UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

THM
TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN

Kai Bruchlos

Grundzüge der Pensionsversicherungsmathematik

THM-Hochschulschriften Band 17

Kai Bruchlos

Grundzüge der Pensionsversicherungsmathematik

THM-Hochschulschriften Band 17

THM-Hochschulschriften Band 17

Technische Hochschule Mittelhessen
Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und Datenverarbeitung
Herausgeber der THM-Hochschulschriften:
Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Einzelne Hochschulschriften sind auch online abrufbar:
www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846
ISSN (Online) 2568-3020

Vorwort

Die Pensionsversicherung gehört wie die Lebensversicherung zur Personenversicherung. Gemeinsam ist beiden Versicherungszweigen, dass Personen versichert sind und Deckungsrückstellungen gebildet werden. Sie unterscheiden sich allerdings in der Ausscheideordnung: Die der Pensionsversicherung ist in aller Regel durch die Berücksichtigung von weiteren Lebensereignissen wie Invalidität oder Heirat sehr viel umfangreicher. Aus mathematischer Sicht ist dieser Unterschied von geringer Bedeutung, für die Berechnung der Deckungsrückstellung aber von großer.

Ziel dieser Abhandlung ist es, einen Eindruck von den Modellen und Methoden der Pensionsversicherungsmathematik zu geben. Deshalb wird nur die Bewertung einer Pensionsverpflichtung mit dem Teilwertverfahren für ein bestimmtes Personenmodell betrachtet.

Entsprechend gliedert sich die Abhandlung: Ausgangspunkt von Kapitel 1 sind Pensionszusagen, deren Realisierung der Pensionsversicherungsmathematik bedürfen. Danach werden die benötigten Begriffe eingeführt und das stochastische Modell entwickelt, um dann die wichtigsten Rechenregeln formulieren zu können. Mit Kapitel 2 werden die notwendige Notation sowie die Verbleibe- und Übergangswahrscheinlichkeiten zur Verfügung gestellt. In Kapitel 3 werden die Barwerte der Ansprüche und Anwartschaften des betrachteten Personenmodelles aufgeführt und erläutert. Nachdem die Berechnung der Deckungsrückstellung dargestellt ist, die Bewertungsanlässe und -verfahren vorgestellt sind und die Altersbestimmung geklärt ist, kann im abschließenden Kapitel 4 der Teilwert einer Pensionsverpflichtung berechnet werden.

Neben dem Begriff *Definition* wird der Begriff *Explikation* verwendet, da die Pensionsversicherungsmathematik zur angewandten Mathematik gehört und damit sich zwischen der Mathematik (Formalwissenschaft) und den Wirtschaftswissenschaften (empirische Wissenschaft) bewegt. Mit der Definition werden *klare Begriffe gemacht* (Formalwissenschaft), mit der Explikation *Begriffe klar gemacht* (empirische Wissenschaft).

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Die Ausgestaltung von Pensionszusagen ist so vielfältig wie das Leben selbst. Wir können also gar nicht alle vorkommenden Versorgungsleistungen behandeln und konzentrieren uns deshalb auf die oft vorkommende Versorgungsleistungen Invalidenrente, Altersrente und Hinterbliebenenrente. Andere Versorgungsleistungen werden meist ähnlich behandelt. Wir verweisen hierfür auf die Literatur, insbesondere auf Neuburger 1997 und Heubeck 2018. Desweiteren gehen wir davon aus, dass die Renten jährlich vorschüssig mit gleichbleibend hohem Betrag gezahlt werden, es also insbesondere keine garantieren Betragssteigerungen gibt. Deshalb können wir ohne Einschränkung annehmen, dass jährlich eine Rente in Höhe von 1 Euro gezahlt wird.

Meist werden Renten monatlich ausgezahlt und nicht jährlich. Trotzdem ist die alleinige Betrachtung von jährlichen Rentenzahlungen keine wirkliche Einschränkung,[1] wenn wir annehmen, dass Lebensereignisse wie Invalidität oder Tod über das Jahr gleichverteilt sind:

Invarianzsatz für Anwartschaftsbarwerte 1.0.1:[2] *Anwartschaftsbarwerte laufender Renten mit gleichbleibender Rentenhöhe und determinierter Fälligkeit hängen nicht von der Zahlungsweise ab, wenn sowohl der Zeitpunkt des die Rente auslösenden Ereignisses als auch der Zeitpunkt des die Rente beendigenden Ereignisses innerhalb eines Jahres gleichverteilt sind.*

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind oft gegeben, so dass wir festhalten können: *Es genügt damit, diese Anwartschaftsbarwerte z.B. für jährliche Rentenzahlungen zu berechnen: damit sind sie für beliebige Zahlungsweisen gegeben.*[3] – Wir setzen für alle im weiteren betrachteten Lebensereignisse voraus, dass sie über ein Jahr gleichverteilt sind.

Bestimmte Inhalte der Pensionsversicherung werden oft in der Literatur unterschiedlich benannt wie beispielsweise das Dienstalter. Außerdem gibt es keine einheitliche oder überwiegend verwendete Notation wie etwa für den Barwert der Gesamtverpflichtung. Und zentrale Begriffe wie Altersrente sind

[1] Die Berechnung von unterjährigen Anwartschaftsbarwerten wird nur deshalb angegeben, weil diese Barwerte oft nur näherungsweise bestimmt werden können und dafür verschiedene Ansätze möglich sind.

[2] Neuburger 1990, S. 257 f.

[3] Neuburger 1990, S. 258.

inhaltlich nicht genau festgelegt. Dies bedeutet, dass die hier definierten oder explizierten Begriffe sowie die Schreibweise nicht unbedingt im Allgemeinen so verwendet werden.

Eine Pensionszusage kann auf sehr unterschiedliche Weise umgesetzt, durchgeführt werden. Dies hat auch zur Folge, dass es sehr viele verschiedene Finanzierungsverfahren gibt. Aus diesem Grunde werden wir uns nicht mit der Bruttoprämie beschäftigen, sondern nur fragen, wie viel Kapital bereitgestellt werden muss, um die zugesagten Pensionsleistungen auszahlen zu können. Hierbei werden wir uns auf das sogenannte Teilwertverfahren konzentrieren.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Pensionsversicherungsmathematik und der Rentenversicherungsmathematik als Teil der Lebensversicherungsmathematik besteht in der Ausscheideordnung. Zu der Ausscheideursache Tod der Lebensversicherung gibt es deutlich mehr Ausscheideursachen in der Pensionsversicherung wie Invalidität, Reaktivierung, Erreichen des Renteneintrittalters, Tod mit oder ohne Hinterbliebene.

Die Notation der Pensionsversicherungsmathematik richtet sich im Wesentlichen nach Heubeck 2018, S. 19 ff. Andere Autoren verwenden eine Ähnliche.[4] Die Darstellung der allgemeinen Wahrscheinlichkeitstheorie richtet sich nach Georgii 2015, die der Wahrscheinlichkeitstheorie der Lebensversicherung nach Schmidt 2009.

1.1 Pensionszusage

Der Begriff der Pension hat an sich folgende Bedeutung:

Explikation 1.1.1:[5] **Pension**, *Beamtenrecht: die Alters- und Hinterbliebenenversorgung von Beamten, Richtern, Soldaten und deren Angehörigen, besonders das Ruhegehalt.*

Innerhalb der Versicherungswirtschaft wird der Begriff „Pension" meist in einem anderen Sinne verwendet:

Explikation 1.1.2:[6] *Komplexere Leistungsversprechen in der Lebensversicherung, die nicht nur eine Risikoursache abdecken, fasst man unter dem Oberbegriff* ***Pension*** *zusammen. Eine Pension besteht demnach aus verschiedenen Komponenten, deren wohl wichtigste die Altersrente, die Hinterbliebenenrente (...) und die (...) Invaliditäts- bzw. Berufsunfähigkeitsrente darstellen. Die konkrete Gestaltung einer solchen Kombination heißt* ***Pensionszusage****.*

Pensionszusagen werden in der Regel von Arbeitgebern im Rahmen der

[4] Neuburger 1997,S. 40 ff.; Wolfsdorf 1997,S. 296 ff.
[5] Brockhaus Enzyklopädie 2006, Stichwort: Pension, Bd. 21, S. 179.
[6] Führer und Grimmer 2010, S. 194. Vgl. Neuburger 1997, S. 12.

betrieblichen Altersversorgung ausgesprochen.[7] Die betriebliche Altersversorgung ist in Deutschland gesetzlich geregelt (BetrAVG 2017). Wann liegt nach dem Gesetz eine betriebliche Altersversorgung vor?

