserinhalt in Litern entspricht dann der Masse des Wasseranteils bei einer Massendichte des Wassers von:

$$\varrho_W = 1 \frac{\text{kg}}{\text{l}} \quad (21)$$

**Beispiel 1.** Wir betrachten einen senkrecht profilierten Universalheizkörper vom Typ 22 mit einer Bauhöhe von 600 mm und einer Baulänge von 1000 mm. Der technischen Dokumentation entnehmen wir:

$$a = 1.3208, \quad P_{HK,N} = 1736 \text{ W}, \quad m_{HK,W} = 6.1 \text{ kg}, \quad m_{HK,M} = 34.7 \text{ kg} \quad (22)$$

Für die spezifischen Wärmekapazitäten des Wasser- und Metallanteils nehmen wir:

$$c_W = 4200 \frac{\text{Ws}}{\text{kg K}}, \quad c_M = 450 \frac{\text{Ws}}{\text{kg K}} \quad (23)$$

Dabei haben wir für den Metallanteil den Wert von Eisen genommen. Mit (7) erhalten wir:

$$m_{HK} = \frac{c_M}{c_W} m_{HK,M} + m_{HK,W} = \frac{45}{420} \cdot 34.7 \text{ kg} + 6.1 \text{ kg} = 9.82 \text{ kg} \quad (24)$$

und mit (6) folgt nun:

$$C_{HK} = c_W m_{HK} = 4200 \frac{\text{Ws}}{\text{kg K}} \cdot 9.82 \text{ kg} = 41244 \frac{\text{Ws}}{\text{K}} \quad (25)$$

Ist die technische Dokumentation des Heizkörpers nicht mehr verfügbar, so können diese Daten näherungsweise mit Hilfe von Tabellen bestimmt werden, die in [6] unter Abschnitt 2.2.2-2 zu finden sind. Zur Verwendung dieser Tabellen werden lediglich bauliche Merkmale des Heizkörpers benötigt.

**Beispiel 2.** Wir betrachten noch einmal den Universalheizkörper aus Beispiel 1. Der Tafel 2.2.2-1 in [6] entnehmen wir die Werte:

$$a = 1.3, \quad P_{HK,N} = 1694 \text{ W}, \quad m_{HK,W} = 8.1 \text{ kg}, \quad m_{HK,M} = 39 \text{ kg} \quad (26)$$

Die Werte für den Heizkörperexponenten und für die Normleistung sind sehr nahe an den Herstellerangaben. Die Werte für die Massen sind etwas über den Herstellerangaben.

## 2.3 Bilanzgleichung einer Temperatur-Zone

Wir bezeichnen mit  $D_L$  die Menge aller Raumluftpunkte der Temperatur-Zone. Weiterhin seien  $c_L$  sowie  $\varrho_L$  die spezifische Wärmekapazität sowie die Massendichte von Luft. Die in der Raumlufte gespeicherte Wärmemenge zum Zeitpunkt  $t$  ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} Q_L(t) &= \int_{D_L} c_L \varrho_L \vartheta_Z(t) dx = \vartheta_Z(t) c_L \varrho_L \int_{D_L} 1 dx = \vartheta_Z(t) c_L \varrho_L \mu(D_L) \\ &= C_{Z,L} \vartheta_Z(t) \end{aligned} \quad (27)$$

mit der Wärmekapazität der Raumlufte:

$$C_{Z,L} = c_L \varrho_L \mu(D_L) \quad (28)$$

Dabei ist  $\mu(D_L)$  das Volumen der Raumlufte der Temperatur-Zone.

In analoger Weise können nun die Wärmekapazitäten der Möbel in der Temperatur-Zone bestimmt werden mit den jeweiligen spezifischen Wärmekapazitäten und Massendichten der verwendeten Materialien. Die Wärmekapazitäten der Möbel werden dann zur Wärmekapazität der Raumluft addiert und ergeben die Wärmekapazität  $C_Z$  der Temperatur-Zone. Die in der Temperatur-Zone gespeicherte Wärmemenge ist dann gegeben durch:

$$Q_Z(t) = C_Z \vartheta_Z(t) \quad (29)$$

Viele Tools zur thermischen Gebäudesimulation berücksichtigen nur den Raumluftanteil für die Berechnung der Wärmekapazität und vernachlässigen den Möbelanteil. Diese Tools stellen jedoch die Möglichkeit bereit, den Möbelanteil durch Korrekturfaktoren zur Wärmekapazität hinzuzufügen [4]. Berücksichtigt man nur den Raumluftanteil, so ergibt sich mit:

$$c_L = 1000 \frac{Ws}{kg K}, \quad \varrho_L = 1.2 \frac{kg}{m^3} \quad (30)$$

die Wärmekapazität der Temperatur-Zone durch:

$$C_Z = c_L \varrho_L \mu(D_L) = 1200 \frac{Ws}{K} \cdot \frac{\mu(D_L)}{m^3} \quad (31)$$

Die zeitliche Änderung der Wärmemenge in der Temperatur-Zone ergibt sich aus der vom Heizkörper an die Umgebung abgegebenen thermischen Leistung zuzüglich der Wärmeströme, die in die Temperatur-Zone eintreten und abzüglich der Wärmeströme, die die Temperatur-Zone verlassen, d.h.:

$$\frac{dQ_Z(t)}{dt} = P_{HK,ab}(t) + P_{Z,ein}(t) - P_{Z,aus}(t) \quad (32)$$

Dabei bezeichnen  $P_{Z,ein}$  und  $P_{Z,aus}$  die ein- und austretenden Wärmeströme.

Zu den eintretenden Wärmeströmen zählen solare Strahlung durch Fenster, Wärmeleistung durch elektrische Geräte oder auch durch Personen, die sich in der Temperatur-Zone aufhalten. Austretende Wärmeströme sind die Wärmeabgabe an die Außenwand und an die Fenster. Die Wärmeabgabe an die Außenwand teilt sich auf in einen Anteil, der in der Wärmekapazität der Außenwand gespeichert wird und einen Transmissionswärmeverlust, d.h. den Wärmestrom an die Außenluft durch die Außenwand. Die Wärmeabgabe an Fenster teilt sich auf in einen Anteil, der in der Wärmekapazität des Fensters gespeichert wird, einen Transmissionswärmeverlust, d.h. den Wärmestrom an die Außenluft durch das geschlossene Fenster, sowie Luftwechselperluste, d.h. konvektiver Wärmestrom bei geöffnetem Fenster.

