

Olaf Strelow

Maldistribution - Die tückische Eigenschaft von
Plattenwärmeübertragern

THM-Hochschulschriften Band 21

Olaf Strelow

Maldistribution - Die tückische
Eigenschaft von Plattenwärmeübertragern

THM-Hochschulschriften Band 21

© 2022 Olaf Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Einzelne Hochschulschriften sind auch online abrufbar:

www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

Inhaltsverzeichnis

1	Das Phänomen der Maldistribution	4
2	Physikalisch-technische Grundlagen	5
3	Physikalisch adäquate Berechnung von Plattenwärmeübertragern	6
4	Modelle der hydraulischen Eigenschaften	7
4.1	Hydraulisches Netzmodell	7
4.2	Analytisches Hydraulikmodell	12
4.3	Beispiel: Hydraulische Eigenschaften	15
5	Modell der thermischen Eigenschaften	19
5.1	Thermisches Netzmodell	19
5.2	Beispiel: Thermische Eigenschaften	25
6	Zusammenfassung und Ausblick	31
7	Symbolverzeichnis	33
8	Literatur	35

Maldistribution - Die tückische Eigenschaft von Plattenwärmeübertragern

Prof. Dr.-Ing. O. Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen - FB Maschinenbau & Energietechnik
Institut für Thermodynamik, Energieverfahrenstechnik u. Systemanalyse

St. Tönis, 11.03.2022

1 Das Phänomen der Maldistribution

Plattenwärmeübertrager sind häufig eingesetzte Apparate in verfahrens- und energietechnischen Anlagen. Ihr Vorteil ist das große Leistungsspektrum, die kompakte Bauform sowie die preisgünstige Fertigung. Einschränkungen bestehen bei hohen Betriebsdrücken und stark verunreinigten Medien. Der Einsatz von Plattenwärmeübertragern gilt i.A. als problemlos.

Dennoch gibt es mit diesen Apparaten im realen Einsatz zahlreiche Erfahrungen, bei denen das technologische Verhalten stark von den Erwartungen abweicht. Im Vergleich zur Auslegung sind in diesen Fällen die Druckverluste der Medien zu hoch und die thermische Übertragungsleistung ist zu gering. Diese häufig signifikanten Abweichungen scheinen mit theoretischem „Wissen“ kaum nachvollziehbar zu sein. Als mögliche Ursache für das Apparateversagen wird die ungleiche Stromaufteilung in den Passagen, die sogenannte Maldistribution gesehen. Bezüglich deren Ursachen existieren viele Überlegungen. Diese reichen von empirisch-statistischen Untersuchungen bis zur mathematischen Beschreibung mit partiellen Differenzialgleichungen. Die Resultate der meisten dieser Untersuchungen erklären interessante Spezialfälle, welche in ihrer Gesamtheit kaum zu verallgemeinern sind und somit nur bedingt praktischen Nutzen aufweisen. Einigen Autoren gelingt mit ihren Ansätzen eine teilweise Analyse [1].

Der vorliegende Aufsatz klärt die physikalischen Ursachen der Maldistribution auf und liefert damit wichtige Hinweise für die Auslegung von Plattenwärmeübertragern. Hierbei kommen innovative ingenieur-mathematische Modelle zur Anwendung, für deren Lösung ein Bürocomputer mit Standardsoftware (z.B. Excel oder Scientific WorkPlace) völlig ausreicht. Die erforderlichen mathematisch-rechentechnischen Fertigkeiten entsprechen dem gegenwärtigen Niveau der Ingenieurausbildung.

2 Physikalisch-technische Grundlagen

Ein Plattenwärmeübertrager transmittiert thermische Energie von einem Medium mit höherer Temperatur über feste Wände, den sogenannten Platten, zu einem Medium mit geringerer Temperatur. Die **Abbildung 1** zeigt die äußere Struktur eines Plattenapparates, bestehend aus zwei Abschlussplatten und mehreren Wärmedurchgangsplatten. Nach außen und teilweise untereinander sind die Platten in besonderer Weise mit geeigneten Materialien abgedichtet. Die Spalten zwischen den Platten sind Strompassagen für die Prozessmedien. In den Passagen fließt abwechselnd ein wärmeabgebender und ein wärmeaufnehmender Teilstrom der Prozessmedien.

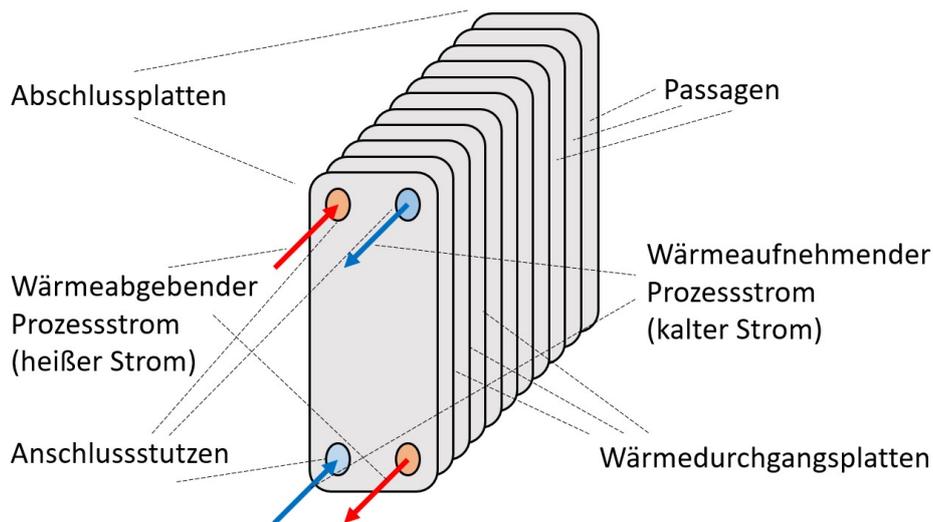


Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines Plattenwärmeübertragers

Die konkrete interne Führung der Prozessströme des Apparates wird durch die Spezifik des Abdichtungssystems zwischen den Übertragungsplatten sowie den Abschlussplatten realisiert. Die **Abbildung 2** zeigt die Stromführung der Passagen zwischen den Wärmeübertragungsplatten. Abwechselnd wird der wärmeabgebende (heiße) bzw. wärmeaufnehmende (kalte) Prozessstrom durch die Passage oder an der Passage vorbei geleitet.

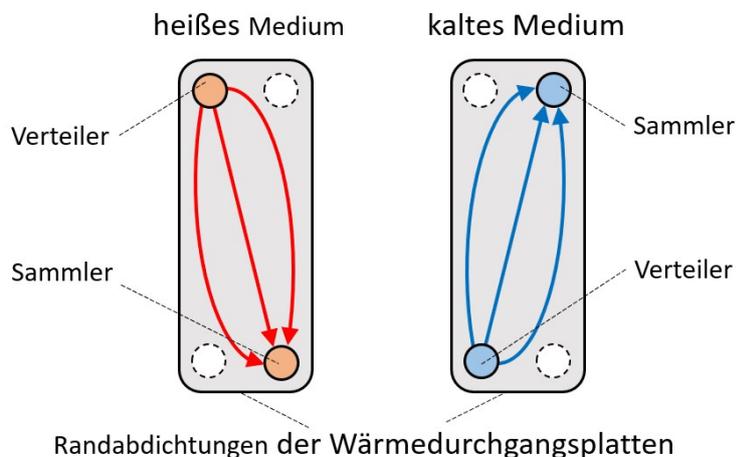


Abbildung 2: Prinzip der Stromführung zwischen den Wärmeübertragungsplatten

In **Abbildung 3** ist das hydraulisch-thermische Gesamtschema eines Plattenwärmeübertragers dargestellt. Das Schema zeigt einen Apparat mit $l = 9$ Wärmedurchgangsplatten sowie jeweils $p = 5$ Passagen für den wärmeabgebenden und den wärmeaufnehmenden Prozessstrom.

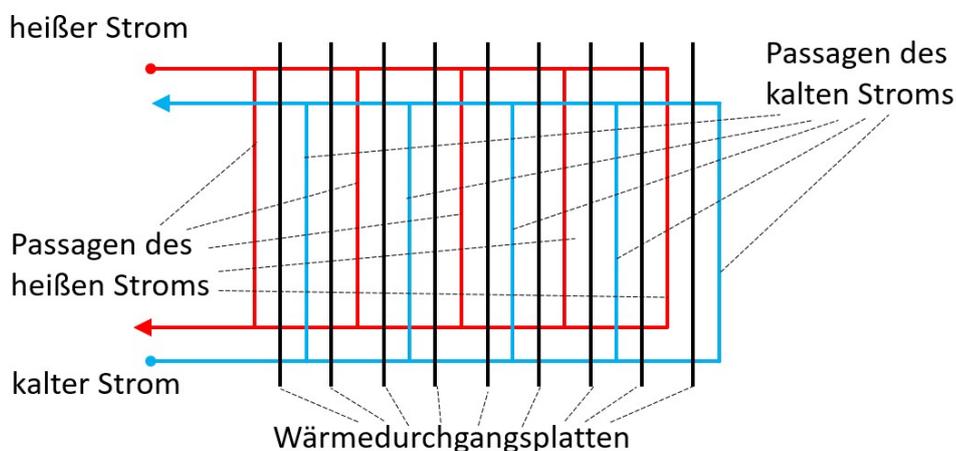


Abbildung 3: Durchflussschema eines Plattenwärmeübertragers

Bei Wärmeübertragern sind Druckverlust, Wärmeübergang und Übertragungsleistung über die jeweilige Strömungsform eng miteinander verknüpft. Dies trifft in besonderer Weise auf Plattenwärmeübertrager zu. Aufgrund der parallel durchströmten Passagen existieren keine zwangsgeführten Strömungswege. Deshalb üben die Druckprofile der Strömung infolge Wandreibung und die Stromteilungen bei Abzweigungen einen gegenseitigen Einfluss aus. Diese Wechselwirkung führt unter bestimmten Umständen zu unerwünschten Folgen.

3 Physikalisch adäquate Berechnung von Plattenwärmeübertragern

Das vordergründige physikalische Prinzip von Wärmeübertragern besteht in der Kombination von hydraulischen und thermischen Phänomenen. Mechanische und werkstoffchemische Gesichtspunkte sind in diesem Kontext nachrangig und bleiben unberücksichtigt.

Der traditionellen Berechnung von Plattenwärmeübertragern liegt die Modellvorstellung eines idealen Gegenstromwärmeübertragers mit gleichmäßig in den Passagen aufgeteilten Medienströmen zugrunde. Abgesehen von ein paar empirischen Korrekturfaktoren erfolgt die Berechnung von Plattenwärmeübertragern ohne weitere Annahmen. Bereits am Schema in **Abbildung 3** sind die Unzulänglichkeiten dieser Modellvorstellung erkennbar. Die äußeren Passagen des Apparates werden nur einseitig geheizt bzw. gekühlt. Deshalb weisen sämtliche Passagen unterschiedliche Austrittstemperaturen auf. Desweiteren sind die Strömungswege der Prozessmedien unterschiedlich, wodurch die Druckdifferenzen der Passagen und damit deren Durchsätze ebenfalls unterschiedlich sind. Diese von den Idealisierungen abweichenden thermischen und hydraulischen Besonderheiten sind Ursachen der Maldistribution. Somit klammert die traditionelle Form der Berechnung von Plattenwärmeübertragern das Phänomen der Maldistribution a priori aus, weshalb derartige Modellvorstellungen zur Analyse der Maldistribution völlig ungeeignet sind.

Die adäquate mathematische Beschreibung der technischen Eigenschaften eines Plattenwärmeübertragers erfordert zwei von einander unabhängige Modelle, ein hydraulisches und ein thermisches Modell. Das hydraulische Modell bildet die ungleiche Verteilung der Medienströme in den Passagen ab. Das thermische Modell beschreibt den Wärmedurchgang zwischen ungleich durchströmten Passagen. Es ist möglich, jeden Plattenwärmeübertrager als hydraulisches sowie als thermisches Netzwerk aufzufassen. Zur Modellierung von Netzwerken steht mit der Allgemeinen Netztheorie ein universelles mathematisches Werkzeug zu Verfügung [2]. Nach dieser Theorie sind sämtliche technischen Netze mit drei Prinzipien beschreibbar. Der Allgemeine Knotensatz, der Allgemeine Maschensatz und das Allgemeine Widerstandsgesetz gewährleisten für jedes Netz mit beliebiger Anzahl von Knoten, Leitungen und Maschen stets eine eindeutige Lösung.