Explikation 1.1.3:[8] **Betriebliche Altersversorgung (bAV)** – *Altersversorgung, die im Zusammenhang mit einem Arbeitsverhältnis aufgebaut wird. Gemäß §1 I S. 1 handelt es sich um eine bAV, wenn einem Arbeitnehmer Leistungen der Alters-, Invaliditäts- oder Hinterbliebenenversorgung aus Anlass seines Arbeitsverhältnisses zugesagt werden. Durch die Absicherung biometrischer Risiken unterscheidet sie sich von einer reinen renditeorientierten Kapitalbildung (z.B. von einem Tagesgeldkonto o.ä.). Zur Durchführung der bAV stehen fünf Durchführungswege zur Verfügung: die Direktzusage als unmittelbare Versorgungszusage des Arbeitgebers sowie die mittelbaren Versorgungszusagen per Direktversicherung, Pensionskasse, Pensionsfonds und Unterstützungskasse (rückgedeckt/pauschaldotiert).*

Hat ein Arbeitgeber eine Pension einem Mitarbeiter (Arbeitnehmer) zugesagt, dann eröffnet das Gesetz ihm fünf Möglichkeiten, sogenannte Durchführungswege, die Pensionszusage umzusetzen:

Explikation 1.1.4:[9] **Durchführungswege** der betriebliche Altersversorgung

(i) **Direktzusage** – *Bei der Direktzusage verpflichtet sich der Arbeitgeber gegenüber einem Arbeitnehmer, einer Gruppe von Arbeitnehmern oder der Gesamtheit der Arbeitnehmer im Versorgungsfall die versprochenen Leistungen direkt selbst zu erbringen. Dementsprechend kann die Direktzusage z.B. auf einem Einzelvertrag, einer Betriebsvereinbarung, einem Tarifvertrag, einer Besoldungsordnung oder einer Gesamtzusage (Pensionsordnung) beruhen. Die Mittelansammlung und Finanzierung erfolgt intern durch die handels- und steuerrechtliche Bildung von Pensionsrückstellungen gem. §249 HGB bzw. §6a EStG. Der Arbeitgeber ist somit Zusagender und Versorgungsträger in einer Person.*

(ii) **Direktversicherung** – *Der Arbeitgeber (Versicherungsnehmer) erfüllt sein Versorgungsversprechen, indem er einen Lebensversicherungsvertrag auf das Leben des Arbeitnehmers (versicherte Person) abgeschlossen hat* (...) . Bezugsberechtigt sind gegebenenfalls auch die Hinterbliebenen.

(iii) **Pensionskasse** – *Eine Pensionskasse ist ein rechtlich selbstständiges Lebensversicherungsunternehmen, dessen Zweck die Absicherung wegfallenden Erwerbseinkommens wegen Alters, Invalidität oder Tod ist* (...) .

[7]Vgl. Führer und Grimmer 2010, S. 195; Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Pensionszusage, S. 645.

[8]Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Betriebliche Altersversorgung, S. 139 f. Vgl. BetrAVG 2017, §1, §1b.

[9]Gabler Versicherungslexikon 2017, S. 233, 232, 643, 642, 954. Vgl. https://www.bafin.de/DE/Verbraucher/Versicherung/Produkte/bAV/bav_node.html, abgerufen am 5.1.2021.

(iv) **Pensionsfonds** – *Ein Pensionsfonds ist eine rechtsfähige Versorgungseinrichtung, die a) über das Kapitaldeckungsverfahren Leistungen der bAV erbringt, b) die Höhe der Leistungen und Beiträge nicht für alle vorgesehenen Leistungsfälle durch versicherungsförmige Garantien zusagen darf, c) den Arbeitnehmern einen eigenen Anspruch auf Leistungen gegen den Pensionsfonds einräumt und d) verpflichtet ist, die Altersversorgungsleistungen als lebenslange Zahlungen (...) zu erbringen.* Ein Pensionsfonds ist keine Versicherungsunternehmen.

(v) **Unterstützungskasse** – *Einrichtung, die aus Gründen der Solidarität und ohne einen Rechtsanspruch zu gewähren Unterstützungsleistungen erbringt. (...) Charakteristisch ist auch für die bAV über eine Unterstützungskasse der fehlende Rechtsanspruch auf die in Aussicht gestellten Versorgungsleistungen.* Der Arbeitnehmern hat nur einen Anspruch gegen den Arbeitgeber.

Bemerkung 1.1.5: Die Pensionszusage erfolgt oft nicht individuell, sondern über eine sogenannte **Pensionsordnung**, in der dann die Details der Pensionszusage wie die Höhe der Versorgungsleistungen geregelt sind.[10]

Die Durchführungswege betreffen die vertragliche Gestaltung; sie haben keine Auswirkungen auf die Kalkulation der Nettoprämie.

Aus einer Pensionszusage erworbene Ansprüche werden besonders bezeichnet:

Explikation 1.1.6: (i) **Anwartschaft** *Recht auf in der Zukunft fällige einmalige oder wiederkehrende Leistung, die auch vom Eintritt gewisser Ereignisse (biometrisches Risiko: Alter, Tod, Invalidität) abhängen kann. In der gesetzlichen Rentenversicherung (GRV) und in der betrieblichen Altersversorgung (bAV) werden die jeweils erworbenen Rentenansprüche als Anwartschaften bezeichnet.*[11]

(ii) **Unverfallbare Anwartschaft** *Leistungsgarantie im Rahmen der betrieblichen Altersversorgung (bAV), wonach der Arbeitnehmer seinen Anspruch auf die zugesagten Leistungen auch dann behält, wenn das Arbeitsverhältnis vor Eintritt des Versorgungsfalls endet.*[12]

Wieso handelt es sich bei der Pensionszusage überhaupt um eine Versicherung? Worin besteht das Risiko? Die wirtschaftliche — nicht die rechtliche[13] — Bedeutung des Begriffes „Versicherung“ ist ja folgende:

Explikation 1.1.7:[14] **Versicherung** *ist die Deckung eines im einzelnen ungewissen, insgesamt geschätzten Mittelbedarfs auf der Grundlage des Risikoausgleichs im Kollektiv und in der Zeit.*

[10] Vgl. Neuburger 1997, S. 15 ff.
[11] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Anwartschaft, S. 45.
[12] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Unverfallbare Anwartschaft, S. 955.
[13] Vgl. Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Versicherung, S. 991.
[14] Milbrodt und Helbig 1999, S. 2.

Die Ungewissheit liegt hier im „biometrischen Risiko“:

Explikation 1.1.8:[15] **Biometrisches Risiko** – *Ereignisse, die mit grundlegenden Veränderungen der biologisch bedingten Lebensverhältnisse einhergehen, also z.B. Geburt, Auftreten einer (bestimmten) Erkrankung, Invalidität bzw. Berufsunfähigkeit oder Erwerbsunfähigkeit, Eintritt von Pflegebedürftigkeit, Tod.*

Gewisse biometrische Risiken wie die Langlebigkeit[16] werden gedeckt durch die

Explikation 1.1.9:[17] **Pensionsversicherung** – *Versicherungsvertrag über eine Leibrente, die Komponenten der Hinterbliebenenversorgung, wie eine Witwen- oder Witwerrenten und auch eine Waisenrenten, einschließen kann. Bestimmte Formen der Pensionsversicherung werden im Rahmen des Einkommensteuerrechts gefördert.*

Wie sehen die einzelnen Komponenten, Bestandteile einer Pension aus? Die wichtigste Komponente der Pension ist die Altersrente. Was allerdings eine Altersrente im privatwirtschaftlichen Bereich ist, lässt die Literatur anscheinend offen. Gabler Versicherungslexikon 2017 beschreibt unter dem Stichwort „Altersrenten“ auf Seite 34 nur die gesetzliche Rente und legt mit Blick auf Explikation 1.1.3 auch nicht den Begriff der Altersversorgung inhaltlich fest. Wolfsdorf 1997 nennt den Begriff Altersrente (S. 292), sagt aber nicht, was darunter zu verstehen ist. Ebenso verhalten sich Führer und Grimmer 2010 auf Seite 194. Milbrodt und Helbig 1999, S. 140, 304, 307 und Neuburger 1997, S. 57 kennen den Begriff des Altersrentners, ohne näher darauf einzugehen.