Wir werden im Folgenden die Einträge durch solare Strahlung sowie die Wärmeleistung von elektrischen Geräten und Personen vernachlässigen. Dies hat zum Einen den Grund, dass diese Einträge in typischen Bestandsgebäuden, die nicht Niedrig-Energie-Häuser oder Passiv-Häuser sind, gegenüber der Wärmeleistung des Heizkörpers während einer Heizperiode vernachlässigt werden können, und zum Anderen sind für die Modellierung dieser Einträge sehr genaue Informationen notwendig. Weiterhin werden wir die Luftwechselperluste vernachlässigen.

Für eine genauere Modellierung des Wärmedurchgangs durch die Außenwand im dynamischen Fall sind die folgenden drei Prozesse zu berücksichtigen:

- Wärmeübergang von der Raumluft an die innere Oberfläche der Außenwand
- Wärmeleitung durch die Außenwand
- Wärmeübergang von der äußeren Oberfläche der Außenwand an die Außenluft

Beim Übergang von der Raumluft zur inneren Oberfläche der Außenwand entsteht eine thermische Grenzschicht. Ebenso entsteht eine thermische Grenzschicht beim Übergang von der äußeren Oberfläche der Außenwand zur Außenluft. Die Wärmeströme von der Raumluft zur Außenwand bzw. von der Außenwand zur Außenluft können mit Hilfe von Wärmeübergangskoeffizienten beschrieben werden. Sowohl der innere als auch der äußere Wärmeübergangskoeffizient hängen von der Strömungsgeschwindigkeit der Raum- bzw. Außenluft und der Oberflächenbeschaffenheit der inneren bzw. äußeren Wandoberfläche ab. Insbesondere der äußere Wärmeübergangskoeffizient ist stark von den Wetterverhältnissen abhängig.

Zur dynamischen Beschreibung der in der Außenwand gespeicherten Wärmemenge zum Zeitpunkt  $t$  wird die Wandtemperatur als Funktion des Ortes und der Zeit benötigt. Die mathematische Beschreibung der Wandtemperatur führt auf ein Anfangs- und Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung, wobei die Randwerte die innere und äußere Wandoberflächentemperatur sind.

Nach dem Beuken Modell kann eine einschichtige Wand durch eine  $T$ -Schaltung beschrieben werden, in der die in der Wand gespeicherte Wärmemenge in der Mitte der Wand konzentriert ist. Die Wärmeströme von der inneren Wandoberfläche zur Wandmitte sowie von der Wandmitte zur äußeren Wandoberfläche werden dann durch die Wärmeleitungen in den beiden Wandhälften beschrieben. Bei einer mehrschichtigen Wand erhält man dann eine entsprechende Hintereinanderschaltung solcher  $T$ -Schaltungen.

Wir werden im Folgenden die Wärmekapazitäten von Fenster und Außenwand vernachlässigen, d.h. wir beschreiben den Wärmestrom aus der Temperatur-Zone nur durch die Transmissionswärmeverluste an die Außenluft durch Fenster und Außenwand. Diese können zum Zeitpunkt  $t$  beschrieben werden durch:

$$P_T(t) = k_T (\vartheta_Z(t) - \vartheta_A(t)) \quad (33)$$

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten:

$$k_T = U_F A_F + U_W A_W \quad (34)$$

Dabei bezeichnen  $U_F, U_W$  die  $U$ -Werte von Fenster und Außenwand,  $A_F, A_W$  die Flächeninhalte von Fenster und Außenwand und  $\vartheta_A(t)$  ist die Außentemperatur zum Zeitpunkt  $t$ . Befinden sich mehrere Fenster im Raum, so können die Produkte aus den  $U$ -Werten und Flächeninhalten der einzelnen Fenster addiert werden zum gemeinsamen Wert  $U_F A_F$ .

**Bemerkung 1.** *Der  $U$ -Wert dient grundsätzlich der Beschreibung der Transmissionswärmeverluste im stationären Fall. Geht man jedoch davon aus, dass die bei einem Aufheizprozess in der Wand gespeicherte Wärme und die bei einem Abkühlprozess wieder abgegebene Wärme sich in etwa ausgleichen, so kann der Transmissionswärmeverlust auch im dynamischen Fall mit Hilfe des  $U$ -Wertes hinreichend genau beschrieben werden. Verzögerungseffekte, die bei einem Aufheiz- bzw. Abkühlprozess durch die Speicherung bzw. Abgabe von Wärme durch die Wand entstehen werden hierdurch nicht berücksichtigt.*

Mit

$$P_{Z,\text{ein}} = 0, \quad P_{Z,\text{aus}}(t) = P_T(t) \quad (35)$$

sowie (32), (14), (29) und (33) erhalten wir nun die Bilanzgleichung der Temperatur-Zone durch:

$$C_Z \frac{d\vartheta_Z(t)}{dt} = k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \right)^a - k_T (\vartheta_Z(t) - \vartheta_A(t)) \quad (36)$$

### 3 Profile

#### 3.1 Außentemperatur

Da die Außentemperatur im mathematischen Modell verwendet wird, benötigen wir ein Profil der Außentemperatur. Hierfür kann z.B. ein Wettermodell angewendet werden [17] oder es können Messdaten verwendet werden [15]. Wir erstellen hier ein Profil für die Außentemperatur mit Hilfe von Messdaten. Sei hierzu

$$\{\vartheta_{A,M}(ih) : i \in \{0, \dots, 24\}\} \quad (37)$$

ein Messdatensatz für 24 Stunden. Setzen wir

$$\vartheta_{A,M}(-1h) = \vartheta_{A,M}(0), \quad \vartheta_{A,M}(25h) = \vartheta_{A,M}(24h), \quad (38)$$

so kann ein Temperaturprofil für einen Tag definiert werden mit Hilfe der Quasi-Interpolierenden [18] durch:

$$\vartheta_A(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=-1}^{25} \vartheta_{A,M}(ih) e^{-\left(\frac{t-i}{h}\right)^2} \quad (39)$$

Hierbei wurde die Fortsetzung auf  $-1$  und  $25$  durchgeführt, um das Abklingverhalten der Exponentialfunktion an den Intervallrändern zu kompensieren.

**Beispiel 3.** Wir betrachten ein Temperaturprofil mit stündlich gemessenen Daten für einen Dezembertag. In der Tabelle sind die Messwerte angegeben und in Abbildung 1 sind die Messdaten sowie das durch Quasi-Interpolation erzeugte Außentemperaturprofil (39) zu sehen.