4 Modelle der hydraulischen Eigenschaften

Ein Modell der hydraulischen Eigenschaften eines Plattenwärmeübertragers beschreibt die innere Verteilung der Medienströme. Hierfür existieren zwei grundsätzlich unterschiedliche Modellansätze. Zum einen ist ein Plattenwärmeübertrager als Netzwerk mit Knoten und Leitungen, analog zu einem Rohrleitungsnetz auffassbar. Diese Berechnung ist für beliebige Netzstrukturen möglich und führt mit wenigen Iterationen immer zu einer eindeutigen Lösung. Für Netze mit laminaren Strömungsverhältnissen d.h. konstanten Leitungswiderständen entfallen die Iterationen. Zum anderen ist ein Plattenwärmeübertrager über Differenzialgleichungen mit stetig veränderlichen Drücken und Masseströmen beschreibbar. Hierbei werden analytische Lösungen erhalten, welche allgemeine Aussagen gestatten und für Apparate mit hoher Anzahl von Passagen hinreichend genau sind [3].

4.1 Hydraulisches Netzmodell

Ein Plattenwärmeübertrager besteht in abstrahierter Form aus zwei von einander unabhängigen hydraulischen Netzwerken, eins für den wärmeabgebenden und eins für den wärmeaufnehmenden Prozessstrom. Die **Abbildung 4** zeigt die hydraulischen Strukturen des wärmeabgebenden und des wärmeaufnehmenden Stroms eines Plattenwärmeübertragers mit jeweils $p = 4$ Passagen und genau $m = 3$ Maschen ($m = p - 1$). Zwischen den $k = 8$ Knoten ($k = 2p$) existieren $l = 10$ Leitungen ($l = 3p - 2$). Die Strukturen beider Schemen sind im vorliegenden Fall identisch (dies ist i.a. nicht notwendig). Nur die Strömungsrichtung der Medien ist unterschiedlich. Die waagerechten Leitungen zwischen den Knoten K_1 bis K_4 bilden den Verteiler für das heiße Medium bzw. den Sammler für das kalte Medium. Analog bilden die waagerechten Leitungen zwischen den Knoten K_5 bis K_{10} den Sammler für das heiße Medium bzw. den Verteiler des kalten Mediums. Die Passagen werden durch

die senkrechten Leitungen dargestellt.

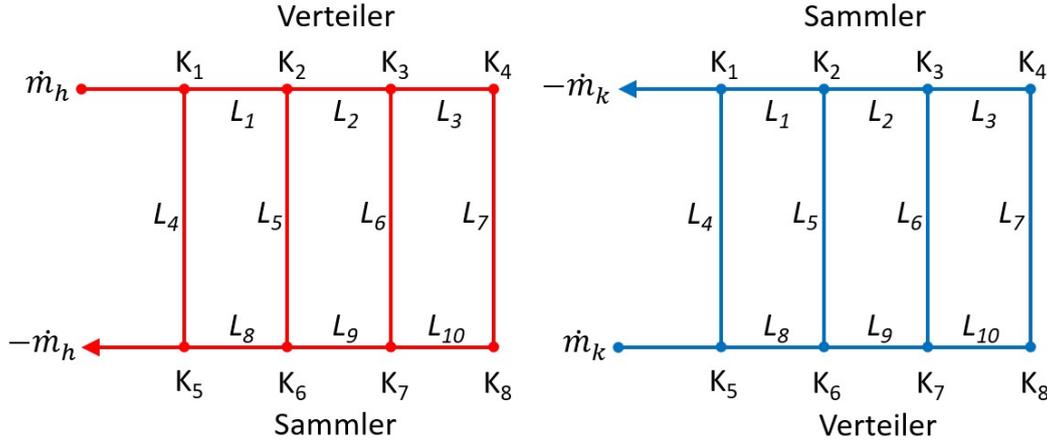


Abbildung 4: Hydraulische Schemen des heißen und des kalten Prozessstroms

Die charakteristischen physikalischen Eigenschaften der Knoten K_i und der Leitungen L_j sind die Drücke p_i , die Masseströme \dot{m}_j und die Strömungswiderstände R_j . Das mathematische Modell für die Kopplungen der Knoten (K_1, K_2, \dots, K_8) mit den Leitungen (L_1, L_2, \dots, L_{10}) besteht im Wesen der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$. Das Format der Kopplungsmatrix beträgt für k Knoten und l Leitungen genau $k \times l$. Mit $k = 8$ und $l = 10$ gilt für das hydraulische Schema des heißen Medium und völlig analog für das kalte Medium

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Jede Zeile der Kopplungsmatrix repräsentiert einen Knoten, indem die Zeilenzahl mit der Ordinalzahl des Knotens übereinstimmt. Analog repräsentiert jede Spalte eine Leitung, indem die Spaltenzahl der Ordinalzahl der Leitung entspricht. In jeder Spalte definieren die beiden von Null verschiedenen Elemente „-1“ und „+1“ die Anschlussknoten der jeweiligen Leitung. D.h. der j -te Massestrom strömt durch Leitung j vom Knoten der Zeile mit „-1“ zum Knoten der Zeile mit „+1“. Eine Richtungsumkehr des Massestroms ändert sein Vorzeichen.

Die transponierte Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T$ gestattet die Formulierung des Allgemeinen Maschensatzes, indem sie den Zusammenhang zwischen dem Vektor der Druckdifferenzen $\underline{\Delta \mathbf{p}}$ in den Leitungen und dem Vektor der Knotendrucke $\underline{\mathbf{p}}$ abbildet. Die Maschen von Netzen sind nach Anwendung des GAUSS-JORDAN-Verfahrens „sichtbar“ [4]. Im vorliegenden

Kontext ist dies jedoch ohne Belang. Es gilt

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix}
 -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 p_1 \\
 p_2 \\
 p_3 \\
 p_4 \\
 p_5 \\
 p_6 \\
 p_7 \\
 p_8
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \Delta p_1 \\
 \Delta p_2 \\
 \Delta p_3 \\
 \Delta p_4 \\
 \Delta p_5 \\
 \Delta p_6 \\
 \Delta p_7 \\
 \Delta p_8 \\
 \Delta p_9 \\
 \Delta p_{10}
 \end{bmatrix}
 \quad (2)
 \\
 \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T
 \quad \quad \quad
 \underline{\mathbf{p}}
 \quad = \quad
 \underline{\underline{\Delta \mathbf{p}}}
 \end{array}$$

Zur Ermittlung der Strömungswiderstände R_i in den Strömungskanälen stehen die Beziehungen für den Druckverlust Δp_i als Funktion der Strömungsgeschwindigkeit w_i bzw. des Massestroms \dot{m}_i zur Verfügung

$$\Delta p_i = -\lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} |w_i| w_i = -\lambda \frac{l}{d} \frac{|\dot{m}_i|}{2F^2 \rho} \dot{m}_i = -R_i \dot{m}_i \quad (3)$$

Die Verwendung des Termes $|w|w$ statt w^2 bzw. $|\dot{m}|\dot{m}$ statt \dot{m}^2 ist sehr wichtig, um eine Richtungsumkehr der Strömung durch Vorzeichenwechsel von Massestrom und Druckgefälle korrekt abzubilden. Somit gilt bei turbulenter Strömung ein massestromabhängiger Widerstand der Form

$$R_{turb} = \lambda \frac{l}{d_{hyd}} \frac{|\dot{m}|}{2F^2 \rho} \quad \text{bzw.} \quad R_{turb} = \zeta \frac{|\dot{m}|}{2F^2 \rho} \quad (4)$$

Bei laminarer Strömung ist der Strömungswiderstand vom Massestrom unabhängig. Mit $C = 24$ für einen Spalt und $C = 64$ für ein Rohr gilt für den laminaren Strömungsbeiwert λ_{lam} und daraus folgend für den Strömungswiderstand R_{lam}

$$\lambda_{lam} = \frac{C}{\text{Re}} = \frac{C}{\frac{w d_{hyd} \rho}{\eta}} \quad \text{und} \quad R_{lam} = \frac{C}{2} \frac{l \eta}{d_{hyd}^2} \quad (5)$$

Die Widerstände der Leitungen (**Abbildung 4**) von Verteiler (R_1, R_2, R_3), Passagen (R_4, R_5, R_6, R_7) und Sammler (R_8, R_9, R_{10}) fließen in das Allgemeine Widerstandsgesetz ein, welches den Zusammenhang zwischen dem Vektor der Druckverluste $\underline{\underline{\Delta \mathbf{p}}}$ und dem Vektor der Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}$ mit den Leitungswiderständen R_i herstellt. Die Leitungswiderstände

R_i bilden die Elemente der Widerstandsmatrix $\underline{\mathbf{R}}$, einer Diagonalmatrix.

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{10} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \\ \Delta p_4 \\ \Delta p_5 \\ \Delta p_6 \\ \Delta p_7 \\ \Delta p_8 \\ \Delta p_9 \\ \Delta p_{10} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix} \quad (6) \\
 \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\Delta \mathbf{p}} &= \underline{\dot{\mathbf{m}}}
 \end{aligned}$$

Der Allgemeine Knotensatz sieht die Bilanz der Masseströme für jeden Knoten vor. Die Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ ermöglicht diese Bilanzierungen, indem sie den Zusammenhang zwischen den Vektoren der inneren Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}$ und der äußeren Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io}$ herstellt. Die Vorzeichen der äußeren Prozessströme „ \pm “ bzw. „ \mp “ definieren einen Strom als eintretend (+) bzw. austretend (-). Hierbei ist die unterschiedliche Strömungsrichtung des heißen und kalten Stromes bei Eintritt in den Apparat zu beachten.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \pm \dot{m}^i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mp \dot{m}^o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7) \\
 \underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{m}}} &= -\underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io}
 \end{aligned}$$

Der Allgemeine Maschensatz (2), das Allgemeine Widerstandsgesetz (6) und der Allgemeine Knotensatz (7) werden in dieser Reihenfolge ineinander eingesetzt. Damit folgt

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io} = -\underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{m}}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\Delta \mathbf{p}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{p}} \quad (8)$$

Durch Umstellung wird eine geschlossene Beziehung für das Druckprofil inform des Druckvektors $\underline{\mathbf{p}}$ als Funktion der äußeren Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io}$ erhalten.

$$\underline{\mathbf{p}} = (\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T)^{-1} \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io} \quad (9)$$

Für die inneren Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}$ als Funktion der äußeren Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io}$ gilt nachdem in Gleichung (6) die Gleichungen (2) und (9) einfließen

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}} = -\underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T (\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T)^{-1} \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io} \quad (10)$$

Die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T$ des Gleichungssystems (8) ist zunächst singular! Die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ weist für s im Netz involvierte Teilsysteme den Rang $r = k - s$ auf. Dies ist auf implizit wirkende Gesamtbilanzen möglicher Teilsysteme zurückzuführen. Im vorliegenden Fall liegt ein homogenes Netz ($s = 1$) und somit $k - 1$ linear unabhängige Gleichungen vor. Es ist günstig die Zeile des Knotens, an welchem der Prozessstrom den Apparat verlässt, aus der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ zu eliminieren und damit den Austrittsdruck des Prozessstromes formal $p^o = 0$ zu setzen. Da der tatsächlich vorliegende Druck am Ausgang $p^o = p_{um}$ beispielsweise als Umgebungsdruck bekannt ist, sind sämtliche Werte des Druckvektors um den Betrag des Umgebungsdruckes zu erhöhen. Die Druckdifferenzen zwischen den Anschlüssen der Leitungen bleiben hiervon unberührt.

Das Gleichungssystem ist im Fall, dass sämtliche Leitungen laminare Strömung aufweisen und somit konstante Strömungswiderstände vorliegen, ohne Iteration in geschlossener Form lösbar. Anderenfalls sind Iterationen erforderlich. Die Anwendung des NEWTON-Verfahrens erweist sich als sehr zielführend. Für die erforderlichen Ableitungen der JACOBI-Matrix gilt

$$\frac{d\Delta p}{d\dot{m}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{|\dot{m}|}{F^2 \rho} = 2R_{turb} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\Delta p}{d\dot{m}} = \zeta \frac{|\dot{m}|}{F^2 \rho} = 2R_{turb} \quad (11)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems stehen mehrere aufeinander aufbauende Lösungswege zur Verfügung [5]. Die Lösungsalgorithmen unterscheiden sich in der Zahl der zu lösenden Gleichungen, der Zahl notwendiger Iterationen und damit in der Rechenzeit auf dem Computer. Allerdings bedingt geringerer zeitlicher Rechenaufwand höhere Komplexität des Modells.