Die Ausführungen zur Pensionsversicherung (Explikation 1.1.9) legen nun nahe, die Altersrente als spezielle Leibrente festzulegen. Aber Vorsicht: Der Begriff der Leibrente wird in der Literatur unterschiedlich verwendet.[18] Deshalb legen wir hier zunächst fest, was wir unter einer Leibrente verstehen wollen:

Explikation 1.1.10:[19] **Leibrente** – *Wiederkehrende Zahlung, die davon abhängig ist, ob eine oder mehrere Person(en), die vorab festgelegten Fälligkeiten erlebt (erleben). Allgemeine Regeln finden sich im BGB: Dauer und Betrag der Rente (§ 759) die Vorauszahlung (§ 760) und die Form des Leibrentenversprechens (§ 761).*

In der Regel handelt es sich bei der Altersrente um eine vorschüssige Leibrente:

[15] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Biometrisches Risiko, S. 159.
[16] Vgl. Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Private Rentenversicherung, S. 688.
[17] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Pensionsversicherung, S. 645.
[18] Vergleiche zum Beispiel Führer und Grimmer 2010, S. 27 f. und Wolfsdorf 1997, S. 123 f.
[19] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Leibrente, S. 546.

Explikation 1.1.11: Die **Altersrente** ist eine vorschüssig zahlbare lebenslange Leibrente.[20]

Eine Altersrente kann auch als aufgeschobene vorschüssig zahlbare lebenslange Leibrente festgelegt werden. Das hängt, wie wir noch sehen werden, vom Kontext, vom Blickwinkel ab.

Nun zu den weiteren Bestandteilen der Pensionsversicherung:

Explikation 1.1.12:[21] **Hinterbliebenenversorgung** – *Versorgung der Hinterbliebenen nach dem Tod des Versicherten in Form von Geldleistungen. Leistungsart in der gesetzlichen Rentenversicherung (GRV), der Beamtenversorgung, der betrieblichen Altersversorgung (bAV) und der Lebensversicherung einschl. der privaten Rentenversicherung. Zu den Hinterbliebenen zählen Ehepartner, eheliche, adoptierte und uneheliche Kinder sowie ggf. eingetragene Lebenspartner. (...) Die Hinterbliebenenversorgung besteht in seltenen Fällen aus Einmalzahlungen, i.d.R. aber aus laufenden Renten. Für Ehepartner wird zumeist eine lebenslange Witwen- oder Witwerrente gezahlt (Beamtenversorgung: Witwen- / Witwergeld), für Kinder eine temporäre Waisenrente bis zum Abschluss der Berufsausbildung, maximiert auf ein Höchstalter (Beamtenversorgung: Waisengeld). Gelegentlich wird auch für hinterlassene Kinder eine lebenslange Rente vereinbart, sofern sie nicht in der Lage sein werden, ihren Lebensunterhalt eigenständig zu verdienen.*

Bemerkung 1.1.13: Die gesetzliche Hinterbliebenenversorgung heißt **Hinterbliebenenrente**.[22]

Explikation 1.1.14:[23] **Waisenrente** – *Privatversicherung: Form der Hinterbliebenenrente, die zumeist im Rahmen der betrieblichen Altersversorgung (bAV) angeboten wird. Mit der Waisenrente wird im Fall des Todes der versicherten Person ihren leiblichen oder adoptierten Kindern eine Rente bis zu einem bestimmten Höchstalter gezahlt. Das Höchstalter kann abhängig von der Art der Ausbildung des Kindes gewählt werden. In seltenen Fällen wird auch eine lebenslange Waisenrente vereinbart, falls das Kind aufgrund gesundheitlicher Schädigungen voraussichtlich nicht in der Lage sein wird, seinen Unterhalt selbst zu verdienen.*

1.2 Pensionspersonenmodell

Das Pensionspersonenmodell legt fest, welche Personengruppen mit welchen Ausscheidursachen betrachtet werden. — Das zu betrachtende Pensionsper-

[20] Vgl. Schmidt 2009, S. 135; Wolfsdorf 1997, S. 123.

[21] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Hinterbliebenenversorgung, S. 410 f. Vgl. Führer und Grimmer 2010, S. 194.

[22] Vgl. Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Hinterbliebenenrente, S. 410.

[23] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Waisenrente, S. 1063. Vgl. Führer und Grimmer 2010, S. 195.

sonenmodell hängt natürlich von der vorgelegten Pensionszusage ab. — Als erstes müssen wir die Grundgesamtheit festlegen:

Explikation 1.2.1: (i) **Personengesamtheit** – *Gruppe von Personen, die sich durch bestimmte Merkmale (z.B. Bewohner einer Region, Mitarbeiter eines Unternehmens) auszeichnen.*[24]

(ii) Die **Personengesamtheit einer Pensionszusage** ist die Menge der Personen, die Versorgungsleistungen aufgrund der Pensionszusage erhalten können.

Durch verschiedene Lebensereignisse wie Heirat, Erreichen des **Renteneintrittsalters** (Regelaltersgrenze) oder Invalidität kann die Personengesamtheit einer Pensionszusage in Teilmengen zerlegt werden. Eine Teilmenge, die durch ein Lebensereignis gekennzeichnet ist, heißt **Nebengesamtheit**. Alle Personen der Personengesamtheit, die durch kein berücksichtigtes Lebensereignis gekennzeichnet sind, gehören zur **Hauptgesamtheit**. Sprechen wir von **Gesamtheit**, dann ist damit eine Neben- oder Hauptgesamtheit gemeint.

Beispiel 1.2.2:[25] Gemäß einer Pensionszusage gibt es Versorgungsleistungen bei Eintritt der Lebensereignisse Invalidität, Erreichen des Renteneintrittsalters und Tod. Dementsprechend gibt es die Nebengesamtheiten „Invalide“, „(Alters-)Rentner“ und „Hinterbliebene“. Die Hauptgesamtheit wird oft mit „Aktive“ bezeichnet, da viele Pensionszusagen gegenüber Mitarbeitern eines Unternehmens erfolgen. – Die Lebensereignisse werden auch als **Ausscheideursachen** bezeichnet. Dabei gibt es zwei Formen des Ausscheidens: Wechsel der Gesamtheit, etwa von der Nebengesamtheit Invalide in die Nebengesamtheit Rentner oder Ausscheiden aus der Personengesamtheit durch Tod.

Bemerkung 1.2.3: (i) Die Lebensereignisse sind biometrische Risiken.

(ii) Im Sinne der beschreibenden Statistik ist die Personengesamtheit einer Pensionszusage die Bestandsmasse und die Menge der Lebensereignisse, der Ausscheideursachen die Ereignismasse.[26]

Mit der Personengesamtheit und den Lebensereignissen können wir jetzt das Modell einer Pensionszusage bezüglich der Personen mit möglichen Versorgungsansprüchen festlegen:

Explikation 1.2.4: Das **Pensionspersonenmodell**[27] besteht aus der Personengesamtheit einer Pensionszusage und der Menge der Lebensereignisse.

[24] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Personengesamtheit, S. 649. Vgl. Wolfsdorf 1997, S. 49.

[25] Vgl. Heubeck 2018, S. 40; Neuburger 1997, S. 39; Wolfsdorf 1997, S. 298.

[26] Vgl. Schwarze 2014, S. 21 f.

[27] Das Pensionspersonenmodell wird auch als Bevölkerungsmodell bezeichnet. Diese Begriffswahl halte ich mit Blick auf die amtliche Statistik für wenig geeignet.

Entsprechend den verschiedenen Pensionszusagen gibt es verschiedene Pensionspersonenmodell, die sich oft dadurch unterscheiden, welche Lebensereignisse berücksichtigt werden und welche nicht. Es gibt Modelle mit Reaktivierung von Invaliden[28] oder ohne Hinterbliebenenversorgung[29] oder mit versorgungsberechtigten Waisen. Es gibt Modelle mit Ausscheiden aus der Personengesamtheit, sogenannte Fluktuation.[30]

Natürlich ist es möglich, für alle erdenklichen Schicksalsschläge Versorgungsleistungen vorzusehen. Der entscheidender Punkt dabei ist allerdings, den Barwert der Verpflichtung zu berechnen. Und dafür müssen Übergangswahrscheinlichkeiten statistisch geschätzt werden. Wir werden hier das Grundmodell der Richttafeln 2018, das sogenannte „Populationsmodell AKTIVE“[31] als Pensionspersonenmodell heranziehen, da für dieses Modell Übergangswahrscheinlichkeiten vorliegen. Hinzu kommt, dass viele Unternehmen es verwenden wohl auch aus dem Grund, dass die Richttafeln vom Bundesministerium der Finanzen anerkannt sind.[32]

Die wichtigsten Annahmen und Eigenschaften des Pensionspersonenmodells der Richttafeln sind:[33]

- Hauptgesamtheit Aktive, Nebengesamtheiten Invalide, Rentner, Hinterbliebene (Witwe, Witwer)
- Es werden nur Aktive mit unverfallbarer Anwartschaft betrachtet.[34]
- Aktive scheiden nur durch Tod aus der Personengesamtheit aus (keine Fluktuation).
- Zwillingsfreiheit: Eine Person kann nur von einer Gesamtheit in eine andere wechseln. Es zählt nur ein Lebensereignis.[35]
- Zyklenfreiheit: Eine Person kann aus einer Nebengesamtheit nicht zurück in die Hauptgesamtheit (keine Reaktivierung).