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{\vartheta_{A,M}(mh)}{^\circ\text{C}}$	-2.2	-2.8	-2.6	-3.4	-3.6	-3.2	-3.6	-4.3	-4.1	-1.8	1.2	1.9
$m$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$\frac{\vartheta_{A,M}(mh)}{^\circ\text{C}}$	2.9	3.5	3.5	2.9	0.1	-0.4	-1.3	-0.7	-1.2	-1.5	-2.3	-2.1

Tabelle 1: Messdaten der Außentemperatur für einen Dezembertag.

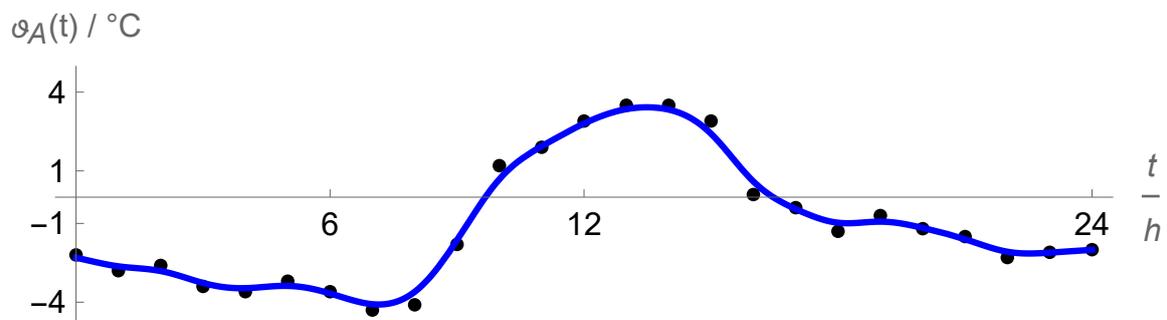


Abbildung 1: Temperaturprofil durch Quasi-Interpolation (blaue Linie) und zugehörige Messdaten (schwarze Punkte) für einen Dezembertag.

### 3.2 Nutzerprofil

Das Nutzerprofil  $\vartheta_{Z,Soll}(t)$  einer Temperatur-Zone beschreibt den zeitlichen Verlauf des eingestellten Sollwertes am Heizkörperregler. Ein Sollwertsprung, d.h. der Sprung von einem Sollwert  $\vartheta_1$  auf einen anderen Sollwert  $\vartheta_2$ , zum Zeitpunkt  $t_0$  kann mit Hilfe der Heaviside Funktion  $H$  beschrieben werden durch:

$$\vartheta_{Z,Soll}(t) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1) H(t - t_0) \quad (40)$$

Da dies eine unstetige Funktion liefert, werden wir einen Sollwertsprung zum Zeitpunkt  $t_0$  mit Hilfe einer Approximation der Heaviside Funktion beschreiben, wie sie in [1] zur Beschreibung einer Grenzschicht verwendet wurde. Für  $\varepsilon > 0$  definieren wir die Funktion:

$$H_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} (1 + \sin(\frac{\pi t}{2\varepsilon})) & , \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 1 & , \quad t > \varepsilon \end{cases} \quad (41)$$

Für die Ableitung gilt:

$$\frac{dH_\varepsilon(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & , \quad t < -\varepsilon \\ \frac{\pi}{4\varepsilon} \cos(\frac{\pi t}{2\varepsilon}) & , \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & , \quad t > \varepsilon \end{cases} \quad (42)$$

Wegen

$$\lim_{t \searrow -\varepsilon} \frac{dH_\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\pi}{4\varepsilon} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \lim_{t \nearrow -\varepsilon} \frac{dH_\varepsilon(t)}{dt} \quad (43)$$

und

$$\lim_{t \nearrow \varepsilon} \frac{dH_\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\pi}{4\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \lim_{t \searrow \varepsilon} \frac{dH_\varepsilon(t)}{dt} \quad (44)$$

ist die Funktion  $H_\varepsilon$  stetig differenzierbar. Mit Hilfe von  $H_\varepsilon$  beschreiben wir nun einen Sollwertsprung durch:

$$\vartheta_{Z,Soll}(t) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1) H_\varepsilon(t - t_0 - \varepsilon) \quad (45)$$

Hierbei beginnt die Änderung des Sollwertes zum Zeitpunkt  $t_0$  und ist nach  $\Delta t = 2\varepsilon$  abgeschlossen. Der Wert  $\varepsilon$  kann dann geeignet gewählt werden.

In Abbildung 2 sind der Verlauf von  $H_\varepsilon$  und der Verlauf einer Sollwertänderung von  $\vartheta_1$  auf  $\vartheta_2$  zum Zeitpunkt  $t_0$  mit Hilfe von  $H_\varepsilon$  zu sehen.

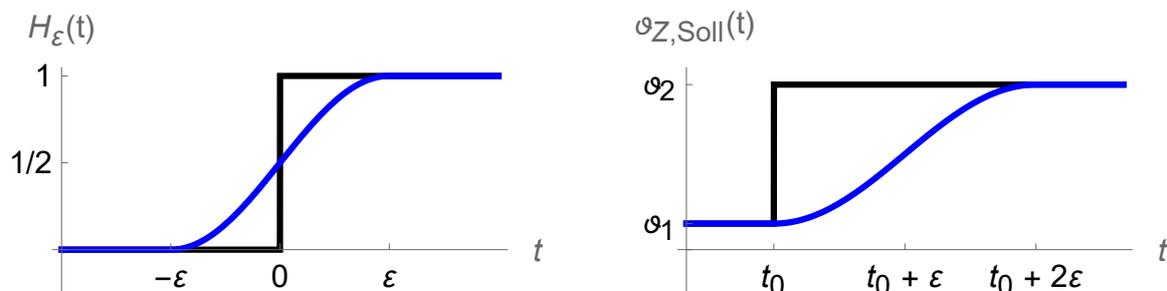


Abbildung 2: Links: Approximierte Heaviside Funktion  $H_\varepsilon$  (blau) und Heaviside Funktion (schwarz). Rechts: Sollwertänderung von  $\vartheta_1$  auf  $\vartheta_2$  zum Zeitpunkt  $t_0$  mit der Heaviside Funktion (schwarz) und der approximierten Heaviside Funktion (blau).

**Beispiel 4.** Wir betrachten das folgende Nutzerprofil. Zunächst ist die Solltemperatur in der Nacht bei  $18\text{ }^\circ\text{C}$ . Um 6 Uhr wird der Sollwert auf  $22\text{ }^\circ\text{C}$  erhöht, um 9 Uhr wird er auf  $20\text{ }^\circ\text{C}$  reduziert und um 20 Uhr wird er wieder auf  $18\text{ }^\circ\text{C}$  reduziert. Mit Hilfe von  $H_\varepsilon$  kann das Nutzerprofil wie folgt beschrieben werden:

$$\vartheta_{Z,Soll}(t) = \left(18 + 4H_\varepsilon(t - 6\text{ h} - \varepsilon) - 2H_\varepsilon(t - 9\text{ h} - \varepsilon) - 2H_\varepsilon(t - 20\text{ h} - \varepsilon)\right)^\circ\text{C} \quad (46)$$

Dabei wird  $\varepsilon = 5\text{ min}$  gesetzt. In Abbildung 3 ist das Nutzerprofil zu sehen.