Die Strömungswiderstände sind massestromabhängig, weshalb Startwerte für die Masseströme erforderlich sind. Unter der vorläufigen Annahme gleicher Strömungswiderstände zwischen den Knoten gilt für die Startwerte von Masseströmen, Strömungswiderständen und Drücken

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}}_0 = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{io} \quad \underline{\underline{\mathbf{R}}}_0 = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_0 (\underline{\underline{\mathbf{m}}}_0) \quad \underline{\underline{\mathbf{p}}}_0 = (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_0^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{io} \quad (12)$$

Im Fall der einfachsten Lösungsstrategie werden die Gleichungen (2), (6) und (7) zu einem Gesamtgleichungssystem zusammengefasst und simultan gelöst. Aus der Widerstandsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ und ihrer Transponierten $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T$ entsteht die Modellmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$. Die Vektoren von Masseströmen $\underline{\underline{\mathbf{m}}}$ und Drücken $\underline{\underline{\mathbf{p}}}$ bilden den Zustandsvektor $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}$. Die äußeren Masseströme $\underline{\underline{\mathbf{m}}}^{io}$ füllen den oberen Teil des Eingangsvektors $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ in der nachfolgend gezeigten Weise

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{F}}}_m \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}_p \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{R}}}_n & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{p}}} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{io} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_n \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{X}}} \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Es ist davon auszugehen, dass die Resultate des Gleichungssystems $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_0$ aus den Zustandsvektoren $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_0$ anfänglich von Null verschieden sind und daher die Zustandsgrößen $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n$ eine entsprechende Anpassung erfordern. Mit der JACOBI-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_n$ erfolgt die Ermittlung der

„neuen“ Werte des Zustandsvektors $\underline{\mathbf{Z}}_{n+1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\dot{\mathbf{m}}} \\ \underline{\mathbf{p}} \end{bmatrix}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \underline{\dot{\mathbf{m}}} \\ \underline{\mathbf{p}} \end{bmatrix}_n - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \underline{\mathbf{0}} \\ 2\underline{\mathbf{R}}_n & \underline{\mathbf{K}}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_m \\ \underline{\mathbf{F}}_p \end{bmatrix}_n \\ \underline{\mathbf{Z}}_{n+1} &= \underline{\mathbf{Z}}_n - \underline{\mathbf{J}}_n^{-1} \underline{\mathbf{F}}_n \end{aligned} \quad (14)$$

Mit den jeweils „neuen“ Masseströmen $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{n+1}$ sind die „neuen“ Strömungswiderstände $\underline{\mathbf{R}}_{n+1}$ mit den Gleichungen (12), (13) und (14) zu berechnen. Vorteil dieser Vorgehensweise ist das äußerst einfache Generieren der Modellmatrix $\underline{\mathbf{M}}_n$ und damit auch der JACOBI-Matrix $\underline{\mathbf{J}}_n$. Nachteilig sind 5 bis 6 Iterationen mit $5p - 3$ Gleichungen für p Passagen.

Eine effektivere Lösungsstrategie entsteht durch Einsetzen von Gleichung (14) in die Gleichung (13). Nach einigen Umformungen wird die interessante Zusammenfassung (15) erhalten, nach welcher sich die iterative Lösung nur auf die Masseströme erstreckt. Nach Berechnung der Startwerte für Masseströme und Strömungswiderstände gilt für die Ermittlung der endgültigen Masseströme folgende rekursive Iterationsvorschrift

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{\mathbf{m}}}_n - \underline{\mathbf{R}}_n^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \left(\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}}_n^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \right)^{-1} \left(\underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_n + 2\underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io} \right) \right) \quad (15)$$

Mit den zuletzt ermittelten Masseströmen $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{n+1}$ werden die Widerstände $\underline{\mathbf{R}}_{n+1}$ und anschließend die Knotendrücke $\underline{\mathbf{p}}$ ohne Iteration bestimmt

$$\underline{\mathbf{p}} = \left(\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}}_{n+1}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \right)^{-1} \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io} \quad (16)$$

Das Iterationsschema nach Gleichung (15) erfordert ebenfalls 5 bis 6 Iterationen, allerdings sind für p Passagen nur $2p - 1$ Gleichungen iterativ zu lösen.

Die Lösungsstrategie erfährt durch Berücksichtigung von Ableitungstermen der Form $d\lambda/d\text{Re}$ in Gleichung (14) und der gezeigten Umformung eine zusätzliche Verbesserung. Dies erspart bei der Lösung von Gleichung (15) ein bis zwei Iterationen.

Eine weitere äußerst effektivitätssteigernde Modifikation des Netzmodells basiert auf der sogenannten AU-Zerlegung, bei welcher die Kopplungsmatrix in Teilmatrizen der abhängigen und der unabhängigen Kopplungen zerfällt. Dies ermöglicht die Reduktion des Modells auf $p - 1$ iterativ zu lösende Gleichungen. Diese Zahl entspricht der Maschenzahl m . Dies ist für vermaschte Netze mit $k > 2000$ Knoten von wesentlicher Bedeutung und trifft nicht für Plattenwärmeübertrager zu. Daher wird auf die nähere Darstellung dieses Algorithmus im vorliegenden Kontext verzichtet.

4.2 Analytisches Hydraulikmodell

Es ist möglich bei laminarer Strömung Plattenwärmeübertrager mit einer Passagenzahl von $p > 20$ näherungsweise mit analytischen Lösungen zu berechnen. Hierzu sind i.a. vier gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen erforderlich. Zur Formulierung des beschreibenden Differenzialgleichungssystems ist es zweckmäßig, den hydraulischen Gesamtwiderstand des Verteilers R_v sowie des Sammlers R_s und den hydraulischen Gesamtwiderstand R_p der

Passagen zu verwenden. In einem Plattenapparat gemäß **Abbildung 4** mit p Passagen wirken $p - 1$ in Reihe geschaltete Strömungswiderstände zwischen den Ab- bzw. Zuflüssen der Passagen. Somit gilt für den gesamten Strömungswiderstand des Verteilers R_v sowie des Sammlers R_s durch Verwendung von Gleichung (5) die nachfolgende Beziehung

$$R_v = R_s = (p - 1) R_{lam} = (p - 1) \frac{C}{2} \frac{l\eta}{d_{hyd}^2} \quad (17)$$

Bei den p Passagen handelt es sich um parallelgeschaltete Strömungswiderstände. Somit summieren sich die einzelnen reziproken Widerstände der Passagen zum gesamten reziproken Strömungswiderstand R_p

$$R_p^{-1} = \frac{1}{R_p} = \frac{p}{R_{lam}} = p \frac{2}{C} \frac{d_{hyd}^2}{l\eta} \quad (18)$$

Die **Abbildung 5** zeigt einen Plattenwärmeübertrager mit differenziellen Passagen deren Anzahl gegen unendlich strebt. Die Gesamtwiderstände des Apparates für Verteiler, Sammler und Passagen folgen aus den Gleichungen (17) und (18)

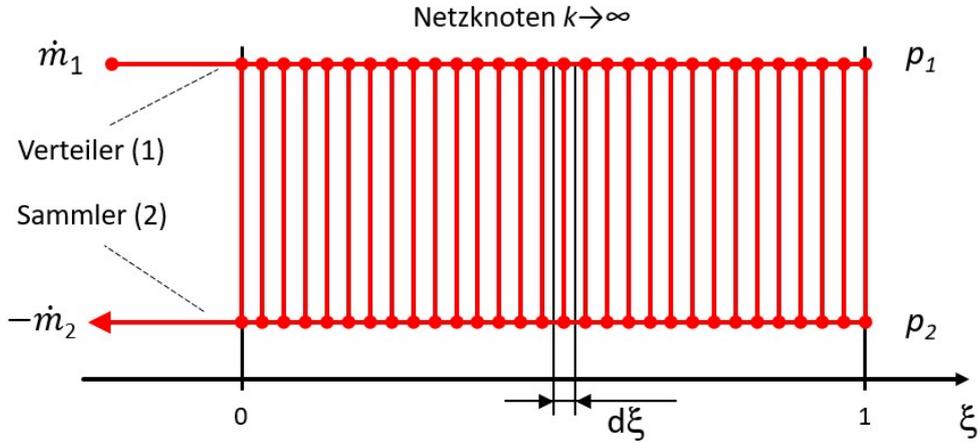


Abbildung 5: Apparatemodell mit differenziellen Passagen

Analog zur Herleitung von Gleichung (8) mit Maschensatz, Widerstandsgesetz und Knotensatz folgt für einen differenziellen Knoten der Ansatz (19). Diese Gleichung beschreibt mit dem von Verteiler zu Sammler überströmenden differenziellen Massestrom, die Änderung der Masseströme in Verteiler und Sammler

$$d \begin{bmatrix} \dot{m}_v \\ \dot{m}_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [R_p^{-1}] d\xi \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_v \\ p_s \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$d \underline{\dot{\mathbf{m}}} = - \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{R}}_p^{-1} d\xi \cdot \underline{\mathbf{K}}^T \quad \underline{\mathbf{p}}$$

Aus dem Widerstandsgesetz resultieren die Druckabfälle in Verteiler und Sammler infolge der Durchströmung

$$d \begin{bmatrix} p_v \\ p_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_v & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{m}_v \\ \dot{m}_s \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$d \underline{\mathbf{p}} = - \underline{\mathbf{R}} d\xi \quad \underline{\dot{\mathbf{m}}}$$

Die Gleichungen (19) und (20) bilden ein Differenzialgleichungssystem (21) zur Beschreibung der Hydraulik eines Plattenwärmeübertragers. Dieses System formuliert den örtlichen Verlauf von Drücken und Masseströmen im Verteiler sowie im Sammler. Die beiden oberen Gleichungen beschreiben das Druckprofil im Verteiler und Sammler, die beiden unteren Gleichungen formulieren über den abfließenden Massenstrom die Stromverteilung im Verteiler und im Sammler.

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} p_v \\ p_s \\ \dot{m}_v \\ \dot{m}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_s \\ -R_p^{-1} & R_p^{-1} & 0 & 0 \\ R_p^{-1} & -R_p^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_v \\ p_s \\ \dot{m}_v \\ \dot{m}_s \end{bmatrix} \quad (21)$$

Das Differenzialgleichungssystem ist über die Eigenwerte seiner Koeffizientenmatrix oder besser über TAYLOR-Reihenentwicklung lösbar. Mit den erhaltenen Lösungen sind Drücke und Masseströme als Funktion des Ortes darstellbar. Nach geeigneter Umstellung werden die nachfolgenden Beziehungen erhalten.

- Die Beziehung von Gesamtdruckverlust und Massestrom

$$\begin{aligned} \dot{m}_v^{(0)} &= -\dot{m}_s^{(0)} = \frac{p_1^{(0)} - p_2^{(0)}}{\sqrt{(R_v + R_s) R_p}} \tanh \sqrt{\frac{R_v + R_s}{R_p}} \\ \dot{m}_v^{(1)} &= \dot{m}_s^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

- Für die Drücke am Ende von Verteiler und Sammler d.h. bei $\xi = 1$ gilt

$$\begin{aligned} p_v^{(1)} &= \frac{1}{2} (p_v^{(0)} + p_s^{(0)}) - \frac{p_v^{(0)} - p_s^{(0)}}{2 \cosh \sqrt{\frac{R_v + R_s}{R_p}}} \\ p_s^{(1)} &= \frac{1}{2} (p_v^{(0)} + p_s^{(0)}) + \frac{p_v^{(0)} - p_s^{(0)}}{2 \cosh \sqrt{\frac{R_v + R_s}{R_p}}} \end{aligned} \quad (22)$$

- Das Druckprofil sowie die Massestromverteilung im Verteiler als Funktion der dimensionslosen Ortskoordinate ζ

$$\begin{aligned} p_v^{(\xi)} &= \frac{1}{2} (1 + c_\xi) p_v^{(0)} - \frac{1}{2} s_\xi \sqrt{(R_v + R_s) R_p} \dot{m}_v^{(0)} + \frac{1}{2} (1 - c_\xi) p_s^{(0)} \\ \dot{m}_v^{(\xi)} &= c_\xi \dot{m}_v^{(0)} - s_\xi \frac{p_v^{(0)} - p_s^{(0)}}{\sqrt{(R_v + R_s) R_p}} \end{aligned} \quad (23)$$

- Das Druckprofil sowie die Massestromverteilung im Verteiler als Funktion der dimensionslosen Ortskoordinate ξ

$$\begin{aligned}
 p_s^{(\xi)} &= \frac{1}{2} (1 - c_\xi) p_v^{(0)} + \frac{1}{2} s_\xi \sqrt{(R_v + R_s) R_p} \dot{m}_v^{(0)} + \frac{1}{2} (1 + c_\xi) p_s^{(0)} \\
 \dot{m}_s^{(\xi)} &= s_\xi \frac{p_v^{(0)} - p_s^{(0)}}{\sqrt{(R_v + R_s) R_p}} - c_\xi \dot{m}_v^{(0)}
 \end{aligned} \tag{24}$$

- Für die verwendeten Konstanten c_ξ und s_ξ gilt

$$c_\xi = \cosh \sqrt{\frac{R_v + R_s}{R_p}} \xi \quad s_\xi = \sinh \sqrt{\frac{R_v + R_s}{R_p}} \xi \tag{25}$$

Die angegebenen Beziehungen ermöglichen eine gute näherungsweise Berechnung der Druck- und Massestromprofile von Plattenwärmeübertragern mit mehr als $p = 20$ Passagen per Taschenrechner.