Bemerkung 1.2.5: (i) Setzen wir die Zwillingsfreiheit voraus, dann sind Haupt- und Nebengesamtheiten mathematisch eine Partition der Personengesamtheit.

[28] Vgl. Wolfsdorf 1997, S. 294 ff.

[29] Milbrodt und Helbig 1999, S. 334 ff.

[30] Vgl. Heubeck 2018, S. 41; Neuburger 1997, S. 45 f.

[31] Heubeck 2018, S. 40.

[32] BMF-Schreiben vom 16. Dezember 2005, Geschäftszeichen IV B 2 S 2176 106/05

[33] Es werden noch weitere Annahmen getroffen zur Verteilung der Austrittszeitpunkte, der Verzinsung und der Zahlung der Renten.

[34] Tritt ein Arbeitnehmer in ein Unternehmen mit Pensionsordnung ein, dann liegt Versorgungsberechtigung oft erst nach einer Wartezeit von etwa 10 Jahren vor. Diese Mitarbeiter gehören nicht zur Personengesamtheit.

[35] Ein Aktiver kann nicht gleichzeitig in die Nebengesamtheit Invalide und die Nebengesamtheit Rentner wechseln. Damit kommt eine Person in der Personengesamtheit nur einmal vor.

(ii) Die Zugehörigkeit einer Person der Personengesamtheit zu einer Gesamtheit legt auch den sogenannten **(Versorgungs-)Status** fest.[36] Beispielsweise hat eine Person, die zur Nebengesamtheit Invalide gehört, den Versorgungsstatus Invalider. Wir haben hier die Status Aktiver, Invalider, Rentner, Witwe oder Witwer.

Die Lebensereignisse, Ausscheideursachen der Richttafeln sind also Heirat, Invalidität, Erreichen des Renteneintrittsalters und Tod. Wir haben damit folgende Ausscheideursachen für die verschiedenen Gesamtheiten:

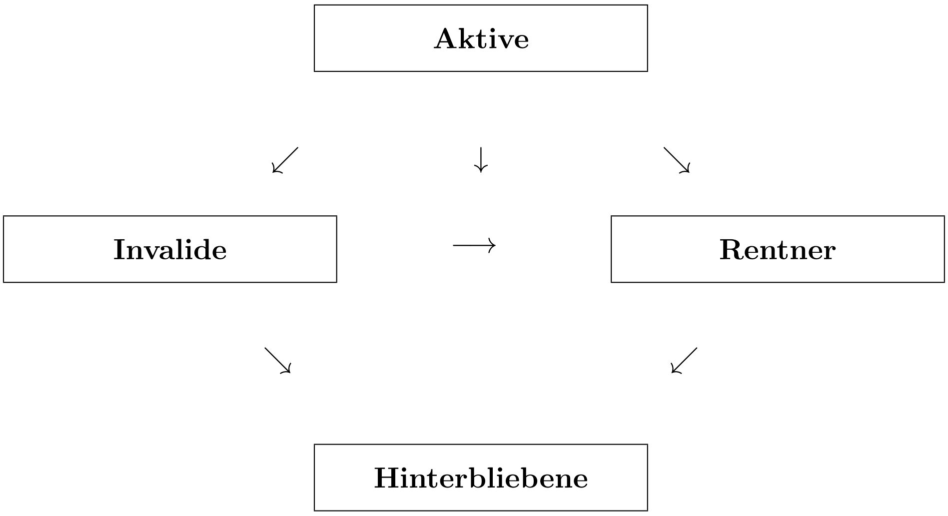
Gesamtheit	Ausscheideursache
Aktive	Tod als Aktiver ohne Hinterbliebene(n)
	Tod als Aktiver mit Hinterbliebene(n)
	Invalidität
	Erreichen des Renteneintrittsalters z
Invalide	Tod als Invalider ohne Hinterbliebene(n)
	Tod als Invalider mit Hinterbliebene(n)
	Erreichen des Renteneintrittsalters z
Rentner	Tod als Rentner ohne Hinterbliebene(n)
	Tod als Rentner mit Hinterbliebene(n)
Hinterbliebene	Tod

Ob eine Person einen Hinterbliebenen hinterlässt, wird mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit für „verheiratet“ berücksichtigt. Dadurch vereinfachen sich die Ausscheideursachen:

Gesamtheit	Ausscheideursache
Aktive	Tod als Aktiver
	Invalidität
	Erreichen des Renteneintrittsalters z
Invalide	Tod als Invalider
	Erreichen des Renteneintrittsalters z
Rentner	Tod
Hinterbliebene	Tod

Die Übergänge (Übertrittsmöglichkeiten), das Wechseln von einer Gesamtheit in eine andere lassen sich grafisch wie folgt darstellen:

[36] Vgl. Heubeck 2018, S. 43.



Der Begriff der Anwartschaft — vergleiche Explikation 1.1.6 — hat im Rahmen der Pensionszusage eine bestimmte Bedeutung und steht im Gegensatz zum sogenannten Anspruch:

Explikation 1.2.6:[37] Ein **Anspruch** einer Person der Personengesamtheit besteht, wenn ihr im aktuellen Versorgungsstatus eine Versorgungsleistung zusteht. Eine **Anwartschaft** einer Person der Personengesamtheit besteht, wenn ihr bei Änderung des Versorgungsstatus eine Versorgungsleistung zusteht.

Beispielsweise hat ein Invalider Anspruch auf die Invalidenrente und die Anwartschaften auf die Altersrente und die Hinterbliebenenrente. Ein Aktiver hat (in aller Regel)[38] nur Anwartschaften und keinen Anspruch. Ein Hinterbliebener hat keine Anwartschaften, aber einen Anspruch (auf Hinterbliebenenrente). Diese Unterscheidung ist für die Berechnung des Barwertes der Pensionsverpflichtung (Leistungsbarwert) wichtig.

Für das hier betrachtete Modell „Bevölkerungsmodell AKTIVE“ der Richttafeln liegen folgende Ansprüche und Anwartschaften vor:

Gesamtheit	Anspruch
Aktive	—
Invalide	Invalidenrente
Rentner	Altersrente
Hinterbliebene	Hinterbliebenenrente

[37] Vgl. Neuburger 1997, S. 57.
[38] Es gibt auch die Aktivenrente.

Gesamtheit	Anwartschaft
Aktive	Altersrente Invalidenrente Hinterbliebenenrente
Invalide	Altersrente Hinterbliebenenrente
Rentner	Hinterbliebenenrente
Hinterbliebene	—

Abschließend fassen wir noch die verschiedenen Ausscheideursachen begrifflich zusammen:

Definition 1.2.7: Sei $h \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Ausscheideursachen[39] und ${}_kp_x^{(i)}$ die **Verbleibewahrscheinlichkeit**[40] der Ausscheideursache i, $i = 1, \ldots, h$. Die Menge aller Verbleibewahrscheinlichkeiten heißt **Ausscheideordnung**.[41] Für $h = 1$ liegt eine **einfache Ausscheideordnung** vor, für $h > 1$ eine **zusammengesetzte Ausscheideordnung**.[42]

Bemerkung 1.2.8: Bei der Ausscheideursache Tod heißt die Verbleibewahrscheinlichkeit **Überlebenswahrscheinlichkeit**.[43]

1.3 Stochastisches Modell

Ausganspunkt ist das Äquivalenzprinzip, zunächst in der bekannten Formulierung der Lebensversicherung:[44]

$$\text{Prämienbarwert} = \text{Leistungsbarwert}$$

In der Sprache der Pensionsversicherung formuliert lautet das Äquivalenzprinzip

$$\text{Prämienbarwert} = \text{Barwert der (Pensions-)Gesamtverpflichtung.}$$

Mathematisch stehen links und rechts vom Gleichheitszeichen Erwartungswerte von Zufallsvariablen.