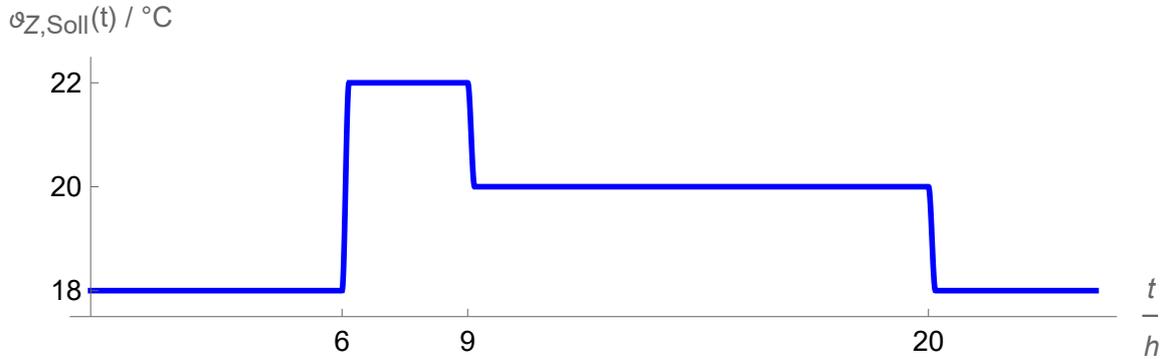


Abbildung 3: Nutzerprofil in Beispiel 4 mit  $\varepsilon = 5\text{ min}$ .

### 3.3 Heizkurve

Klassische Regeleinrichtungen von Wärmeerzeugern verwenden eine sog. Heizkurve zur Bestimmung des Sollwertes  $\vartheta_{V,Soll}(t)$  der Vorlauftemperatur  $\vartheta_V(t)$ . D.h. der aktuelle Wert des Sollwertes wird bestimmt mit Hilfe der Außentemperatur  $\vartheta_A(t)$  und einer gewissen funktionalen Abhängigkeit. Die Bestimmung des Sollwertes kann also beschrieben werden durch:

$$\vartheta_{V,Soll}(t) = f_{HK}(t, \vartheta_A(t)) \quad (47)$$

mit einer Funktion  $f_{HK}$ . Man spricht hier von einer witterungsgeführten Betriebsweise. Um die Trägheit des Gebäudes abzubilden, wird häufig zunächst ein gedämpfter Wert der Außentemperatur bestimmt. Die Funktion  $f_{HK}$  hängt vom Hersteller des Wärmeerzeugers bzw. vom Hersteller der Regelung ab.

Ist der Sollwert der Vorlauftemperatur  $\vartheta_{V,Soll}(t)$  gemäß der Heizkurve bestimmt, regelt der Regler des Wärmeerzeugers die thermische Leistung so, dass die Vorlauftemperatur  $\vartheta_V(t)$  diesem Sollwert entspricht.

In dieser Arbeit nehmen wir an, dass Wärmeverluste auf den (isolierten) Rohrleitungen auf dem Weg vom Wärmeerzeuger zu den Heizkörpern vernachlässigt werden können, was in typischen Einfamilienhäusern eine realistische Annahme ist. Wir nehmen also in dieser Arbeit an, dass die Vorlauftemperatur des Wärmeerzeugers an jedem Heizkörper anliegt. Sind die Rohrleitungen länger, so dass diese Annahme nicht mehr gerechtfertigt ist, kann ein Rohrleitungs-Modell verwendet werden [19].

Für die Einstellung der Heizkurve wird der Auslegungszustand betrachtet. Unter Auslegungszustand versteht man den stationären Zustand, bei dem die Außentemperatur der Normaußentemperatur  $\vartheta_{A,N}$  der entsprechenden Region entspricht und die Raumtemperatur in jedem Raum der Raumsolltemperatur  $\vartheta_{Z,Soll,N}$  entspricht. Die Raumheizlast  $P_{HL}$  ist die stationäre Wärmeleistung, die notwendig ist, um die Raumtemperatur im Auslegungszustand auf dem Sollwert  $\vartheta_{Z,Soll,N}$  zu halten.

Die Normaußentemperatur hängt ab von der Region. Das Verfahren zur Bestimmung der Raumheizlast ist geregelt in der DIN EN 12831. Neben den Transmissionswärmeverlusten werden bei der Heizlastberechnung auch die Luftwechselverluste mit einbezogen.

Wir vernachlässigen hier die Luftwechselverluste und werden die gesamte Heizlast als Transmissionswärmeverlust interpretieren. Mit:

$$P_{HL} = k_T (\vartheta_{Z,Soll,N} - \vartheta_{A,N}) \quad (48)$$

folgt dann:

$$k_T = \frac{P_{HL}}{\vartheta_{Z,Soll,N} - \vartheta_{A,N}} \quad (49)$$

In der DIN ist die Raumsolltemperatur mit

$$\vartheta_{Z,Soll,N} = 20^\circ C \quad (50)$$

angegeben. Ausnahmen bilden Badezimmer und beheizte Nebenräume.

Da der Auslegungszustand ein stationärer Zustand ist, verschwinden die zeitlichen Ableitungen der Temperaturen. Im Auslegungszustand entspricht also die vom Heizkörper abgegebene thermische Leistung der Raumheizlast.