Für andere Typen von Plattenwärmeübertragern z.B. mit unterschiedlichen Seiten von Ein- und Ausgang sind ebenfalls analytische Lösungen generierbar.

4.3 Beispiel: Hydraulische Eigenschaften

Das Phänomen der Maldistribution tritt am deutlichsten bei Plattenwärmeübertragern mit vielen Passagen auf. Die Modellgröße für Plattenapparate steigt mit zunehmender Plattenzahl. Dies stellt zwar für die Berechnung auf einem Computer kein Problem dar, liegt aber außerhalb der Anschaulichkeit von Beispielen. Deshalb ist das verwendete Beispiel nicht sehr realitätsnah angelegt, sondern verdeutlicht lediglich das Prinzip der Berechnung.

Das Beispiel gemäß **Abbildung 6** zeigt das hydraulische Schema der Durchflutung des heißen Prozessstroms durch einen Plattenwärmeübertrager.

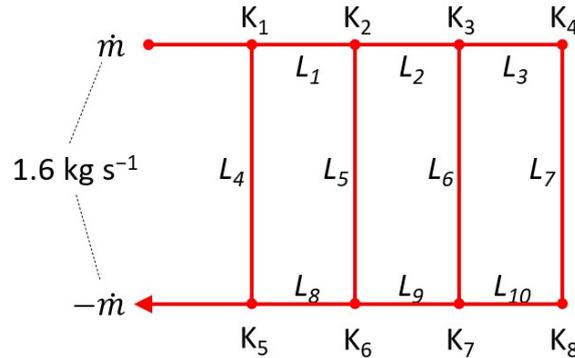


Abbildung 6: Hydraulisches Schema eines Plattenwärmeübertragers

Die Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ nach Gleichung (1) beschreibt die Verschaltung der $k = 8$ Knoten mit $l = 10$ Leitungen. Der Rang dieser Matrix beträgt $r = 7$ d.h. eine Zeile ist aufgrund der Gesamtbilanz linear abhängig. Wie bereits vorstehend beschrieben, ist es günstig die Zeile des Austrittsknoten (Zeile 5) zu eliminieren, wodurch der Druck dieses Knotens formal

Null gesetzt ($p_5 = 0$) wird. Analog entfällt das fünfte Element des Vektors der äußeren Massenströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}^{io}$. Für die reduzierte Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_r$ und den reduzierten Vektor der äußeren Massenströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_r^{io}$ gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\dot{\mathbf{m}}}_r^{io} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{kg}{s} \quad (26)$$

Im Verteiler, im Sammlers sowie in den Passagen herrschen im Beispiel laminare Strömungsverhältnisse. Die Strömungswiderstände von Verteiler, Sammler und Passagen werden als gleich angenommen und betragen jeweils $R = 0.12 \text{ bar } s \text{ kg}^{-1}$. Die Strömungswiderstände der Leitungen des Verteilers (L_1, L_2, L_3) sowie des Sammlers (L_8, L_9, L_{10}) bestehen gemäß Abbildung 6 aus drei in Reihe geschalteten Einzelwiderständen $R_{vs} = 0.04 \text{ bar } s \text{ kg}^{-1}$. Dagegen stellen die Passagen (L_4, L_5, L_6, L_7) vier parallelgeschaltete Einzelwiderstände von je $R_p = 0.48 \text{ bar } s \text{ kg}^{-1}$ dar. Für die Widerstandsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} \frac{\text{bar } s}{kg} \quad (27)$$

Mit Gleichung (9) folgt für die Lösung für die reduzierten Knotendrucke

$$\begin{bmatrix} 0.18 & 0.15 & 0.14 & 0.13 & 0.03 & 0.04 & 0.05 \\ 0.15 & 0.16 & 0.15 & 0.14 & 0.03 & 0.04 & 0.05 \\ 0.14 & 0.15 & 0.17 & 0.16 & 0.03 & 0.05 & 0.06 \\ 0.13 & 0.14 & 0.16 & 0.19 & 0.03 & 0.05 & 0.06 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.05 & 0.05 & 0.04 & 0.07 & 0.07 \\ 0.05 & 0.05 & 0.06 & 0.06 & 0.04 & 0.07 & 0.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.282 \\ 0.241 \\ 0.218 \\ 0.207 \\ 0.041 \\ 0.064 \\ 0.075 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{matrix} \text{bar } s \text{ kg}^{-1} & & \text{kg } s^{-1} & & \text{bar} \\ (\underline{\underline{\mathbf{K}}}_r \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_r^T)^{-1} & & \underline{\dot{\mathbf{m}}}_r^{io} & = & \underline{\mathbf{p}}_r \end{matrix}$$

Der Ausgangsdruck eines Plattenwärmeübertragers ist i.a. bekannt und entspricht im vorliegenden Beispiel dem Umgebungsdruck $p_5 = p_{um} = 1.0 \text{ bar}$. Für die Drücke in den Knoten

gilt somit

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{um} \\ p_{um} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ p_{3r} \\ p_{4r} \\ 0 \\ p_{6r} \\ p_{7r} \\ p_{8r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.282 \\ 1.241 \\ 1.218 \\ 1.207 \\ 1.000 \\ 1.041 \\ 1.064 \\ 1.075 \end{bmatrix} \text{ bar} \quad (29)$$

$$\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{p}}_{um} + \underline{\mathbf{p}}_r$$

Aufgrund der Druckverluste im Verteiler sowie im Sammler sind deren Druckprofile nicht konstant. Somit weisen die Masseströme der Passagen, infolge der unterschiedlichen treibenden Druckdifferenzen zwischen Verteiler und Sammler, ungleiche Werte auf. Die unterschiedlichen Masseströme der Leitungen ergeben sich aus der Gleichung (10)

$$\begin{bmatrix} 0.63 & -0.31 & -0.28 & -0.27 & -0.05 & -0.08 & -0.10 \\ 0.37 & 0.40 & -0.53 & -0.50 & -0.03 & -0.10 & -0.13 \\ 0.17 & 0.19 & 0.22 & -0.73 & -0.01 & -0.05 & -0.10 \\ 0.37 & 0.31 & 0.28 & 0.27 & 0.05 & 0.08 & 0.10 \\ 0.26 & 0.28 & 0.25 & 0.23 & -0.02 & 0.01 & 0.03 \\ 0.20 & 0.22 & 0.25 & 0.23 & -0.02 & -0.05 & -0.03 \\ 0.17 & 0.19 & 0.22 & 0.27 & -0.01 & -0.05 & -0.10 \\ -0.63 & -0.69 & -0.72 & -0.73 & -0.95 & -0.92 & -0.90 \\ -0.37 & -0.40 & -0.47 & -0.50 & 0.03 & -0.90 & -0.87 \\ -0.17 & -0.19 & -0.22 & -0.27 & 0.01 & 0.05 & -0.90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.013 \\ 0.594 \\ 0.274 \\ 0.587 \\ 0.419 \\ 0.320 \\ 0.274 \\ -1.013 \\ -0.594 \\ -0.274 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{matrix} (-) \\ -\underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_r^T (\underline{\mathbf{K}}_r \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_r^T)^{-1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} kg \ s^{-1} \\ \underline{\dot{\mathbf{m}}}_r^{io} \end{matrix} = \begin{matrix} kg \ s^{-1} \\ \underline{\dot{\mathbf{m}}} \end{matrix}$$

Die **Abbildung 7** zeigt das per Netzmodell ermittelte Druckprofil (durchgezogene Linie) mit den Druckdifferenzen und Masseströmen zwischen Verteiler und Sammler. Das Beispiel zeigt deutlich, dass eine Gleichverteilung der Masseströme prinzipiell unmöglich ist. Die Ursache ist der Druckverlust im Verteiler und im Sammler. Infolge der Parallelschaltung sinkt mit steigender Anzahl der Passagen deren Gesamtströmungswiderstand. Dagegen nimmt der Strömungswiderstand von Verteiler und Sammler infolge des längeren Strömungsweges zu, wodurch große örtliche Unterschiede bei der Druckdifferenz zwischen Verteiler und Sammler auftreten. Dieser Effekt betrifft Plattenwärmeübertrager mit höherer Anzahl von Passagen zunehmend stärker. Daher ist die genaue Abstimmung der Strömungswiderstände von Verteiler, Sammler und Passagen sehr wichtig.

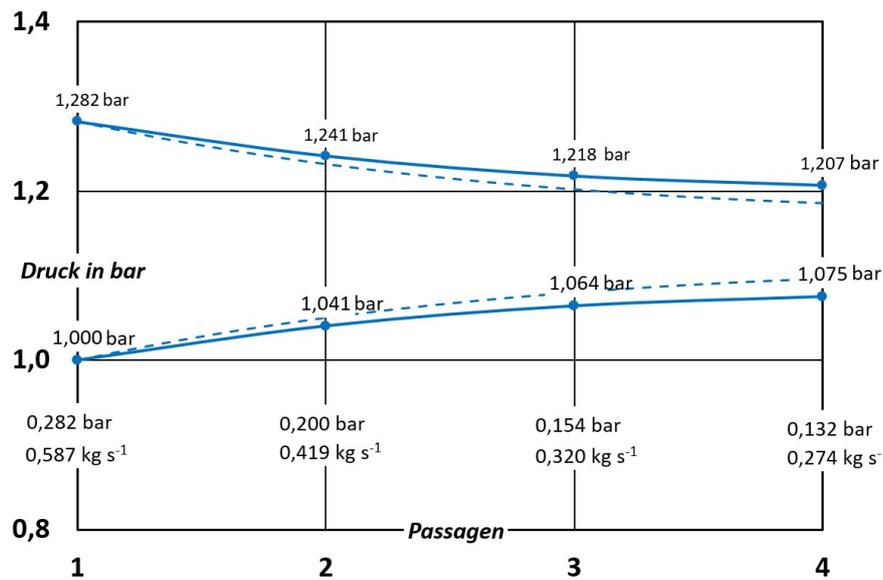


Abbildung 7: Druckprofil und Massestromverteilung eines Plattenwärmeübertragers

Das analytische Modell basiert auf der Annahme laminarer Strömungsverhältnisse und beschreibt die hydraulischen Eigenschaften eines Plattenwärmeübertragers mit vielen Passagen. Die mit den Gleichungen (23) und (24) ermittelten Druckprofile sind als gestrichelte Linien ebenfalls in **Abbildung 7** dargestellt. Das Intervall der Ortskoordinate $\zeta = 0 \dots 1$ ist auf den gesamten Abszissenbereich gedehnt. Bei steigender Passagenzahl rücken die Resultate beider Modelle näher zusammen.

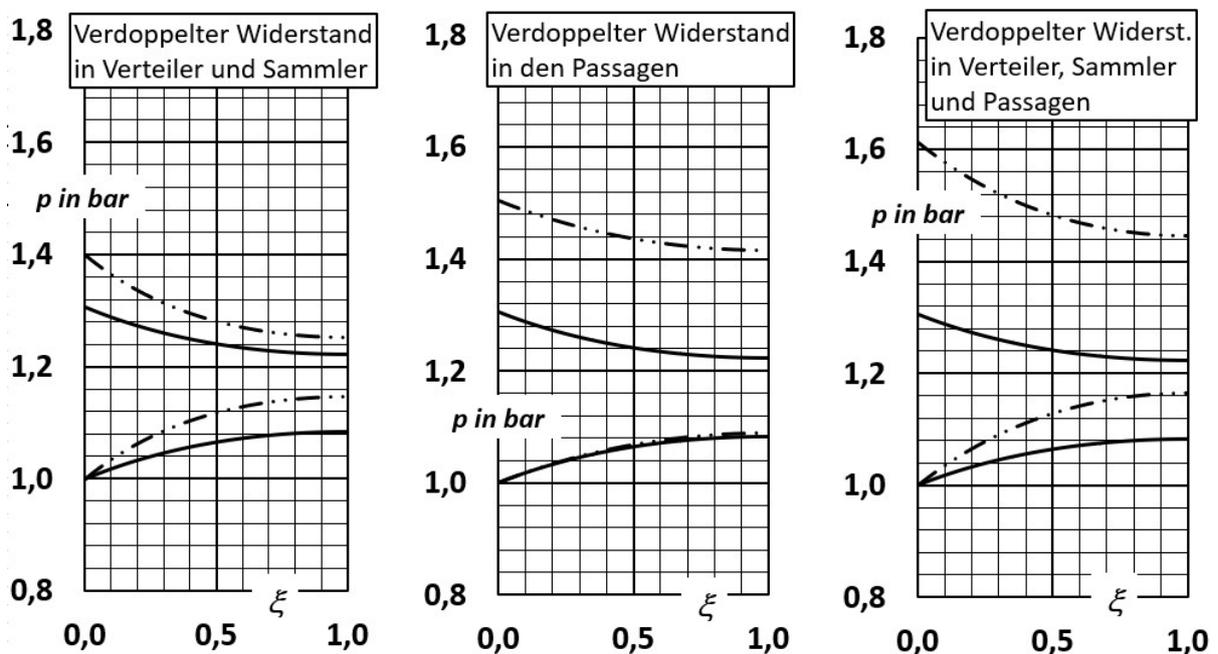


Abbildung 8: Wirkungen des Druckprofils bei Änderung der Widerstände

In der **Abbildung 8** sind die Resultate von Parameterstudien mit dem analytischen Hydraulikmodell dargestellt. Die durchgezogenen Linien stellen jeweils die Druckprofile der Ausgangsvariante dar. Die gestrichelten Linien sind die veränderten Druckprofile nach Verdopplung des hydraulischen Widerstandes von Verteiler und Sammler (links), nach Verdopplung des hydraulischen Widerstandes der Passagen (mitte) und nach Verdopplung sämtlicher hydraulischer Widerstände (rechts). Der Effekt der Maldistribution wird z.T. dramatisch verstärkt.