Eines der zentralen Ziele der Pensionsversicherungsmathematik ist es, den Barwert der Gesamtverpflichtung gegenüber einer x-jährigen Person zu

[39] Vgl. Beispiel 1.2.2.
[40] Vgl. Heubeck 2018, S. 42 f.
[41] Schmidt 2009, S. 112. Vgl. Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Ausscheideordnung, S. 80.
[42] Neuburger 1997, S. 37 ff.
[43] Vgl. Schmidt 2009, S. 112.
[44] Führer und Grimmer 2010, S. 58. Vgl. Schmidt 2009, S. 109.

bestimmen, der die allgemeine Form[45]

$$B_x := \sum_{t\geq 0;\ S} w_{x+t}^{(S)} \cdot v^t \cdot L_{x+t}^{(S)}$$

hat, wobei $v := 1/(1+i)$ der Diskontierungsfaktor ist und $w_{x+t}^{(S)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Person im Altersintervall $[x+t; x+t+1[$, also im Alter $x+t$, im Versorgungsstatus S eine Leistung erhält in Höhe von $L_{x+t}^{(S)}$ Euro. Die **Gesamtverpflichtung** erfasst also alle Leistungen der Pensionszusage. – Statt B_x wird auch die Notation B_x^L — L für Leistung — verwendet in Analogie zum Prämienbarwert B_x^P.

Wie bereits zum Anfang des Kapitels festgelegt, sollen die Leistungen hier grundsätzlich jährliche vorschüssige Renten mit gleichbleibend hohem Betrag sein, so dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass jährlich eine Rente in Höhe von 1 Euro gezahlt wird. Es geht im Folgenden also „nur" um die Schätzung der Wahrscheinlichkeiten. Dafür benötigen wir ein stochastische Modell, welches aus einem wahrscheinlichkeitstheoretischen und einem statistischen besteht.

1.3.1 Wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell

Da alle Versorgungsleistungen jährliche vorschüssige Renten sind, reicht es, wenn wir das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell der sofort beginnenden lebenslangen Leibrente betrachten. Wir gehen hier grundsätzlich nach Schmidt 2009, S. 107 ff. vor, wobei zu beachten ist, dass Schmidt 2009 unter lebenslanger Leibrente die sofort beginnende ewige Rente versteht und unter n-jähriger Leibrente die sofort beginnende lebenslange.[46]

Im Folgenden sei $((0,\infty), \mathcal{B}_{(0,\infty)}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $(0,\infty) \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{B}_{(0,\infty)}$ die Borelsche σ-Algebra auf $(0,\infty)$ ist.

Lemma 1.3.1:[47] *Für festes $k \in \mathbb{N}$ ist die Indikatorfunktion*

$$\chi_{(k,\infty)} : (0,\infty) \to \{0;1\},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in (k,\infty) \\ & \text{für} \\ 0 & x \notin (k,\infty) \end{cases}$$

eine Zufallsvariable von $((0,\infty), \mathcal{B}_{(0,\infty)})$ in den Messraum $(\{0;1\}, \mathcal{P}(\{0;1\}))$.

Definition 1.3.2:[48] Sei $w \in \mathbb{N}$ das **Schlussalter**.[49] Die Zufallsvariable

$$\Lambda : (0,\infty) \to (0,\infty),\ t \mapsto \sum_{k=0}^{w-1} v^k \cdot \chi_{(k,\infty)}(t)$$

[45] Heubeck 2018, S. 46. Vgl. Neuburger 1997, S. 52, (2.2.2)
[46] Vgl. Führer und Grimmer 2010, S. 36, S. 62; Wolfsdorf 1997, S. 16, S. 142 f.
[47] Vgl. Behnen und Neuhaus 2003, S. 195.
[48] Vgl. Schmidt 2009, S. 107, Beispiele 5.1.2.
[49] Vgl. Neuburger 1997, S. 38. Das Schlussalter entspricht in der Lebensversicherung dem Höchstalter ω, vergleiche Führer und Grimmer 2010, S. 46, Schmidt 2009, S. 123.

vom Messraum $((0,\infty),\mathcal{B}_{(0,\infty)})$ in den Messraum $((0,\infty),\mathcal{B}_{(0,\infty)})$ heißt **sofort beginnende lebenslange Leibrente** der Höhe ein Euro.

Bemerkung 1.3.3: (i) $\Lambda(t)$ soll die auf den Rentenbeginn abgezinste gesamte Versicherungsleistung (Rente) zum Zeitpunkt $t \in (0,\infty)$ der Person, die die Leibrente bis zum Tod bezieht, darstellen.
(ii) Betrachten wir nicht eine Rente der Höhe ein Euro, sondern der Höhe λ Euro, so beträgt die auf den Rentenbeginn abgezinste gesamte Versicherungsleistung $\lambda \cdot \Lambda$.

Da wir den Todeszeitpunkt eines Menschen nicht kennen, aber aus den Sterbetafeln über einen Durchschnittswert für die verbleibende Lebensdauer seines Jahrganges (als Schätzer) verfügen, ist es angezeigt, die Leibrente Λ in Abhängigkeit der verbleibenden Lebensdauer zu formulieren:

Definition 1.3.4: Sei $(\Omega,\mathcal{F},\tilde{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
(i) Die Zufallsvariable $T:\Omega \to (0,\infty)$ beschreibe die **Lebensdauer** eines Menschen.
(ii) Sei x das Alter eines Menschen. Dann stellt die Zufallsvariable

$$T_x : \Omega \to (0,\infty),\ \omega \mapsto \begin{cases} T(\omega)-x & \\ & \text{für} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} T(\omega)-x \geq 0 \\ \\ T(\omega)-x < 0 \end{matrix}$$

die **verbleibende Lebensdauer** des Menschen im Alter x dar.

Satz 1.3.5:[50] *Es gilt*

$$\Lambda(T_x(\omega)) = \sum_{k=0}^{w-1} v^k \cdot \chi_{(k,\infty)}(T_x(\omega)) \ .$$

Bemerkung 1.3.6: (i) $\Lambda(T_x(\omega))$ ist die auf den Rentenbeginn abgezinste gesamte Versicherungsleistung in Abhängigkeit von der Bezugsdauer — von Rentenbeginn bis zum Tod — der x-jährigen Person, die die Leibrente in Höhe von 1 Euro bezieht.
(ii) $\Lambda(T_x(\omega))$ ist der Funktionswert an der Stelle ω der Zufallsvariablen $\Lambda \circ T_x$.

Um den Erwartungswert der Versicherungsleistung $\Lambda \circ T_x$ angeben zu können — grob gesprochen die durchschnittliche Versicherungsleistung —, benötigen wir noch die Überlebenswahrscheinlichkeiten, die eine spezielle Ausscheideordnung bilden (vergleiche Definition 1.2.7):

Definition 1.3.7:[51] Die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, die die Leibrente bezieht, nach Rentenbeginn im Alter von x Jahren noch länger als k Jahre lebt, sei die bedingte Wahrscheinlichkeit

$${}_kp_x := \tilde{P}(k < T_x | 0 < T_x)$$

[50] Vgl. Schmidt 2009, S. 114, Lemma 5.3.1.
[51] Vgl. Schmidt 2009, S. 112.

für $x, k \in \mathbb{N}_0$. Sie heißt **k-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit (einer x-jährigen Person).**

Satz 1.3.8:[52] *Es gilt:*

$$\mathbb{E}(\Lambda \circ T_x) = \sum_{k=0}^{w-1} v^k \cdot {}_kp_x$$

Bemerkung 1.3.9: (i) $\mathbb{E}(\Lambda \circ T_x)$ ist der Erwartungswert der auf den Rentenbeginn abgezinste gesamte Versicherungsleistung in Abhängigkeit von der Bezugsdauer — von Rentenbeginn bis zum Tod — einer x-jährigen Person, die die Leibrente bezieht, und kann mit Hilfe der Überlebenswahrscheinlichkeit berechnet werden.