Wir betrachten ein Gebäude mit  $n$  Heizkörpern. Befinden sich mehr als ein Heizkörper in einem Raum, so wird die Raumheizlast in geeigneter Weise auf die Heizkörper aufgeteilt. Es wird also jedem Heizkörper eine Heizlast zugeordnet. Mit (14), (17) und (48) erhalten wir für  $j = 1, \dots, n$ :

$$\frac{P_{HK,N,j}}{(50K)^{a_j}} \left( \frac{\vartheta_{V,j,Ausleg} + \vartheta_{R,j,Ausleg}}{2} - \vartheta_{Z,Soll,N,j} \right)^{a_j} = P_{HL,j} \quad (51)$$

Dabei bezieht sich der Index  $j$  auf die Nummer des Heizkörpers. Mit einer vorgegebenen Auslegungsspreizung:

$$\Delta\vartheta_{j,Ausleg} = \vartheta_{V,j,Ausleg} - \vartheta_{R,j,Ausleg} \quad (52)$$

erhalten wir:

$$\frac{P_{HK,N,j}}{(50K)^{a_j}} \left( \frac{2\vartheta_{V,j,Ausleg} - \Delta\vartheta_{j,Ausleg}}{2} - \vartheta_{Z,Soll,N,j} \right)^{a_j} = P_{HL,j} \quad (53)$$

und somit:

$$\vartheta_{V,j,Ausleg} = 50K \left( \frac{P_{HL,j}}{P_{HK,N,j}} \right)^{1/a_j} + \vartheta_{Z,Soll,N,j} + \frac{\Delta\vartheta_{j,Ausleg}}{2} \quad (54)$$

Dies ist die Vorlauftemperatur, die der Heizkörper  $j$  im Auslegungszustand benötigt. Da alle Heizkörper die gleiche Vorlauftemperatur vom Wärmeerzeuger erhalten, muss die Auslegungsvorlauftemperatur nach dem Heizkörper ausgelegt werden, der die höchste Vorlauftemperatur benötigt. Wir setzen daher:

$$\vartheta_{V,Ausleg} = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \left( 50K \left( \frac{P_{HL,j}}{P_{HK,N,j}} \right)^{1/a_j} + \vartheta_{Z,Soll,N,j} + \frac{\Delta\vartheta_{j,Ausleg}}{2} \right) \quad (55)$$

Die Heizkurve muss dann so eingestellt werden, dass diese Vorlauftemperatur im Auslegungszustand vom Wärmeerzeuger geliefert wird. Bei höheren Temperaturen wird die Vorlauftemperatur gemäß der Heizkurve reduziert. Typische Heizkurven sind leicht gekrümmt, um dem Heizkörper-Exponenten Rechnung zu tragen. Wir gehen hier davon aus, dass die Vorlauftemperatur stets dem Sollwert entspricht.

## 4 Bestimmung der Zustandsgrößen

### 4.1 Anfangswertproblem für eine Temperatur-Zone

Es seien nun  $\vartheta_{R,0}$  und  $\vartheta_{Z,0}$  gegebene Anfangswerte für  $\vartheta_R$  und  $\vartheta_Z$ . Weiterhin sei  $T > 0$  die Beobachtungszeit. Mit (20) und (36) erhalten wir zur Bestimmung der Temperaturen  $\vartheta_R$  und  $\vartheta_Z$  im Zeitintervall  $[0, T]$  das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_R(t)}{dt} &= \frac{c_W \varrho_W}{C_{HK}} \dot{V}(t) (\vartheta_V(t) - \vartheta_R(t)) \\ &\quad - \frac{k_{HK}}{C_{HK}} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \right)^a, \quad t \in (0, T) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_Z(t)}{dt} &= \frac{k_{HK}}{C_Z} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \right)^a \\ &\quad - \frac{k_T}{C_Z} (\vartheta_Z(t) - \vartheta_A(t)), \quad t \in (0, T) \end{aligned} \quad (57)$$

$$\vartheta_R(0) = \vartheta_{R,0} \quad (58)$$

$$\vartheta_Z(0) = \vartheta_{Z,0} \quad (59)$$

**Satz 1.** *Es seien  $\vartheta_V, \vartheta_A$  und  $\dot{V}$  gegebene stetige Funktionen. Dann besitzt das Anfangswertproblem (56) - (59) eine eindeutig bestimmte lokale Lösung.*

*Beweis.* Das Anfangswertproblem (56) - (59) kann geschrieben werden in der Form:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vartheta_R(t) \\ \vartheta_Z(t) \end{pmatrix} = F(t, \vartheta_R(t), \vartheta_Z(t)), \quad t \in (0, T) \quad (60)$$

$$\begin{pmatrix} \vartheta_R(0) \\ \vartheta_Z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_{R,0} \\ \vartheta_{Z,0} \end{pmatrix} \quad (61)$$

mit:

$$F_1(t, y_1, y_2) = \frac{c_W \varrho_W}{C_{HK}} \dot{V}(t) (\vartheta_V(t) - y_1) - \frac{k_{HK}}{C_{HK}} \left( \frac{\vartheta_V(t) + y_1}{2} - y_2 \right)^a \quad (62)$$

$$F_2(t, y_1, y_2) = \frac{k_{HK}}{C_Z} \left( \frac{\vartheta_V(t) + y_1}{2} - y_2 \right)^a - \frac{k_T}{C_Z} (y_2 - \vartheta_A(t)) \quad (63)$$

Da  $F$  stetig nach  $y_1$  und  $y_2$  partiell differenzierbar ist, folgt die Behauptung mit dem Satz von Picard-Lindelöf [20].  $\square$

### 4.2 Volumenstrom

Zur Bestimmung des Volumenstromes  $\dot{V}(t)$  betrachten wir zunächst den quasi-stationären Zustand, d.h. dass nach einer Sollwertänderung die zeitlichen Ableitungen vernachlässigt werden können. Aus (56) + (57) erhalten wir dann:

$$c_W \varrho_W \tilde{V}(t) (\vartheta_V(t) - \tilde{\vartheta}_R(t)) = k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \tilde{\vartheta}_R(t)}{2} - \tilde{\vartheta}_Z(t) \right)^a, \quad (64)$$

$$k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \tilde{\vartheta}_R(t)}{2} - \tilde{\vartheta}_Z(t) \right)^a = k_T (\tilde{\vartheta}_Z(t) - \vartheta_A(t)) \quad (65)$$

Nun gehen wir von der idealen Annahme aus, dass der Heizkörperregler exakt arbeitet, d.h. dass die Temperatur  $\tilde{\vartheta}_Z(t)$  gleich dem Sollwert  $\vartheta_{Z,Soll}(t)$  ist und der Heizkörperregler sehr schnell den Volumenstrom regulieren kann. Dies ist natürlich nur möglich, wenn die zugeführte thermische Energie hierfür ausreicht. Wir werden daher eine Bedingung formulieren unter der die Gleichung

$$\tilde{\vartheta}_Z(t) = \vartheta_{Z,Soll}(t) \quad (66)$$

als wahr angenommen werden darf.