5 Modell der thermischen Eigenschaften

Das thermische Modell des Plattenwärmeübertragers ermöglicht die exakte Ermittlung des Temperaturprofils in den Passagen. Die Verteilung der Masseströme sowie deren Strömungsrichtung in den Passagen sind für das thermische Modell beliebig und können daher vom Hydraulikmodell übernommen werden.

Das thermische Modell ist ebenfalls ein Netzmodell. Im Gegensatz zum hydraulischen Modell, bei welchem die Verzweigungsstellen der Masseströme als Knoten und die Strömungswege als Leitungen aufgefasst werden, sind die Knoten und Leitungen des thermischen Modells die Passagen und die Übertragungsplatten. Während die hydraulischen Knoten einen örtlich konstanten Druck aufweisen, ist die Temperatur der thermischen Knoten eine Funktion des Ortes [6]. Dennoch weist das thermische Modell eine starke Analogie zum hydraulischen Modell auf.

5.1 Thermisches Netzmodell

Der Plattenwärmeübertrager gemäß **Abbildung 4** wird in ein thermisches Netz überführt, welches in **Abbildung 9** gezeigt wird. Die heißen und kalten Medien in den Passagen stellen in einem thermischen Netz die Knoten und die Wärmedurchgangsplatten die Leitungen dar.

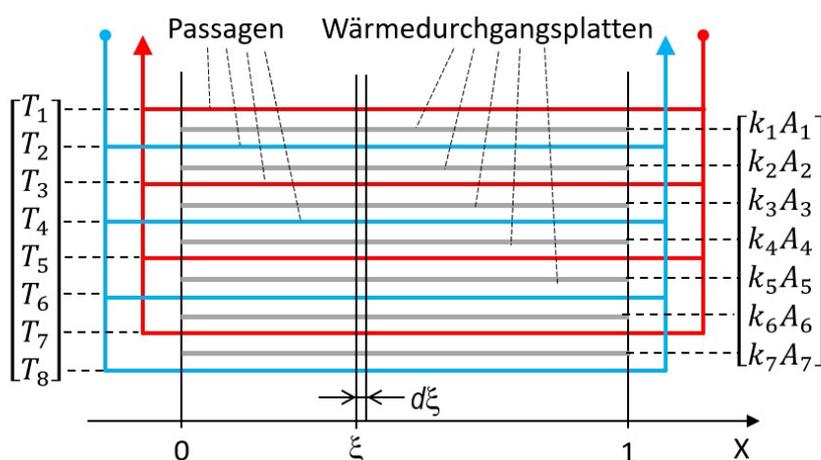


Abbildung 9: Thermisches Schema eines Plattenwärmeübertragers

Die charakteristischen physikalischen Eigenschaften der thermischen Knoten K_i und der thermischen Leitungen L_j sind die Temperaturen T_i , die konduktiven Wärmeströme \dot{Q}_j

und die thermischen Widerstände R_j der Wärmedurchgangsplatten. Im Gegensatz zu hydraulischen Knoten mit konstanten Drücken weisen die thermischen Knoten örtlich unterschiedliche Temperaturen auf. Daher ist die Betrachtung inkrementeller örtlicher Elemente $d\xi$ erforderlich.

Die **Abbildung 10** zeigt den inkrementellen Apparateabschnitt $d\xi$ mit $k = 8$ Knoten, welche $l = 7$ thermische Leitungen zu einem Netz bzw. System $s = 1$ verbinden.

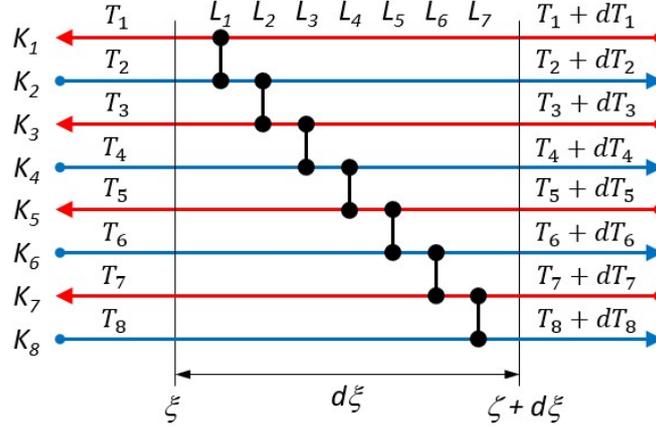


Abbildung 10: Kopplung der inkrementellen Abschnitte der Passagen

Das mathematische Modell für die Verknüpfung der thermischen Knoten (K_1, K_2, \dots, K_8) mit den Leitungen (L_1, L_2, \dots, L_{10}) stellt die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ dar, welche für k Knoten und l Leitungen das Format $k \times l$ aufweist. Für $k = 8$ und $l = 7$ gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Die Zeilen der Kopplungsmatrix stehen für die Knoten und die Spalten für die Leitungen. Wie bei den hydraulischen Netzen beschrieben, stimmen in analoger Weise die Zeilen- und Spaltennummern mit den Ordinalzahlen von Knoten und Leitungen überein.

Mit der transponierten Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T$ formuliert der Allgemeine Maschensatz den Zusammenhang zwischen dem Vektor der Knotentemperatur $\underline{\mathbf{T}}$ und den treibenden

Temperaturdifferenzen $\underline{\Delta T}$ zwischen den Passagen an der Stelle ζ

$$\begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \\ \Delta T_4 \\ \Delta T_5 \\ \Delta T_6 \\ \Delta T_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\underline{\Delta T} = \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{T}}$$

Für die differentiellen Wärmeströme $d\dot{Q}_i$ zwischen inkrementellen Elementen der Passagen aus Wärmewiderstand R_i und treibender Temperaturdifferenz ΔT_i folgt

$$d\dot{Q}_i = -d(R^{-1}) \Delta T_i = -k_i A_i d\xi \Delta T_i \quad (33)$$

Mit Einführung des thermischen Leitwertes $L_i = k_i A_i$ und der dimensionslosen Ortskoordinate ξ folgt

$$\frac{d\dot{Q}_i}{d\xi} = -k_i A_i \Delta T_i = -L_i \Delta T_i \quad (34)$$

Die thermischen Leitwerte L_i fließen als reziproke Widerstände in das Allgemeine Widerstandsgesetz ein. Es sei darauf hingewiesen, dass die Wärmeübertragungsflächen und Wärmedurchgangskoeffizienten der Passagen unterschiedlich sein dürfen. Für die Leitwertmatrix $\underline{\mathbf{L}}$, eine Diagonalmatrix, gilt

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \\ \dot{Q}_5 \\ \dot{Q}_6 \\ \dot{Q}_7 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \\ \Delta T_4 \\ \Delta T_5 \\ \Delta T_6 \\ \Delta T_7 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\frac{d}{d\xi} \underline{\dot{\mathbf{Q}}} = -\underline{\mathbf{L}} \underline{\Delta T}$$

Der Allgemeine Knotensatz beschreibt unter Verwendung der Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ Energiebilanzen der Medienströme um den inkrementellen Ausschnitt der Passagen. Für die differentiellen Enthalpieänderungen $\frac{d}{d\xi} \underline{\dot{\mathbf{H}}}$ aus zu- und abfließenden differentiellen Wärme-

strömen $\frac{d}{d\xi}\underline{\dot{\mathbf{Q}}}$ folgt

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \\ \dot{H}_4 \\ \dot{H}_5 \\ \dot{H}_6 \\ \dot{H}_7 \\ \dot{H}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \\ \dot{Q}_5 \\ \dot{Q}_6 \\ \dot{Q}_7 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\frac{d}{d\xi} \underline{\dot{\mathbf{H}}} = \underline{\mathbf{K}} \frac{d}{d\xi} \underline{\dot{\mathbf{Q}}}$$

Zwischen Temperatur T und Enthalpiestrom \dot{H} eines Prozessstroms gilt (ohne Phasenwechsel) über den Wärmekapazitätsstrom $\dot{C}_i = \dot{m}_i c$ der Zusammenhang

$$\dot{H}_i = \dot{m}_i c T_i = \dot{C}_i T_i \quad (37)$$

Zu beachten ist, die Masseströme in den Passagen können unterschiedliche Werte annehmen. Das Vorzeichen der Masseströme beschreibt die Fließrichtung der Ströme. Mit einem positiven Vorzeichen des Massestroms fließt der Medienstrom in Richtung der ζ -Achse, sowie anderenfalls umgekehrt. Als Matrixengleichung formuliert gilt

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \\ \dot{H}_4 \\ \dot{H}_5 \\ \dot{H}_6 \\ \dot{H}_7 \\ \dot{H}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{C}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{C}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dot{C}_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{C}_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dot{C}_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{C}_8 \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\frac{d}{d\xi} \underline{\dot{\mathbf{H}}} = \underline{\dot{\mathbf{C}}} \underline{\mathbf{T}}$$

In der vorangegangenen Reihenfolge in einander eingesetzt, ergeben Allgemeiner Maschensatz (32), Allgemeines Widerstandsgesetz (35), Allgemeiner Knotensatz (36) und Enthalpiegleichung (38) das beschreibende lineare Differenzialgleichungssystem.

$$\frac{d}{d\xi} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\dot{\mathbf{C}}}^{-1} \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{T}} \quad (39)$$

Die Übertragungsmatrix $\underline{\mathbf{N}}$ enthält die dimensionslosen Zahlen der Übertragungseinheiten $N = \frac{kA}{\dot{C}}$.

Für jedes gewöhnliche lineare Differenzialgleichungssystem existiert eine exakte geschlossene Lösung. Abgesehen von trivialen Fällen sind diese Lösungen allerdings äußerst

komplex und damit unpraktikabel. Daher ist es günstig lineare Differentialgleichungssysteme per TAYLOR-Reihenentwicklung auf dem Computer numerisch zu lösen. Die Reihenentwicklung zeichnet sich durch numerische Stabilität, hohe Rechengeschwindigkeit und analytische Genauigkeit aus.