(ii) Üblicherweise wird in der Pensionsversicherungsmathematik die Notation

$$a_x := \mathbb{E}(\Lambda \circ T_x)$$

verwendet.[53] Sie ist angelehnt an die Notation des Leistungsbarwertes in der Lebensversicherungsmathematik,[54] siehe Abschnitt 3.1. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Art der Notation auch in der Rentenrechnung für den Rentenbarwertfaktor verwendet wird.[55]

Als Letztes wollen wir noch $\mathbb{E}(\Lambda \circ T_x)$ mit Kommutationswerten darstellen:

Definition 1.3.10:[56] Seien $T_1, T_2, \ldots, T_{l_0}$ unabhängige Zufallsvariablen, die alle wie die Lebensdauer T verteilt sind, also $P_{T_i} = P_T$ für $i = 1, 2, \ldots, l_0$. Der Erwartungswert

$$l_x := \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{l_0} \chi_{(x,\infty)} \circ T_i\right)$$

heißt **erwartete Zahl der das Alter $x > 0$ Überlebenden** oder kurz **Zahl der Lebenden**.

Bemerkung 1.3.11: l_0 interpretieren wir als die Größe eines Bestandes von Neugeborenen und T_i als die Lebensdauer der i-ten Person.

Lemma 1.3.12:[57] *Für alle $x, k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x} \quad \textit{und} \quad v^k \cdot {}_kp_x = \frac{v^{x+k} \cdot l_{x+k}}{v^x \cdot l_x}.$$

[52] Schmidt 2009, S. 117.
[53] Vgl. Neuburger 1997, S. 50.
[54] Vgl. Milbrodt und Helbig 1999, S. 210; Wolfsdorf 1997, S. 313.
[55] Vgl. Führer und Grimmer 2010, S. 34.
[56] Vgl. Schmidt 2009, S. 119.
[57] Schmidt 2009, S. 120.

Definition 1.3.13:[58] Für $x \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$D_x := v^x \cdot l_x$$

abgezinste Zahl der Lebenden (des Alters x**)** oder auch **diskontierte Lebende (des Alters** x**)** und

$$N_x := \sum_{j=0}^{w-x} D_{x+j}$$

summierte abgezinste Zahl der Lebenden oder auch **Summe der diskontierten Lebenden**.

Nun können wir $\mathbb{E}(\Lambda \circ T_x)$ mit Kommutationswerten darstellen:

Satz 1.3.14:[59] *Es gilt*

$$\mathbb{E}(\Lambda \circ T_x) = \frac{N_x}{D_x} \; .$$

1.3.2 Statistisches Modell

Ziel dieses Abschnittes ist es, die diskontierten Lebenden zu schätzen. Dafür ist ein statistisches Modell anzugeben, etwa $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, P_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ bestehend aus einem Stichprobenraum $\mathcal{X}$, einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{X}$ und einer mindestens zweielementigen Klasse $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, die mit einer gewissen Indexmenge Θ indiziert sind.[60] Ein derartiges Modell ist uns für diskontierte Lebende nicht bekannt. Wir beschränken uns hier deshalb auf die Benennung der Schätzer.

Die Schätzer $\hat{D}_x$ der diskontierte Lebenden D_x berechnen sich bei Vorgabe des Zinssatzes aus den Schätzern $\hat{l}_x$, die die sogenannten Absterbeordnung darstellen sollen:

Explikation 1.3.15:[61] **Absterbeordnung** – *Regel, nach der sich die Anzahl der erwarteten Todesfälle je Altersgruppe einer Personengesamtheit in einem vorgegebenen Zeitraum bestimmen lässt.*

Die Schätzer $\hat{l}_x$ werden meist beispielhaft anhand eines Ausgangsbestandes angegeben (beachte Bemerkung 1.3.11):

> *Ausgehend von 100 000 fiktiven männlichen bzw. weiblichen Lebendgeborenen, der sogenannten „Sterbetafelbevölkerung“, wird dann ermittelt, wie viele Personen des Ausgangsbestandes in einem*

[58] Schmidt 2009, S. 121. Vgl. Führer und Grimmer 2010, S.67.

[59] Vgl. Schmidt 2009, S. 122, Beispiel 5.4.5 (2). Beachte, dass $N_x := \sum_{j=0}^{\infty} D_{x+j}$ ist.

[60] Vgl. Georgii 2015, S. 214.

[61] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Absterbeordnung, S. 7. Vgl. Statistisches Bundesamt 2015, S. 10.

> *bestimmten Alter unter den aktuellen Sterblichkeitsverhältnissen (hier 2010/12) noch leben würden. Dies sind die „Überlebenden im Alter x“, bezeichnet als l_x.*[62]

Hier ist also $\hat{l}_0 = l_0 := 100.000$. – $\hat{l}_x$ ist Teil der Sterbetafel:

Explikation 1.3.16: (i) *Eine **Sterbetafel** ist ein demografisches Modell, das die zusammenfassende Beurteilung der Sterblichkeitsverhältnisse einer Bevölkerung unabhängig von ihrer Größe und Altersstruktur ermöglicht.*[63]

(ii) **Sterbetafel** – *Instrument zur vollständigen statistischen Beschreibung der Mortalität einer Bevölkerung bzw. einer Versichertenpopulation. Auf der Grundlage von beobachteten Sterbefällen wird die Entwicklung einer konstruierten (Sterbetafel-) Bevölkerung in ihrem gesamten Lebenszyklus dargestellt und veranschaulicht.*[64]

Ein kleiner Auszug aus der Sterbetafel 2011/12 für Frauen:[65]

Vollendetes Alter in Jahren	Sterbe- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis $x+1$	Überlebens- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis $x+1$	Überlebende im Alter x
x	q_x	p_x	l_x
0	0,00312728	0,99687272	100 000
1	0,00024177	0,99975823	99 687
2	0,00017271	0,99982729	99 663
3	0,00013287	0,99986713	99 646
⋮		⋮	
60	0,00525300	0,99474700	94 291
⋮		⋮	
100	0,36215788	0,63784212	1 762

Nur zum Vergleich: Sterbetafel 1871/81 Frauen[66]

x	q_x	p_x	l_x
60	0,03285	0,96715	36 293
⋮		⋮	
100	0,51800	0,48200	3

[62] Statistisches Bundesamt 2015, S. 10.
[63] Statistisches Bundesamt 2015, S. 5.
[64] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Sterbetafel, S. 873.
[65] Statistisches Bundesamt 2015, S. 50.
[66] Statistisches Bundesamt 2012, S. 10.

und Sterbetafel 1960/62 Frauen[67]

x	q_x	p_x	l_x
60	0,01085	0,98915	85 484
$\vdots$		$\vdots$	
100	0,38047	0,61953	142

Bemerkung 1.3.17: Die Zahl der Lebenden berechnet sich nach Lemma 1.3.12. Beispielsweise ist

$$\hat{l}_3 = {}_1\hat{p}_2 \cdot \hat{l}_2 = 0{,}99982729 \cdot 99663 = 99645,7872\ ,$$

gerundet 99646.

Zur generellen Vorgehensweise zur Erstellung von Ausscheideordnungen beachte Kakies [u.a.] 1985 und Milbrodt und Röhrs 2016, S.149 ff. Für Fragen zur Durchführung der Schätzung der diskontierten Lebenden für die verschiedenen Gesamtheiten bei Pensionszusagen verweisen wir auf Heubeck 2018 Teil A „Herleitung der biometrischen Grundwerte“.

1.4 Aussagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

In diesem Abschnitt führen wir Aussagen der Wahrscheinlichkeitstheorie an, mit denen in der Pensionsversicherungsmathematik immer wieder argumentiert wird. – Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung 1.4.1: Es gelten die Kolmogorovschen Axiome für $P : \mathcal{F} \to [0;1]$:[68]

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)\ .$$

Hieraus folgt für $A \in \mathcal{F}$:

(iii) $P(A) = 1 - P(A^c)$

Satz 1.4.2:[69] *Seien $Y_1, \dots, Y_n$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit der Eigenschaft, dass jedes Y_i einen abzählbaren Wertebereich Ω_i hat. Genau dann sind $Y_1, \dots, Y_n$ stochastisch unabhängig, wenn für beliebige $\omega_i \in \Omega_i$*

$$P(Y_1 = \omega_1, \dots, Y_n = \omega_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = \omega_i)$$

[67] Statistisches Bundesamt 2012, S. 42.
[68] Vgl. Georgii 2015, S. 13.
[69] Georgii 2015, S. 75, Korollar 3.21 a).

gilt.