Der Volumenstrom ist beschränkt durch einen maximalen Wert  $\dot{V}_{max}$ . Dieser Wert hängt ab von der vorliegenden Hydraulik. Mit

$$\dot{V}_{max} \geq \tilde{V}(t) \quad (67)$$

und (64), (65) + (66) erhalten wir:

$$\begin{aligned} c_W \varrho_W \dot{V}_{max} \left( \vartheta_V(t) - \tilde{\vartheta}_R(t) \right) &\geq c_W \varrho_W \tilde{V}(t) \left( \vartheta_V(t) - \tilde{\vartheta}_R(t) \right) \\ &= k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \tilde{\vartheta}_R(t)}{2} - \vartheta_{Z,Soll}(t) \right)^a \\ &= k_T \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right) \end{aligned} \quad (68)$$

und somit:

$$c_W \varrho_W \dot{V}_{max} \left( \vartheta_V(t) - \tilde{\vartheta}_R(t) \right) \geq k_T \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right) \quad (69)$$

bzw.:

$$\tilde{\vartheta}_R(t) \leq \vartheta_V(t) - \frac{k_T}{c_W \varrho_W \dot{V}_{max}} \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right) \quad (70)$$

Mit (65), (66), (70) und der Monotonie der Potenzfunktion folgt nun:

$$\begin{aligned} &k_T \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right) \\ &= k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \tilde{\vartheta}_R(t)}{2} - \vartheta_{Z,Soll}(t) \right)^a \\ &\leq k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_V(t) - \frac{k_T}{c_W \varrho_W \dot{V}_{max}} \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right)}{2} - \vartheta_{Z,Soll}(t) \right)^a \\ &= k_{HK} \left( \vartheta_V(t) - \frac{k_T \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right)}{2 c_W \varrho_W \dot{V}_{max}} - \vartheta_{Z,Soll}(t) \right)^a \end{aligned} \quad (71)$$

und somit:

$$k_T \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right) \leq k_{HK} \left( \vartheta_V(t) - \frac{k_T \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right)}{2 c_W \varrho_W \dot{V}_{max}} - \vartheta_{Z,Soll}(t) \right)^a \quad (72)$$

Hieraus erhalten wir die Bedingung:

$$\vartheta_V(t) \geq \vartheta_{Z,Soll}(t) + \frac{k_T \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right)}{2 c_W \varrho_W \dot{V}_{max}} + \left( \frac{k_T}{k_{HK}} \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right) \right)^{1/a} \quad (73)$$

Wir setzen:

$$\vartheta_B(t) := \vartheta_{Z,Soll}(t) + \frac{k_T \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right)}{2 c_W \varrho_W \dot{V}_{max}} + \left( \frac{k_T}{k_{HK}} \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t) \right) \right)^{1/a} \quad (74)$$

Hiermit kann die Bedingung formuliert werden durch:

$$\vartheta_V(t) \geq \vartheta_B(t) \quad (75)$$

Es sei nun die Bedingung (75) erfüllt. Mit (65) und (66) erhalten wir:

$$k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \tilde{\vartheta}_R(t)}{2} - \vartheta_{Z,Soll}(t) \right)^a = k_T (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t)) \quad (76)$$

und somit:

$$\tilde{\vartheta}_R(t) = -\vartheta_V(t) + 2 \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) + \left( \frac{k_T}{k_{HK}} (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t)) \right)^{1/a} \right) \quad (77)$$

Mit (64) und (66) erhalten wir weiterhin:

$$c_W \varrho_W \tilde{V}(t) (\vartheta_V(t) - \tilde{\vartheta}_R(t)) = k_{HK} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \tilde{\vartheta}_R(t)}{2} - \vartheta_{Z,Soll}(t) \right)^a \quad (78)$$

Setzen wir (77) hier ein, so erhalten wir:

$$\tilde{V}(t) = \frac{k_T (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t))}{2 c_W \varrho_W \left( \vartheta_V(t) - \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) + \left( \frac{k_T}{k_{HK}} (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t)) \right)^{1/a} \right) \right)} \quad (79)$$

Ist die Bedingung (75) nicht erfüllt, so ist die zugeführte thermische Energie nicht ausreichend, um die Temperatur auf ihrem Sollwert zu halten. In diesem Fall wird der Heizkörperregler den Volumenstrom auf den maximalen Wert  $\dot{V}_{max}$  regeln. Wir setzen daher in diesem Fall den Volumenstrom auf seinen maximalen Wert.

Wir setzen nun für den Volumenstrom:

$$\dot{V}(t) = \begin{cases} \frac{k_T (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t))}{2 c_W \varrho_W \left( \vartheta_V(t) - \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) + \left( \frac{k_T}{k_{HK}} (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t)) \right)^{1/a} \right) \right)} & , \quad \vartheta_V(t) \geq \vartheta_B(t) \\ \dot{V}_{max} & , \quad \vartheta_V(t) < \vartheta_B(t) \end{cases} \quad (80)$$

**Satz 2.** *Der Volumenstrom (80) ist stetig.*

*Beweis.* Mit (80) und (74) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta_V(t) \searrow \vartheta_B(t)} \dot{V}(t) &= \frac{k_T (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t))}{2 c_W \varrho_W \left( \vartheta_B(t) - \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) + \left( \frac{k_T}{k_{HK}} (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t)) \right)^{1/a} \right) \right)} \\ &= \frac{k_T (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t))}{2 c_W \varrho_W \left( \frac{k_T (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t))}{2 c_W \varrho_W \dot{V}_{max}} \right)} = \dot{V}_{max} \\ &= \lim_{\vartheta_V(t) \nearrow \vartheta_B(t)} \dot{V}(t) \end{aligned} \quad (81)$$

Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.** *Es seien  $\vartheta_A$  sowie  $\vartheta_V$  stetige Funktionen und  $\dot{V}$  gemäß (80). Dann besitzt das Anfangswertproblem (56) - (59) eine eindeutig bestimmte lokale Lösung.*

*Beweis.* Nach Satz 2 ist (80) stetig. Die Behauptung folgt daher mit Satz 1.  $\square$