Die Lösung des Differentialgleichungssystems erfolgt gemäß Gleichung (39) per TAYLOR-Reihenentwicklung bzw. per Matrix-Exponential-Operator

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{T}}_{(\xi)} &= \underline{\mathbf{T}}_{(0)} + \underline{\mathbf{T}}'_{(0)}\xi + \underline{\mathbf{T}}''_{(0)}\frac{\xi^2}{2!} + \underline{\mathbf{T}}'''_{(0)}\frac{\xi^3}{3!} + \underline{\mathbf{T}}^{(4)}_{(0)}\frac{\xi^4}{4!} + \dots \\
&= \left(\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{N}}\xi + \frac{\underline{\mathbf{N}}^2\xi^2}{2!} + \frac{\underline{\mathbf{N}}^3\xi^3}{3!} + \frac{\underline{\mathbf{N}}^4\xi^4}{4!} + \dots \right) \underline{\mathbf{T}}_{(0)} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{\mathbf{N}}^i \xi^i}{i!} \right) \underline{\mathbf{T}}_{(0)} = \exp(\underline{\mathbf{N}}\xi) \underline{\mathbf{T}}_{(0)} = \underline{\Phi}_{\xi} \underline{\mathbf{T}}_{(0)}
\end{aligned} \tag{40}$$

Die Gleichungen (40) beschreiben die örtlichen Temperaturprofile in den Passagen durch den Temperaturvektor $\underline{\mathbf{T}}_{(\xi)}$ als Funktion der dimensionslosen Ortskoordinate ξ . Wichtig sind die Temperaturvektoren an den Stellen $\xi = 0$ und $\xi = 1$. Die Exponentialmatrix $\underline{\Phi}_{\xi=1}$ stellt die Verknüpfung zwischen den Temperaturvektoren $\underline{\mathbf{T}}_{\xi=0}$ und $\underline{\mathbf{T}}_{\xi=1}$ her

$$\underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{T}}_{\xi=1} = \underline{\Phi}_{\xi=1} \underline{\mathbf{T}}_{\xi=0} \tag{41}$$

Gleichung (41) stellt den Zusammenhang zwischen den Randbedingungen her. Nur leider enthalten beide Vektoren $\underline{\mathbf{T}}_{\xi=0}$ und $\underline{\mathbf{T}}_{\xi=1}$ neben bekannten Eingangstemperaturen auch unbekannte Ausgangstemperaturen. Die heißen Medienströme fließen der x -Achse entgegen. Daher befinden sich im Vektor $\underline{\mathbf{T}}_{\xi=0}$ die Austrittstemperaturen der heißen Ströme und die Eintrittstemperaturen der kalten Ströme, wogegen sich im Vektor $\underline{\mathbf{T}}_{\xi=1}$ die Eintrittstemperaturen der heißen Ströme und die Austrittstemperaturen der kalten Ströme befinden. Die Spalten mit ungerader Ordinalzahl enthalten generell die Koeffizienten der heißen Ströme. Werden diese Spalten in der Einheitsmatrix $\underline{\mathbf{E}}$ mit denen der Exponentialmatrix $\underline{\Phi}_{\xi=1}$ bei Wechsel des Vorzeichens getauscht und die entsprechenden Elemente der Vektoren $\underline{\mathbf{T}}_{\xi=0}$ und $\underline{\mathbf{T}}_{\xi=1}$ ebenfalls getauscht, entsteht durch anschließende Invertierung und Matrizenmultiplikation eine exakte Beziehung zwischen Ein- und Ausgangstemperaturen des Plattenwärmeübertragers.

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{42}$$

Formal geschieht diese Modellmodifikation, die sogenannte partielle Invertierung, mit der Richtungsmatrix $\underline{\underline{D}}$, einer Diagonalmatrix. Sie enthält auf der Hauptdiagonalen den Wert „+1“, wenn in der entsprechenden Passage das Medium entlang der x -Achse strömt oder den Wert „-1“, wenn das Medium entgegen der x -Achse strömt

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left((\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{D}}) - \underline{\underline{\Phi}}_{\xi=1} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{D}}) \right)^{-1} \left(\underline{\underline{\Phi}}_{\xi=1} (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{D}}) - (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{D}}) \right) \quad (43)$$

Die Matrix der Betriebscharakteristiken $\underline{\underline{\Phi}}$ stellt den Zusammenhang zwischen Ein- und Austrittstemperaturen her

$$\underline{\underline{T}}^o = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{T}}^i \quad (44)$$

Die mit Gleichung (43) erhaltene Matrix der Betriebscharakteristiken $\underline{\underline{\Phi}}$ steht in völliger Analogie zur Matrix der Betriebscharakteristiken $\underline{\underline{\Phi}}$ einer Rekuperatorschaltung und ist daher völlig gleich zu behandeln. Obwohl bei Plattenwärmeübertragern die Prozessströme nicht ausschließlich paarweise gekoppelt, sondern die Teilströme der Medien untereinander multipel verknüpft sind, gilt die Strukturmethode für Rekuperatorschaltungen voll umfänglich [7]. Kern der Strukturmethode ist die Formulierung einer allgemeinen geschlossenen Lösung für beliebige Strukturen. Für die Austrittstemperaturen der Passagen $\underline{\underline{T}}^o$ und der Medien $\underline{\underline{T}}^O$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}^o &= (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{S}})^{-1} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{I}} \underline{\underline{T}}^I \\ \underline{\underline{T}}^O &= \underline{\underline{O}} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{S}})^{-1} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{I}} \underline{\underline{T}}^I = \underline{\underline{O}} \underline{\underline{T}}^o \end{aligned} \quad (45)$$

Die Input-Matrix $\underline{\underline{I}}$ formuliert die äußeren Anschlüsse der Eingänge der Medienströme in die Passagen. Das Element der Inputmatrix $I_{ij} = 1$ bedeutet, die i -te Passage ist der Eintritt des j -ten Prozeßstroms (47). Analog beschreibt die Output-Matrix $\underline{\underline{O}}$ die äußeren Anschlüsse der Ausgänge der Medienströme aus den Passagen. Das Element der Outputmatrix $O_{ij} = x$ bedeutet, der Anteil x des i -ten Prozeßstroms verlässt aus der j -ten Passage kommend den Apparat (48). Die Strukturmatrix $\underline{\underline{S}}$ beschreibt innere Verschaltungen, wenn z.B. Ausgänge von Passagen an anderer Stelle zu Eingängen geleitet werden. Das Element $S_{ij} = x$ besagt, der Anteil x des Eingangstromes in Passage i kommt aus Passage j [6, 7]. Im vorliegenden, sehr einfachen und speziellen Fall liegen keine inneren Verschaltungen vor, sodass die Strukturmatrix $\underline{\underline{S}}$ nur Nullen enthält und daher wegfällt. Somit entsteht eine vereinfachte spezielle Lösung

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}^o &= \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{I}} \underline{\underline{T}}^i \\ \underline{\underline{T}}^O &= \underline{\underline{O}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{I}} \underline{\underline{T}}^I \end{aligned} \quad (46)$$

Für die Zuordnung der Eintrittstemperaturen der Medien $\underline{\underline{T}}^I$ und der Passagen $\underline{\underline{T}}^i$ gilt mit

der Inputmatrix $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ im vorliegenden Fall

$$\begin{bmatrix} T_1^i \\ T_2^i \\ T_3^i \\ T_4^i \\ T_5^i \\ T_6^i \\ T_7^i \\ T_8^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_H^I \\ T_C^I \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^i = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^I$$

Für die Berechnung der Austrittstemperaturen der Medienströme $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^O$ aus den entsprechenden Temperaturen der Passagen $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^o$ gilt die Outputmatrix $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$ unter Berücksichtigung der Koeffizienten der Mischungsregel x_i

$$\begin{bmatrix} T_H^O \\ T_C^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{h1} & 0 & x_{h2} & 0 & x_{h3} & 0 & x_{h4} & 0 \\ 0 & x_{c1} & 0 & x_{c2} & 0 & x_{c3} & 0 & x_{c4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^o \\ T_2^o \\ T_3^o \\ T_4^o \\ T_5^o \\ T_6^o \\ T_7^o \\ T_8^o \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^O = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^o$$

Mit den Massestromverhältnissen $x_i = \dot{m}_i / \sum \dot{m}_i$ aus dem hydraulischen Modell ergibt sich die Outputmatrix $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$ gemäß Mischungsregel

$$\underline{\underline{\mathbf{O}}} = \begin{bmatrix} \dot{m}_H^I & 0 \\ 0 & \dot{m}_C^I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{m}_{h4} & 0 & \dot{m}_{h5} & 0 & \dot{m}_{h6} & 0 & \dot{m}_{h7} & 0 \\ 0 & \dot{m}_{c4} & 0 & \dot{m}_{c5} & 0 & \dot{m}_{c6} & 0 & \dot{m}_{c7} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Im Vorgriff auf das Beispiel sei darauf hingewiesen, dass sowohl die heißen als auch die kalten Austrittstemperaturen der Medien aus den Passagen selbst bei konstanten Masseströmen signifikant unterschiedlich sind.

5.2 Beispiel: Thermische Eigenschaften

Die Anwendung des Netzmodells für Plattenwärmeübertrager wird an einem Beispiel vergleichend demonstriert. Dazu wird die thermische Übertragungsleistung des Plattenwärmeübertragers zunächst „klassisch“ d.h. analog zu einem Gegenstromapparat bestimmt. Im Anschluss erfolgt die Berechnung mit dem vorgestellten Netzmodell bei gleichmäßiger und ungleichmäßiger Prozessstromaufteilung. Dabei wird deutlich, ein Plattenwärmeübertrager

weicht selbst bei gleichmäßiger Stromaufteilung signifikant vom idealen Gegenstrom ab. Dieser Effekt tritt bei ungleicher Stromaufteilung d.h. Maldistribution verstärkt auf.

Die **Abbildung 11** zeigt einen Plattenwärmeübertrager mit insgesamt acht Passagen. Im Kontext des thermischen Modells bedeutet dies $p = 8$ Knoten (T_1, T_2, \dots, T_8) und $l = 7$ thermische Kopplungen (L_1, L_2, \dots, L_7). Die Teilströme des heißen/kalten Mediums durchfluten die Passagen mit ungerader/gerader Ordinalzahl.

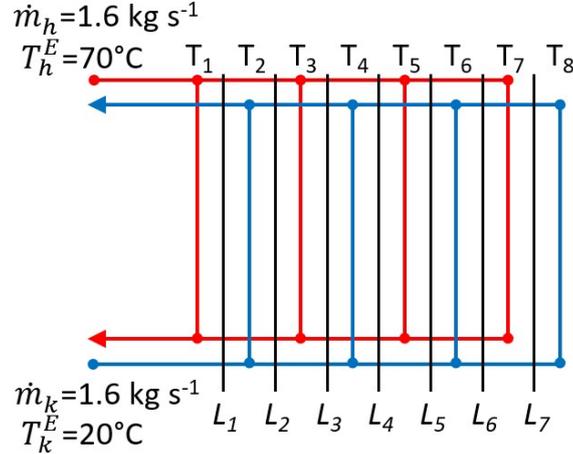


Abbildung 11: Plattenwärmeübertrager mit 8 Passagen und 7 Wärmedurchgangsplatten

Der dargestellte Apparat weist sieben Übertragungsplatten auf, deren thermischer Leitwert $L = 7 \cdot 1.6 \text{ kW K}^{-1} = 11.2 \text{ kW K}^{-1}$ beträgt. Die spezifische Wärmekapazität beider Medien beträgt $c = 4.0 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, sodass die Kapazitätsströme für das heiße sowie das kalte Medium $\dot{C}_h = \dot{m}_h c = 6.4 \text{ kW K}^{-1}$ und $\dot{C}_k = \dot{m}_k c = 6.4 \text{ kW K}^{-1}$ betragen.

• Näherung als Gegenstromapparat

Die Berechnung der Übertragungsleistung erfordert die dimensionslosen Zahlen der Übertragungseinheiten N_h und N_k bezogen auf das heiße sowie das kalte Medium.

$$N_h = \frac{kA}{\dot{C}_h} = \frac{11.2 \text{ kW K}^{-1}}{6.4 \text{ kW K}^{-1}} = 1.75 \quad N_k = \frac{kA}{\dot{C}_k} = \frac{11.2 \text{ kW K}^{-1}}{6.4 \text{ kW K}^{-1}} = 1.75 \quad (50)$$

Im Falle gleicher Anzahl von Übertragungseinheiten $N_h = N_k$ gilt für die Betriebscharakteristik eines Gegenstromwärmeübertragers Φ_h

$$\Phi_h = \frac{N_h}{1 + N_h} = \frac{1.75}{1 + 1.75} = 0.63636 \quad (51)$$

Die thermische Übertragungsleistung eines Gegenstromapparates ergibt sich

$$\dot{Q} = \dot{C}_h (T_h^E - T_k^E) \Phi_h = 6.4 \text{ kW K}^{-1} (70^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) 0.6364 = 203.6 \text{ kW} \quad (52)$$

Als idealer Gegenstromapparat weist der Plattenwärmeübertrager eine thermische Leistung von 203.6 kW auf.

- **Parametrierung des Netzmodells**

Für die Anwendung des Netzmodells sind die beschreibenden Matrizen mit den technologisch relevanten Informationen aufzustellen. Die Strukturdaten des Plattenwärmeübertragers liegen in Form der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ und der Richtungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ gemäß der Gleichungen (31) und (42) vor.

Die Leitwertmatrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ enthält auf der Hauptdiagonalen die thermischen Leitwerte der sieben Übertragungsplatten $L = 1.60 \text{ kW K}^{-1}$ (die Werte sind nicht zwingend gleich).

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} 1.600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.600 \end{bmatrix} \text{ kW K}^{-1} \quad (53)$$

- **Thermisches Modell mit gleichmäßiger Stromaufteilung**

Der Kapazitätsstrom $\dot{C}_h = 6.4 \text{ kW K}^{-1}$ des heißen Prozessstroms wird gleichmäßig mit jeweils -1.6 kW K^{-1} auf die vier Passagen der ungeraden Ordinalzahlen aufgeteilt. Das negative Vorzeichen der heißen Teilströme bildet die der x -Achse entgegengesetzte Strömungsrichtung ab. Analog wird der Kapazitätsstrom des kalten Prozessstroms $\dot{C}_k = 6.4 \text{ kW K}^{-1}$ gleichmäßig mit jeweils 1.6 kW K^{-1} auf die vier Passagen der geraden Ordinalzahlen aufgeteilt. Die Werte der Teilströme bilden die Hauptdiagonale für die Matrix der Kapazitätsströme $\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}$.