Satz 1.4.3:[70] *Sei* $X : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ *eine Zufallsvariable, die (diskret) gleichverteilt ist. Dann gilt*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \ .$$

1.5 Rechenregeln für Überlebenswahrscheinlichkeiten

Die folgenden Rechenregeln sind den Lebensereignissen geschuldet, die in der Regel nicht zum Jahresbeginn eintreten. Zur Darstellung des unterjährigen Eintritts von Lebensereignissen benötigen wir Bruchteile der Wahrscheinlichkeit. Und da diese Bruchteile nicht tabelliert sind, etwa in der Sterbetafeln nicht vorkommen, sind sie in ganzzahlige Alter umzurechnen.

Der Invarianzsatz für Anwartschaftsbarwerte 1.0.1 legt die Annahme nahe, dass die Lebensereignisse über das Jahr gleichverteilt sind, wovon wir ausgehen wollen.

Im Folgenden wird das Lebensereignis Tod betrachtet. Die Aussagen gelten entsprechend für andere Ausscheideursachen.

Mit der Bezeichnung $p_x := {}_1p_x$ für die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit gilt:

Lemma 1.5.1:[71] *Für alle* $x, s \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$${}_sp_x = \prod_{j=0}^{s-1} p_{x+j} \ .$$

Diese Formel ist ein Spezialfall der allgemeinen Aussage in mehrstufigen Modellen, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit das Produkt der Übergangswahrscheinlichkeiten ist, vergleiche Georgii 2015, S. 64 f., Satz 3.8.

Lemma 1.5.2:[72] *Für alle* $x, s, t \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$${}_{s+t}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} \ .$$

Um einen Bruchteil der Überlebenswahrscheinlichkeit mit ganzzahligen Altern berechnen zu können, benötigen wir die Sterbewahrscheinlichkeit:

[70] Behnen und Neuhaus 2003, S. 86, Beispiel 7.4 a).

[71] Neuburger 1997, S. 39, (1.1.1). Vgl. Schmidt 2009, S. 113, Lemma 5.2.6.

[72] Vgl. Neuburger 1997, S. 39, (1.1.2). Beachte Schmidt 2009, S. 113, Lemma 5.2.5 sowie S. 114, Aufgabe 5.2.B.

Definition 1.5.3:[73] Die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, die die Leibrente bezieht, nach Rentenbeginn im Alter von x Jahren noch höchstens k Jahre lebt, sei die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$_kq_x := \tilde{P}(T_x \leq k | 0 < T_x)$$

für $x, k \in \mathbb{N}_0$. Sie heißt **k-jährige Sterbewahrscheinlichkeit (einer x-jährigen Person)**. Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit $q_x := {}_1q_x$.

Bemerkung 1.5.4: Wegen Bemerkung 1.4.1 gilt $_kp_x = 1 - {}_kq_x$.[74]

Korollar 1.5.5: *Für alle $x, s, t \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(1 -_{s+t} q_x) = (1 - {}_sq_x) \cdot (1 - {}_tq_{x+s}) \ .$$

Der Erwartungswert des über das Jahr gleichverteilten Lebensereignisses Tod ist gemäß Satz 1.4.3 die Jahresmitte. Dies bedeutet, dass wir die Überlebenswahrscheinlichkeit „lebt noch im zweiten Halbjahr“, formal

$$_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}$$

für die Berechnung der Ausscheidewahrscheinlichkeit benötigen. – Die **Ausscheidewahrscheinlichkeit** ist die Wahrscheinlichkeit, von einer Gesamtheit zu einer anderen zu wechseln, wobei es auch die Gesamtheit „Tote“ gibt.[75]

Das Problem besteht nun darin, dass einerseits halbjährliche Überlebens- wie Sterbewahrscheinlichkeiten bisher nicht definiert worden sind und andererseits keine Schätzer dafür vorliegen. Da $_kp_x$ und $_kq_x$ für $x, k \in \mathbb{N}_0$ definiert ist, können x und k auch für Tage stehen. Es ist sogar eine stetige Betrachtung, also $x, k \in \mathbb{R}^+$ möglich, vergleiche Neuburger 1997, S. 37 ff. Da wir mit unterjährigen Wahrscheinlichkeiten nicht rechnen werden — für diese liegen ja keine Schätzer vor —, reicht es hier völlig aus zu wissen, dass $_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}$ definiert ist und die obigen Rechenregeln gelten.

Mit Lemma 1.5.2 und Bemerkung 1.5.4 gilt

$$1 - q_x =_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} p_x =_{\frac{1}{2}} p_x \cdot {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} = (1 - {}_{\frac{1}{2}}q_x) \cdot {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} \ ,$$

insgesamt also

Lemma 1.5.6: *Es gilt*

$$_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1 - q_x}{1 - {}_{\frac{1}{2}}q_x} \ .$$

[73] Vgl. Schmidt 2009, S. 112 f.

[74] Vgl. Schmidt 2009, S. 114.

[75] Die Gesamtheit „Tote“ wird im Modell der Richttafeln nicht gesondert aufgeführt, wohl aber berücksichtigt. Sie umfasst beispielsweise alle gestorbenen Aktiven ohne Hinterbliebene oder alle gestorbenen Hinterbliebenen.

${}_{\frac{1}{2}}q_x$ müssen wir jetzt noch mit ganzzahligen Altern schätzen. Dafür ziehen wir wieder die Gleichverteilungsannahme bezüglich der Verteilung des Lebensereignisses Tod über das Jahr heran. Für $t \in \{\frac{1}{365}, \ldots, \frac{365}{365}\}$ gilt dann[76]

$$ {}_{t}q_x = t \cdot q_x \ . $$

Wir erreichen unser Ziel der Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeit „lebt noch im zweiten Halbjahr“:[77]

Lemma 1.5.7: *Ist das Lebensereignis Tod über das Jahr gleichverteilt, dann gilt*

$$ {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1 - q_x}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x} \ . $$

Die halbjährige Überlebenswahrscheinlichkeit kann also unter der Annahme, dass das Lebensereignis Tod über das Jahr gleichverteilt ist, mit ganzzahligem Alter berechnet werden und die Schätzer dafür liegen in der Sterbetafel, allgemein in der Ausscheideordnung vor.

Gemäß Bemerkung 1.5.4 ist die Sterbewahrscheinlichkeit „stirbt im zweiten Halbjahr“

$$ {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}} $$

und lässt sich wie folgt berechnen:

Korollar 1.5.8: *Ist das Lebensereignis Tod über das Jahr gleichverteilt, dann gilt*

$$ {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot q_x}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x} \ . $$

1.6 Rechnungsgrundlagen

Die Pensionsversicherung hat zum Ziel, verschiedene biometrische Risiken abzusichern – vergleiche die Ausführungen zur Explikation 1.1.8. Das Pensionspersonenmodell legt fest, welche biometrischen Risiken berücksichtigt werden. Dementsprechend hängen die Rechnungsgrundlagen vom betrachteten Pensionspersonenmodell ab.

Bevor wir die Rechnungsgrundlagen angeben, möchten wir den Begriff erklären:

Explikation 1.6.1:[78] **Rechnungsgrundlagen** - *Parameter zur Berechnung von Prämien und Deckungsrückstellungen in der Personenversicherung. Als Rechnungsgrundlagen sind im Einzelnen die Ausscheidewahrscheinlichkeiten*

[76] Vgl. Neuburger 1999, S. 111, (1); Gerber 1986, S. 22, (6.2) sowie S. 75, (3.4).
[77] Beachte Neuburger 1990, S. 265.
[78] Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Rechnungsgrundlagen, S. 730.

(vgl. auch Sterbetafel, Invalidentafel etc.), der Rechnungszins und die Zuschläge für Abschluss- und Verwaltungskosten maßgeblich. Die Rechnungsgrundlagen gehen als Eingangsgrößen in die Formeln für die Prämien- und Rückstellungsberechnungen ein.

Das hier betrachtete Pensionspersonenmodell „Bevölkerungsmodell AKTIVE“ der Richttafeln erfordert folgende Rechnungsgrundlagen:

- Rechnungszins
- Sterblichkeitwahrscheinlichkeit für jede Gesamtheit
- Wahrscheinlichkeit, verheiratet zu sein
- Invalidisierungwahrscheinlichkeit
- Wahrscheinliches Alter des Hinterbliebenen
- Zuschläge
- Kosten

2 Verbleibe- und Übergangswahrscheinlichkeiten

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist ein wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriff im mehrstufigen Modell[1] und entspricht hier der Ausscheidewahrscheinlichkeit, also der Wahrscheinlichkeit, eine Gesamtheit zu verlassen. Beide Begriffe, Übergangswahrscheinlichkeit und Ausscheidewahrscheinlichkeit werden für den Wechsel der Gesamtheit verwendet.