### 4.3 Normierung

Mit

$$c_W \varrho_W = 4200 \frac{Ws}{kg K} \cdot 1 \frac{kg}{l} = \frac{4200}{3600} \frac{Wh}{K} \cdot \frac{1}{l} = \frac{7}{6} \frac{W}{K} \cdot \frac{1}{l/h} \quad (82)$$

erhalten wir:

$$\frac{c_W \varrho_W}{C_{HK}} = \frac{\frac{7}{6} \frac{W}{K} \cdot \frac{1}{l/h}}{\frac{C_{HK}}{Ws/K} \frac{Ws}{K}} = \frac{\frac{7}{6} \cdot 3600 \cdot \frac{1}{l/h}}{\frac{C_{HK}}{Ws/K} 1 h} = \frac{4200}{\frac{C_{HK}}{Ws/K} \cdot \frac{l}{h}} h^{-1} \quad (83)$$

$$\frac{k_{HK}}{C_{HK}} = \frac{P_{HK,N}}{(50K)^a C_{HK}} = \frac{\frac{P_{HK,N}}{W} W}{(50K)^a \frac{C_{HK}}{Ws/K} \frac{Ws}{K}} = \frac{3600 \frac{P_{HK,N}}{W}}{50^a \frac{C_{HK}}{Ws/K} K^{a-1}} h^{-1} \quad (84)$$

$$\frac{k_{HK}}{C_Z} = \frac{P_{HK,N}}{(50K)^a C_Z} = \frac{\frac{P_{HK,N}}{W} W}{(50K)^a \frac{C_Z}{Ws/K} \frac{Ws}{K}} = \frac{3600 \frac{P_{HK,N}}{W}}{50^a \frac{C_Z}{Ws/K} K^{a-1}} h^{-1} \quad (85)$$

$$\frac{k_T}{C_Z} = \frac{\frac{k_T}{W/K} \frac{W}{K}}{\frac{C_Z}{Ws/K} \frac{Ws}{K}} = 3600 \frac{\frac{k_T}{W/K}}{\frac{C_Z}{Ws/K}} h^{-1} \quad (86)$$

$$\frac{k_T}{2 c_W \varrho_W} = \frac{\frac{k_T}{W/K} \frac{W}{K}}{\frac{7}{3} \frac{W}{K} \cdot \frac{1}{l/h}} = \frac{3}{7} \frac{k_T}{W/K} \frac{l}{h} \quad (87)$$

$$\frac{k_T}{k_{HK}} = \frac{\frac{k_T}{W/K} \frac{W}{K} (50K)^a}{\frac{P_{HK,N}}{W} W} = \frac{k_T}{\frac{P_{HK,N}}{W}} 50^a K^{a-1} \quad (88)$$

Hiermit erhalten wir für das Anfangswertproblem (56) - (59) die normierte Darstellung:

$$\vartheta_B(t) = \frac{\frac{3}{7} \frac{k_T}{W/K} (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t))}{\frac{\dot{V}_{max}}{l/h}} + 50K \left( \frac{\frac{k_T}{W/K}}{\frac{P_{HK,N}}{W}} \left( \frac{\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t)}{K} \right) \right)^{1/a} + \vartheta_{Z,Soll}(t), \quad t \in [0, T] \quad (89)$$

$$\dot{V}(t) = \frac{\frac{3}{7} \frac{k_T}{W/K} (\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t))}{\vartheta_V(t) - \left( \vartheta_{Z,Soll}(t) + 50K \left( \frac{\frac{k_T}{W/K}}{\frac{P_{HK,N}}{W}} \left( \frac{\vartheta_{Z,Soll}(t) - \vartheta_A(t)}{K} \right) \right)^{1/a} \right) \frac{l}{h}}, \quad \vartheta_V(t) \geq \vartheta_B(t), \quad t \in [0, T] \quad (90)$$

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_{max}, \quad \vartheta_V(t) < \vartheta_B(t), \quad t \in [0, T] \quad (91)$$

$$\frac{d\vartheta_R(t)}{dt} = \frac{4200}{\frac{C_{HK}}{Ws/K}} \frac{\dot{V}(t)}{l/h} (\vartheta_V(t) - \vartheta_R(t)) h^{-1} - \frac{3600 \frac{P_{HK,N}}{W}}{50^a \frac{C_{HK}}{Ws/K} K^{a-1}} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \right)^a h^{-1}, \quad t \in (0, T) \quad (92)$$

$$\frac{d\vartheta_Z(t)}{dt} = \frac{3600 \frac{P_{HK,N}}{W}}{50^a \frac{C_Z}{Ws/K} K^{a-1}} \left( \frac{\vartheta_V(t) + \vartheta_R(t)}{2} - \vartheta_Z(t) \right)^a h^{-1} - 3600 \frac{\frac{k_T}{W/K}}{\frac{C_Z}{Ws/K}} (\vartheta_Z(t) - \vartheta_A(t)) h^{-1}, \quad t \in (0, T) \quad (93)$$

$$\vartheta_R(0) = \vartheta_{R,0} \quad (94)$$

$$\vartheta_Z(0) = \vartheta_{Z,0} \quad (95)$$

## 5 Abschließende Bemerkungen

Mit (90) + (91) kann der Volumenstrom separat bestimmt werden und steht aufgrund von Satz 2 als stetige Funktion für die Lösung des Anfangswertproblems (92) - (95) zur Verfügung.

Es seien nun  $\dot{V}_1(t), \dots, \dot{V}_n(t)$  die Volumenströme und  $\vartheta_{R,1}(t), \dots, \vartheta_{R,n}(t)$  die Rücklauf-temperaturen der Heizkörper des Hauses. Die Rücklaufrohre der Heizkörper münden in einem gemeinsamen Rücklauf, der das abgekühlte Heizungswasser zum Wärmeerzeuger zurück transportiert. Der Gesamtvolumenstrom  $\dot{V}_{ges}(t)$  im Wärmeerzeuger ergibt sich als Summe über alle Volumenströme von den Heizkörpern. Für  $\dot{V}_{ges}(t) \neq 0$  beschreiben wir die Rücklauf-temperatur  $\vartheta_{R,ges}(t)$ , die im Wärmeerzeuger ankommt, durch:

$$\vartheta_{R,ges}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{V}_i(t)}{\dot{V}_{ges}(t)} \vartheta_{R,i}(t) \quad (96)$$