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} = \begin{bmatrix} -1.600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.600 \end{bmatrix} \text{ kW K}^{-1} \quad (54)$$

Aus der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$, der Leitwertmatrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ und der Kapazitätsmatrix $\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}$ folgt nach Gleichung (39) die Übertragungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & -2.0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & -2.0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & -2.0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Durch TAYLOR-Reihenentwicklung der Übertragungsmatrix $\underline{\mathbf{N}}$ gemäß Gleichung (40) wird die Exponentialmatrix $\underline{\underline{\Phi}}_{\zeta=1}$ erhalten. Der Abbruch der Reihe erfolgt nach den üblichen Kriterien z.B. $\varepsilon < 10^{-12}$. Diese Genauigkeit entspricht der einer analytischen Lösung.

$$\underline{\underline{\Phi}}_{\xi=1} = \begin{bmatrix} 2.184 & -0.594 & -0.784 & 0.146 & 0.057 & -0.008 & -0.002 & 0.000 \\ 0.594 & -0.381 & 1.232 & -0.289 & -0.195 & 0.032 & 0.009 & -0.001 \\ -0.784 & -1.232 & 5.042 & -1.183 & -1.095 & 0.193 & 0.070 & -0.011 \\ -0.146 & -0.289 & 1.183 & -0.495 & 1.184 & -0.283 & -0.192 & 0.038 \\ 0.057 & 0.195 & -1.095 & -1.184 & 5.054 & -1.186 & -1.082 & 0.241 \\ 0.008 & 0.032 & -0.194 & -0.283 & 1.186 & -0.489 & 1.137 & -0.397 \\ -0.002 & -0.009 & 0.070 & 0.192 & -1.082 & -1.137 & 4.744 & -1.775 \\ 0.000 & -0.001 & 0.011 & 0.038 & -0.241 & -0.397 & 1.775 & -0.184 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Die Richtungsmatrix $\underline{\mathbf{D}}$ „formt“ die Exponentialmatrix $\underline{\underline{\Phi}}_{\xi=1}$ gemäß Gleichung (43) zur Matrix der Betriebscharakteristiken $\underline{\underline{\Phi}}$ um. Die Elemente der Matrix $\underline{\underline{\Phi}}$ sind anteilige dimensionslose Temperaturänderungen. Daher sind die Zeilensummen dieser Matrix permanent gleich Eins. Interessant ist die Symmetrie der Matrix!

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0.485 & 0.382 & 0.078 & 0.035 & 0.012 & 0.005 & 0.002 & 0.001 \\ 0.382 & 0.222 & 0.309 & 0.049 & 0.025 & 0.008 & 0.003 & 0.002 \\ 0.078 & 0.309 & 0.220 & 0.306 & 0.049 & 0.025 & 0.008 & 0.005 \\ 0.035 & 0.049 & 0.306 & 0.218 & 0.306 & 0.049 & 0.025 & 0.012 \\ 0.012 & 0.025 & 0.049 & 0.306 & 0.218 & 0.306 & 0.049 & 0.035 \\ 0.005 & 0.008 & 0.025 & 0.049 & 0.306 & 0.220 & 0.309 & 0.078 \\ 0.002 & 0.003 & 0.008 & 0.025 & 0.049 & 0.309 & 0.222 & 0.382 \\ 0.001 & 0.002 & 0.005 & 0.012 & 0.035 & 0.078 & 0.382 & 0.485 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Die Berechnung der Austrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^o$ der Passagen erfordert die Eintrittstemperaturen in die Passagen $\underline{\mathbf{T}}^i$, welche sich über die Input-Matrix $\underline{\mathbf{I}}$ aus den Eintrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^I$ der Prozessströme gemäß Gleichung (47) ergeben

$$\begin{bmatrix} T_1^i \\ T_2^i \\ T_3^i \\ T_4^i \\ T_5^i \\ T_6^i \\ T_7^i \\ T_8^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} = \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} \quad (58)$$

Die Austrittstemperaturen der Teilströme aus den Passagen $\underline{\mathbf{T}}^o$ folgen aus Gleichung (44)

$$\begin{bmatrix} 0.485 & 0.382 & 0.078 & 0.035 & 0.012 & 0.005 & 0.002 & 0.001 \\ 0.382 & 0.222 & 0.309 & 0.049 & 0.025 & 0.008 & 0.003 & 0.002 \\ 0.078 & 0.309 & 0.220 & 0.306 & 0.049 & 0.025 & 0.008 & 0.005 \\ 0.035 & 0.049 & 0.306 & 0.218 & 0.306 & 0.049 & 0.025 & 0.012 \\ 0.012 & 0.025 & 0.049 & 0.306 & 0.218 & 0.306 & 0.049 & 0.035 \\ 0.005 & 0.008 & 0.025 & 0.049 & 0.306 & 0.220 & 0.309 & 0.078 \\ 0.002 & 0.003 & 0.008 & 0.025 & 0.049 & 0.309 & 0.222 & 0.382 \\ 0.001 & 0.002 & 0.005 & 0.012 & 0.035 & 0.078 & 0.382 & 0.485 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} = \begin{bmatrix} 48.9 \\ 56.0 \\ 37.8 \\ 53.6 \\ 36.4 \\ 52.2 \\ 34.0 \\ 41.1 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} \quad (59)$$

Die Austrittstemperaturen der heißen Teilströme aus den Passagen (die Elemente 1, 3, 5 und 7) sowie die Austrittstemperaturen der kalten Teilströme (die Elemente 2, 4, 6 und 8) unterscheiden sich jeweils deutlich voneinander, da die äußeren Platten nur einseitig gekühlt bzw. erwärmt werden. Dieser „Randeffekt“ zeigt deutlich die Abweichung vom idealen Gegenstrom.

Mit der Outputmatrix werden mit Gleichung (48) aus den Austrittstemperaturen der Passagen $\underline{\mathbf{T}}^o$ die Austrittstemperaturen der Prozessströme $\underline{\mathbf{T}}^O$ erhalten

$$\begin{bmatrix} T_h^O \\ T_k^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.250 & 0 \\ 0 & 0.250 \\ 0.250 & 0 \\ 0 & 0.250 \\ 0.250 & 0 \\ 0 & 0.250 \\ 0.250 & 0 \\ 0 & 0.250 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 48.9 \\ 56.0 \\ 37.8 \\ 53.6 \\ 36.4 \\ 52.2 \\ 34.0 \\ 41.1 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} = \begin{bmatrix} 39.3 \\ 50.7 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} \quad (60)$$

Über die Aus- und Eingangstemperaturen der Prozessströme sind deren Enthalpieänderungen und damit die Übertragungsleistung des Plattenwärmeübertragers bestimmbar. Die Diskrepanz beider Bilanzen liegt im Bereich $\varepsilon < 10^{-8}$

$$\begin{bmatrix} 6.4 & 0 \\ 0 & 6.4 \end{bmatrix} \text{ kW } K^{-1} \left(\begin{bmatrix} 39.3 \\ 50.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix} \right) \text{ } ^\circ\text{C} = \begin{bmatrix} -196.5 \\ 196.5 \end{bmatrix} \text{ kW} \quad (61)$$

Die Übertragungsleistung von 196.5 kW liegt erwartungsgemäß unterhalb der Leistung des „Gegenströmers“ mit 203.6 kW.

- **Thermisches Modell mit ungleichmäßiger Stromaufteilung**

Bei ungleichmäßiger Stromteilung wird der Kapazitätsstrom $\dot{C}_h = 6.4 \text{ kW } K^{-1}$ des heißen Prozessstroms sowie der Kapazitätsstrom des kalten Prozessstroms $\dot{C}_k = 6.4 \text{ kW } K^{-1}$ gemäß dem Beispiel „hydraulische Eigenschaften“ aufgeteilt, indem die Masseströme der Passagen mit der spezifischen Wärmekapazität $c = 4.0 \text{ kJ kg}^{-1}K^{-1}$ multipliziert werden.

Diese Werte stehen in der Hauptdiagonale der Matrix der Kapazitätsströme $\underline{\underline{\dot{C}}}$. Die negativen Vorzeichen der heißen Teilströme sind zu beachten.

$$\underline{\underline{\dot{C}}} = \begin{bmatrix} -2.348 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.676 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.280 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.280 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.676 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.096 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.348 \end{bmatrix} kW K^{-1} \quad (62)$$

Aus der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$, der Leitwertmatrix $\underline{\underline{L}}$ und der Kapazitätsmatrix $\underline{\underline{\dot{C}}}$ folgt nach Gleichung (39) die modifizierte Übertragungsmatrix $\underline{\underline{N}}$

$$\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} 0.681 & -0.681 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.460 & -2.920 & 1.460 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.955 & 1.910 & -0.955 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.250 & -2.500 & 1.250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.250 & 2.500 & -1.250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.955 & -1.910 & 0.955 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.460 & 2.920 & -1.460 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.681 & -0.681 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Durch Entwicklung der TAYLOR-Reihe mit der Übertragungsmatrix $\underline{\underline{N}}$ folgt nach Gleichungen (40) die Exponentialmatrix $\underline{\underline{\Phi}}_{\xi=1}$

$$\underline{\underline{\Phi}}_{\xi=1} = \begin{bmatrix} 1.643 & -0.227 & -0.551 & 0.090 & 0.057 & -0.010 & -0.003 & 0.000 \\ 0.485 & -0.327 & 1.314 & -0.248 & -0.303 & 0.061 & 0.022 & -0.005 \\ -0.773 & -0.859 & 4.358 & -0.761 & -1.352 & 0.289 & 0.127 & -0.029 \\ -0.165 & -0.212 & 0.997 & -0.681 & 1.847 & -0.480 & -0.425 & 0.120 \\ 0.104 & 0.259 & -1.771 & -1.847 & 7.692 & -1.867 & -2.271 & 0.700 \\ 0.014 & 0.040 & -0.289 & -0.366 & 1.426 & -1.065 & 2.231 & -0.990 \\ -0.006 & -0.022 & 0.195 & 0.496 & -2.652 & -3.412 & 11.787 & -5.386 \\ 0.000 & -0.002 & 0.021 & 0.065 & -0.382 & -0.707 & 2.514 & -0.509 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Die Richtungsmatrix $\underline{\underline{D}}$ bewirkt mit Gleichung (43) den Spaltentausch. So entsteht die Matrix der Betriebscharakteristik $\underline{\underline{\Phi}}$

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0.649 & 0.218 & 0.086 & 0.027 & 0.011 & 0.006 & 0.001 & 0.002 \\ 0.468 & 0.091 & 0.370 & 0.033 & 0.023 & 0.010 & 0.002 & 0.003 \\ 0.121 & 0.242 & 0.264 & 0.275 & 0.048 & 0.036 & 0.006 & 0.008 \\ 0.049 & 0.028 & 0.360 & 0.151 & 0.310 & 0.062 & 0.020 & 0.020 \\ 0.020 & 0.020 & 0.062 & 0.310 & 0.151 & 0.360 & 0.028 & 0.049 \\ 0.008 & 0.006 & 0.036 & 0.048 & 0.275 & 0.264 & 0.242 & 0.121 \\ 0.003 & 0.002 & 0.010 & 0.023 & 0.033 & 0.370 & 0.091 & 0.468 \\ 0.002 & 0.001 & 0.006 & 0.011 & 0.027 & 0.086 & 0.218 & 0.649 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Mit den Eintrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^i$ ergeben sich mit Gleichung (44) die Austrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^o$ der Passagen

$$\begin{bmatrix} 57.4 \\ 63.2 \\ 42.0 \\ 56.9 \\ 33.1 \\ 48.1 \\ 26.8 \\ 32.6 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ C = \begin{bmatrix} 0.649 & 0.218 & 0.086 & 0.027 & 0.011 & 0.006 & 0.001 & 0.002 \\ 0.468 & 0.091 & 0.370 & 0.033 & 0.023 & 0.010 & 0.002 & 0.003 \\ 0.121 & 0.242 & 0.264 & 0.275 & 0.048 & 0.036 & 0.006 & 0.008 \\ 0.049 & 0.028 & 0.360 & 0.151 & 0.310 & 0.062 & 0.020 & 0.020 \\ 0.020 & 0.020 & 0.062 & 0.310 & 0.151 & 0.360 & 0.028 & 0.049 \\ 0.008 & 0.006 & 0.036 & 0.048 & 0.275 & 0.264 & 0.242 & 0.121 \\ 0.003 & 0.002 & 0.010 & 0.023 & 0.033 & 0.370 & 0.091 & 0.468 \\ 0.002 & 0.001 & 0.006 & 0.011 & 0.027 & 0.086 & 0.218 & 0.649 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \\ 70 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ C \quad (66)$$