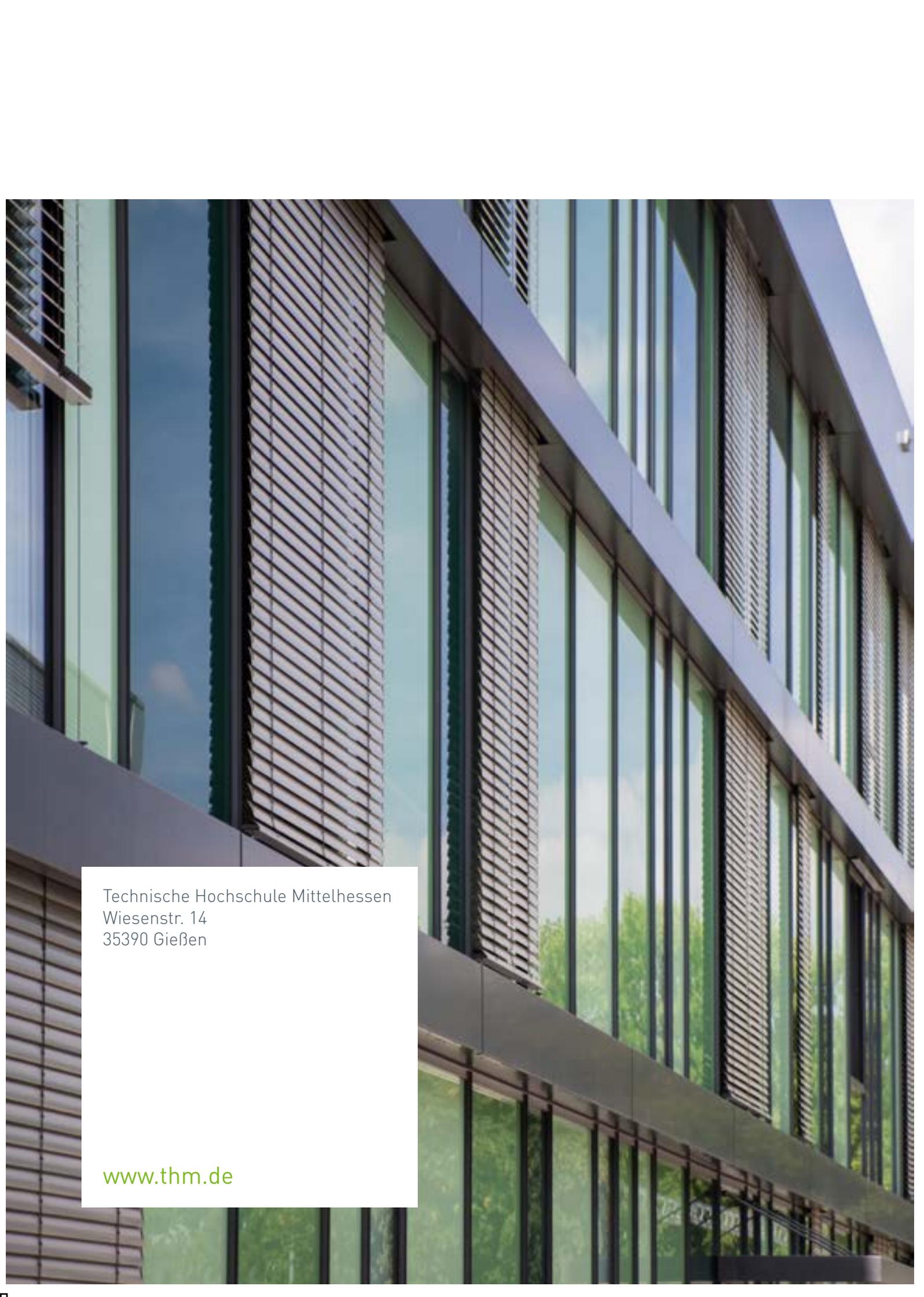
Im Fall  $\dot{V}_{ges}(t) = 0$  kann die Rücklauf-temperatur  $\vartheta_{R,ges}(t)$  durch einen Abkühlprozess in der Wärmeezelle des Wärmeerzeugers beschrieben werden.

## Literatur

- [1] F. Müller: Approximating the solution of the discharging process in a domestic hot water storage tank, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 27:1 (2021) 141 - 161. DOI: <https://doi.org/10.1080/13873954.2021.1887277>
- [2] F. Müller: Verallgemeinerte Lösungen für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher, *THM Hochschulschriften* 23 (2023) 1 - 15. DOI: <https://doi.org/10.25716/thm-222>
- [3] F. Müller: Konstruktion klassischer Lösungen für einen Gegenstrom-Wärmetauscher zum Benchmarking numerischer Verfahren, *THM Hochschulschriften* 24 (2023) 1 - 20. DOI: <https://doi.org/10.25716/thm-226>
- [4] I. Beausoleil-Morrison: *Fundamentals of Building Performance Simulation*. Routledge, New York, 2020.
- [5] G. Knabe: *Gebäudeautomation*. Verlag für Bauwesen, Berlin München, 1992.
- [6] K.-J. Albers: *Rechnagel*, Sprenger, Albers - Taschenbuch für Heizung und Klimatechnik, ITM InnoTech Medien GmbH, 81. Auflage, Kleinaitingen, 2022.
- [7] J. Seifert: *Repetitorium Heizungstechnik*, VDE VERLAG, Berlin, 2015.
- [8] D. Risberg, M. Risberg, L. Westerlund: CFD modelling of radiators in buildings with user-defined wall functions, *Applied Thermal Engineering* 94 (2016) 266–273.
- [9] H.D. Baehr, K. Stephan: *Wärme- und Stoffübertragung*, 7., neu bearbeitete Auflage, Springer, Berlin Heidelberg, 2010.
- [10] K. Burg, H. Haf, F. Wille und A. Meister: *Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen*, 5., aktualisierte Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010.
- [11] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

- [12] G.B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1995.
- [13] G.C. Barney, J. Florez: Temperature prediction models and their application to the control of heating systems, IFAC Identification and System Parameter Estimation 2 (1985) 1847 - 1852.
- [14] W. Bosschaerts, T. Van Renterghema, O.A. Hasanb, K. Limam: Development of a Model based predictive control system for heating buildings, Energy Procedia 112 (2017) 519 - 528.
- [15] S. Fielsch, T. Grunert, M. Stursberg, A. Kummert: Model Predictive Control for Hydronic Heating Systems in Residential Buildings, IFAC PapersOnLine 50-1 (2017) 4216 - 4221.
- [16] J. Fong et al: Application of a New Dynamic Heating System Model Using a Range of Common Control Strategies, Buildings 2016, 6, 23.
- [17] M. Garcia-Sanz: A reduced model of central heating systems as a realistic scenario for analyzing control strategies, Applied Mathematical Modelling 21 (1997) 535 - 545.
- [18] F. Müller, W. Varnhorn: Error estimates for approximate approximations with Gaussian kernels on compact intervals, Journal of Approximation Theory 145 (2007) 171 - 181. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.08.004>
- [19] B. van der Heijde et al: Dynamic equation-based thermo-hydraulic pipe model for district heating and cooling systems, Energy Conversion and Management 151 (2017) 158-169.
- [20] H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4. durchgesehene Auflage, B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden 2004.



A photograph of a modern building facade featuring large glass windows and metal panels. The windows reflect the sky and surrounding greenery. The building has a clean, industrial aesthetic with dark frames and light-colored metal accents.

Technische Hochschule Mittelhessen  
Wiesenstr. 14  
35390 Gießen

[www.thm.de](http://www.thm.de)