Die Apparataustrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^O$ folgen aus Austrittstemperaturvektor $\underline{\mathbf{T}}^o$ und der Output-Matrix $\underline{\mathbf{O}}$ mit der involvierten Mischungsregel gemäß Gleichung (48)

$$\begin{bmatrix} T_h^O \\ T_k^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 1.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.587 & 0 \\ 0 & 0.274 \\ 0.419 & 0 \\ 0 & 0.320 \\ 0.320 & 0 \\ 0 & 0.419 \\ 0.274 & 0 \\ 0 & 0.587 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 57.4 \\ 63.2 \\ 42.0 \\ 56.9 \\ 33.1 \\ 48.1 \\ 26.8 \\ 32.6 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ C = \begin{bmatrix} 43.3 \\ 46.7 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ C \quad (67)$$

Mit der Enthalpiebilanz wird die thermische Übertragungsleistung des Plattenwärmeübertragers erhalten

$$\begin{bmatrix} 6.4 & 0 \\ 0 & 6.4 \end{bmatrix} kW K^{-1} \left(\begin{bmatrix} 43.3 \\ 46.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix} \right) \text{ } ^\circ C = \begin{bmatrix} -170.9 \\ 170.9 \end{bmatrix} kW \quad (68)$$

Die Übertragungsleistung beträgt bei ungleichmäßiger Massestromverteilung $170.9 kW$ und liegt erwartungsgemäß deutlich unterhalb der Leistung des Plattenwärmeübertragers bei gleicher Massestromaufteilung mit $196.5 kW$ sowie des „Gegenströmers“ mit $203.6 kW$.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Artikel wird ein neuartiger Berechnungsansatz für Plattenwärmeübertrager vorgestellt, welcher in der Kombination von zwei Facetten eines Allgemeinen Netzmodells besteht. Die Anwendung dieses Berechnungsansatzes erfordert Methoden der linearen Algebra.

Die Möglichkeiten der vorgestellten Modelle zur Berechnung der hydraulischen und thermischen Eigenschaften von Plattenwärmeübertrager gehen weit über den dargestellten Rahmen hinaus. So könnte sich die Weiterentwicklung über die Einbeziehung der strömungsabhängigkeit des Wärmeübergangs hinaus, auf Gasströmung, Zweiphasenströmung,

Dispersion sowie Wärmeleitung in Längsrichtung der Platten ertrecken. Das hydraulische Modell für Plattenwärmeübertrager involviert in der vorliegenden Fassung nur Reibungseffekte der Flüssigkeitsströmung. Neben der Flüssigkeitsreibung existieren dynamische Effekte im Verteiler und im Sammler, welche in den Passagen Sogwirkungen ausüben. Es ist leicht möglich, das Modell bezüglich derartiger Sogwirkungen zu erweitern.

Die Komplexität von Plattenwärmeübertragern setzt den Möglichkeiten des Modells kaum Grenzen. Dies wird durch die nachfolgenden Beispiele kurz angedeutet.

Abbildung 12 stellt das hydraulische Schema eines Plattenwärmeübertragers ohne Umlenkung des Prozessstroms dar. Bei den Netzmodellen ändern sich lediglich die Einspeiseknoten in den Kopplungsmatrizen. Darüber hinaus existieren für diese Art der Durchströmung ebenfalls analytische Lösungen.

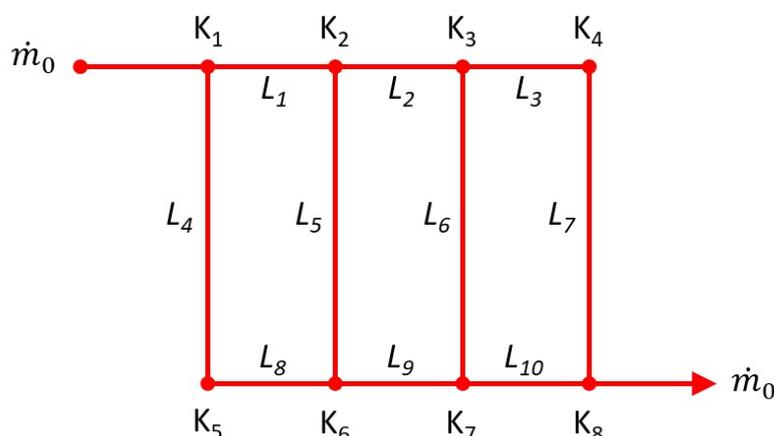


Abbildung 12: Plattenwärmeübertrager ohne Umlenkung des Prozessstroms

Abbildung 13 zeigt das hydraulische Schema eines Plattenwärmeübertragers, bei welchem der heiße Prozessstrom zwei Sektionen und der kalte Prozessstrom eine Sektion durchflutet. Dies bedeutet, dass einige Passagen auf einer Seite im Gegenstrom und auf der anderen Seite im Gleichstrom gekoppelt sind. Eine derartige Struktur ist mit dem hydraulischen und dem thermischen Modell ohne zusätzlichen Rechenaufwand mit den vorgestellten Gleichungen berechenbar.

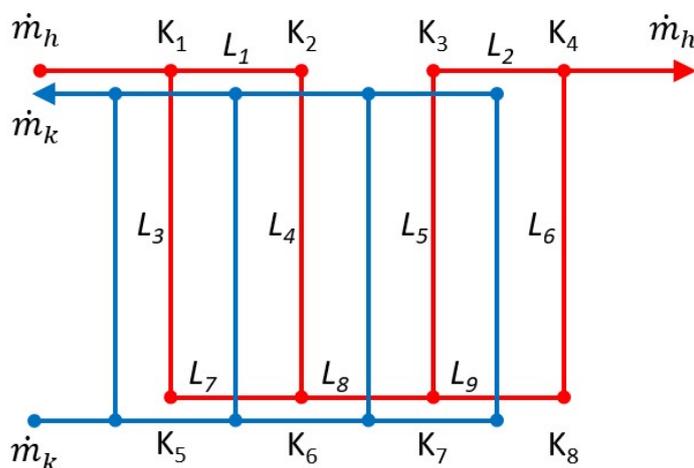


Abbildung 13: Plattenwärmeübertrager mit zwei Sektionen

Durch Nutzung von frei verfügbaren Programmbausteinen für Matrizenoperationen ist der erforderliche Programmieraufwand sehr gering und bietet wenig Fehlermöglichkeiten. Apparate- und Modellgröße besitzen keinen Einfluss auf den Umfang der Programmierung. Für den bearbeitenden Ingenieur sind derartige Methoden auf modernen Bürocomputern bereits mit Standardsoftware bequem lösbar. Bei Zurmühl und Falk heißt es: „Das Matrixkalkül ist das kleine Einmaleins des digitalen Rechenautomaten“ [8].

7 Symbolverzeichnis

Formelzeichen

A	... Wärmeübertragungsfläche	... $[m^2]$
$\underline{\dot{C}}$... Kapazitätsmatrix	... $[kW K^{-1}]$
$\underline{\dot{C}}$... Wärmekapazitätsvektor	... $[kW K^{-1}]$
\dot{C}	... Wärmekapazitätsstrom	... $[kW K^{-1}]$
C	... Konstante	... [1]
c	... spezifische Wärmekapazität	... $[kJ kg^{-1}K^{-1}]$
c	... Konstante	... [1]
$\underline{\underline{D}}$... Richtungsmatrix	... [1]
d	... Durchmesser	... $[m]$
$\underline{\underline{E}}$... Einheitsmatrix	... [1]
$\underline{\underline{F}}_m$... Funktionsvektor (Masseströme)	... $[kg s^{-1}]$
$\underline{\underline{F}}_p$... Funktionsvektor (Knotendrucke)	... [1]
F	... Strömungsquerschnitt	... $[m^2]$
$\underline{\underline{\Phi}}$... Matrix der Betriebscharakteristiken	... [1]
$\underline{\underline{\Phi}}$... Betriebscharakteristik	... [1]
$\underline{\underline{H}}$... Enthalpiestromvektor	... $[kW]$
η	... dynamische Viskosität	... $[kg m^{-1}s^{-1}]$
$\underline{\underline{I}}$... Inputmatrix	... [1]
$\underline{\underline{K}}$... Kopplungsmatrix	... [1]
K_i	... i -ter Knoten	... [–]
k	... Wärmedurchgangskoeffizient	... $[W m^{-2}K^{-1}]$
$\underline{\underline{L}}$... Leitwert-Matrix	... $[kW K^{-1}]$
$\underline{\underline{L}}$... thermischer Leitwert	... $[kW K^{-1}]$
L_i	... i -te Leitung	... [–]
l	... Länge des Strömungsweges	... $[m]$
λ	... Strömungsbeiwert	... [1]
$\underline{\underline{M}}$... Modellmatrix	... $[bar s kg^{-1}; 1]$
$\underline{\underline{m}}$... Massestromvektor	... $[kg s^{-1}]$
\dot{m}	... Massestrom	... $[kg s^{-1}]$

$\underline{\underline{\mathbf{N}}}$... Übertragungsmatrix	... [1]
N	... Zahl der Übertragungseinheiten	... [1]
$\underline{\underline{\mathbf{O}}}$... Outputmatrix	... [1]
$\underline{\mathbf{p}}$... Druckvektor	... [bar]
$\underline{\Delta \mathbf{p}}$... Vektor der treibenden Druckdifferenzen	... [bar]
p	... Druck	... [bar]
$\underline{\underline{\dot{\mathbf{Q}}}}$... Wärmestromvektor	... [W]
$\underline{\underline{\mathbf{R}}}$... Widerstandsmatrix	... [bar s kg ⁻¹]
Re	... Reynoldszahl	... [1]
R	... Strömungswiderstand	... [bar s kg ⁻¹]
r	... Rang einer Matrix	... [1]
ρ	... Dichte	... [kg m ⁻²]
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$... Strukturmatrix	... [1]
s	... Konstante	... [1]
$\underline{\mathbf{T}}$... Temperaturvektor	... [K]
$\underline{\Delta \mathbf{T}}$... Vektor der treibenden Temperaturdifferenzen	... [K]
T	... Temperatur	... [K]
w	... Strömungsgeschwindigkeit	... [m s ⁻¹]
$\underline{\mathbf{X}}$... Eingangsvektor	... [kg s ⁻¹]
x	... Massestromverhältnis	... [1]
ξ	... dimensionslose Ortokoordinate	... [1]
$\underline{\mathbf{Z}}$... Zustandsvektor	... [bar; kg s ⁻¹]
ζ	... Strömungswiderstandsbeiwert	... [1]

tief gestellte Indizes

i	... Zählindex
j	... Zählindex
k	... kalt
h	... heiß
p	... Passage
r	... reduziert
0	... an der Stelle $\xi = 0$
1	... an der Stelle $\xi = 1$
ξ	... an der Stelle ξ
hyd	... hydraulisch
lam	... laminar
$turb$... turbulent

hoch gestellte Indizes

A	...	Apparat
i	...	input (Passage)
I	...	input (Apparat)
o	...	output (Passage)
O	...	output (Apparat)
(0)	...	an der Stelle $\xi = 0$
(1)	...	an der Stelle $\xi = 1$

8 Literatur

- [1] B. Prabhakara Rao, P. Krishna Kumar, Sarit K. Das : „Effect of flow maldistribution to the channels on the thermal performance of a plate heat exchanger”
Chemical Engineering and Processing, 41(1) 49-58 (2002)
- [2] Strelow, O.: „Die Allgemeine Theorie der technischen Netze”
11. FEW-Kolloquium Fernwärme"; Gießen 2008
- [3] Strelow, O.: „Simulation der Maldistribution in Plattenwärmeübertragern“
12. Fachtagung „Verfahrenstechnik und Umweltschutz“, Bärenstein 2011
- [4] Strelow, O.: „Allgemeines Berechnungsmodell für elektrische Netze”
THM-Hochschulschriften Band 3, 2017
- [5] Strelow, O.: „Entwicklung und Verbesserung von Ansätzen zur Netzberechnung”
21. Fachtagung „Verfahrenstechnik und Umweltschutz“, Köthen 2020
- [6] Strelow, O.: „A general calculation method for plate heat exchangers”
International Journal of Thermal Sciences (2000)39, S. 645-658
- [7] Strelow, O.: „Eine allgemeine Methode zur Berechnung von Wärmeübertragerschaltungen”,
Forschung im Ingenieurwesen 63(1997)9, S. 255-261
- [8] Zurmühl, R.; Falk, S.: „Matrizen und ihre Anwendungen”
Springer Berlin-Heidelberg 2011; Schlußbemerkung S.484



Technische Hochschule Mittelhessen
University of Applied Sciences

Wiesenstraße 14
D-35390 Gießen

www.thm.de