2.1 Grundlegende Bezeichnungen

Sei x das Alter eines Mannes, y das Alter einer Frau. — Zur Bestimmung des Alters siehe Abschnitt 4.3. — Alle altersabhängigen Wahrscheinlichkeiten beziehen sich auf den Zeitraum $[x; x+1[$ beziehungsweise $[y; y+1[$. So bedeutet beispielsweise h_x die Wahrscheinlichkeit für einen Mann, bei Tod im Zeitraum $[x; x+1[$ verheiratet zu sein.

Im Folgenden werden die Wahrscheinlichkeiten und später die Barwerte nur für Männer angegeben. Für Frauen gelten die Bezeichnungen und Berechnungen entsprechend durch Ersetzen von x mit y.

Die folgenden Symbole finden sich in Heubeck 2018, S. 20:

Symbol	Bedeutung
$z \leq 75$	Schlussalter für Aktive und Invalide
$w := 115$	Schlussalter für Altersrentner und Witwen, Witwer
i	Rechnungszins (als Dezimalzahl)
$v := 1/(1+i)$	Diskontierungsfaktor
h_x	Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Mann, bei Tod verheiratet zu sein.
$y(x)$	Alter der Witwe zu Beginn des Todesjahres des Mannes, der im Alter x gestorben ist.

Die folgenden Bezeichnungen sind Heubeck 2018, S. 19 f. und S. 41 ent-

[1] Behnen und Neuhaus 2003,S. 39 f.

nommen:

Gesamtheit	Ausscheideursache	Notation der Wahrscheinlichkeit
Aktive	Tod als Aktiver	q_x^{aa}
	Invalidität	i_x
	Erreichen des Renteneintrittsalters z	—
Invalide	Tod als Invalider	q_x^i
	Erreichen des Renteneintrittsalters z	—
Rentner	Tod	q_x^r
Hinterbliebene	Tod	q_x^w

Die folgenden Symbole für die Zahl der Lebenden führt im Wesentlichen[2] Heubeck 2018 auf Seite 20 auf:

Symbol	Bedeutung
l_x^a	Anzahl der Aktiven des Alters x, $20 \leq x \leq z$ $l_{20}^a = 100.000$
l_x^i	Anzahl der Invaliden des Alters x, $20 \leq x \leq z$ $l_{20}^i = 100.000$
l_x^r	Anzahl der Altersrentner des Alters x, $z \leq x < w$ $l_z^r =$ Anzahl der lebenden Altersrentner und Invaliden des Alters z
l_x^w	Anzahl der Witwer des Alters x, $20 \leq x \leq w$ $l_{20}^w = 100.000$

2.2 Wahrscheinlichkeiten

Für die Anzahl der Lebenden gilt mit Lemma 1.3.12 und Bemerkung 1.4.1, (iii):

Lemma 2.2.1:[3] *Es gilt:*

$$\begin{aligned} l_{x+1}^a &= l_x^a \cdot (1 - q_x^{aa} - i_x) \quad , \qquad & l_{x+1}^i &= l_x^i \cdot (1 - q_x^i) \\ l_{x+1}^r &= l_x^r \cdot (1 - q_x^r) \quad , \qquad & l_{x+1}^w &= l_x^w \cdot (1 - q_x^w) \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Verbleibewahrscheinlichkeiten:

[2]Wir verwenden die Notation der Richttafeln 1998.

[3]Vgl. Heubeck 2018, S. 20.

Lemma 2.2.2:[4] *Es gilt:*

Gesamtheit am Beginn des Jahres	Gesamtheit am Ende des Jahres	Verbleibe-, Übergangs-wahrscheinlichkeiten	Alter
Aktive	Aktive	$1 - q_x^{aa} - i_x$	$x < z - 1$
	Invalide	$i_x \cdot \frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}\cdot q_x^i}$	$x < z - 1$
	Rentner	$1 - q_x^{aa} - i_x + i_x \cdot \frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}\cdot q_x^i}$	$x = z - 1$
	Hinterbliebene	$\left(q_x^{aa} + i_x \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot q_x^i}{1-\frac{1}{2}\cdot q_x^i}\right) \cdot h_x \cdot \frac{1-q_y^w}{1-\frac{1}{2}\cdot q_y^w}$	$x < z$
Invalide	Invalide	$1 - q_x^i$	$x < z - 1$
	Rentner	$1 - q_x^i$	$x = z - 1$
	Hinterbliebene	$q_x^i \cdot h_x \cdot \frac{1-q_y^w}{1-\frac{1}{2}\cdot q_y^w}$	$x < z$
Rentner	Rentner	$1 - q_x^r$	$z \leq x \leq w$
	Hinterbliebene	$q_x^r \cdot h_x \cdot \frac{1-q_y^w}{1-\frac{1}{2}\cdot q_y^w}$	$z \leq x \leq w$
Hinterbliebene	Hinterbliebene	$1 - q_y^w$	$y \leq w$

Bemerkung 2.2.3: Einige Erläuterungen zu den Wahrscheinlichkeiten in Lemma 2.2.2:

(i) Grundlegend ist unsere Annahme, dass die Lebensereignisse über das Jahr gleichverteilt sind. Damit ist der Erwartungswert des Eintritts eines Lebensereignisses die Jahresmitte. Vergleiche hierzu die Ausführungen vor Lemma 1.5.6.

(ii) Ein Aktiver bleibt in dem Jahr Aktiver (p_x^{aa}), wenn er nicht stirbt (q_x^{aa}) und nicht invalide wird (i_x), also:

$$p_x^{aa} = 1 - q_x^{aa} - i_x$$

(iii) Ein Aktiver wird in dem Jahr Invalider (i_x)und darf als Invalider nicht sterben (Zwillingsfreiheit) (${}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}{}^{i}$). Dementsprechend ist mit Lemma 1.5.7 und Satz 1.4.2

$$i_x \cdot \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^i} \ .$$

(iv) Ein Aktiver wird in dem Jahr Rentner und zwar entweder als Aktiver oder als Invalider, also

$$\left(1 - q_x^{aa} - i_x\right) + \left(i_x \cdot \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^i}\right) \ .$$

(v) Es gibt zwei Fälle, dass Hinterbliebene eines Aktiven Versorgungsleistungen erhalten: 1. Der Aktive stirbt als Verheirateter und die Witwe lebt

[4] Heubeck 2018, S. 42 f.: Aktive entsprechen externen Aktiven.

in dem Jahr:

$$q_x^{aa} \cdot h_x \cdot \frac{1 - q_y^w}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_y^w}$$

2. Ein Aktiver stirbt als verheirateter Invalider und die Witwe lebt in dem Jahr – beachte Korollar 1.5.8:

$$i_x \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot q_x^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^i} \cdot h_x \cdot \frac{1 - q_y^w}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_y^w}$$

Für beide Aussagen ist Satz 1.4.2 heranzuziehen.

3 Barwert der Gesamtverpflichtung

In diesem Kapitel wollen wir den Barwert der Gesamtverpflichtung — vergleiche Abschnitt 1.3 —

$$B_x = \sum_{t \geq 0;\ S} w_{x+t}^{(S)} \cdot v^t \cdot L_{x+t}^{(S)}$$

im Rahmen unseres Pensionspersonenmodells „Populationsmodell AKTIVE“ — beachte Abschnitt 1.2 — berechnen.

Für die folgenden Wahrscheinlichkeiten gibt es in den Richttafeln (Heubeck 2018) auf den Seiten 90 ff. Schätzer für Frauen wie Männer:

$$h_x,\ q_x^{aa},\ i_x,\ q_x^i,\ q_x^r,\ q_x^w$$

Sie können zur Berechnung der in diesem Kapitel aufgeführten Barwerte herangezogen werden.

3.1 Notation

In der Lebensversicherungsmathematik sind die Symbole üblicher Weise folgendermaßen aufgebaut:[1]

$${}_{\text{Dauer}}\text{Grundsymbol}_{\substack{\text{Alter, Reihenfolge}}}^{\text{Zahlungsweise}}$$

Beispielsweise ist

$${}_n p_x$$

die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes, das Alter $x+n$ zu erreichen.

In der Pensionsversicherungsmathematik wird eine ähnliche Notation verwendet:[2]

$${}_{\text{Dauer}}^{\text{Zahlungsweise}}\text{Grundsymbol}_{\text{Alter, Geschlecht}}^{\text{Gesamtheit, Übergang}}$$

[1] Vgl. Milbrodt und Helbig 1999, S. 17 f. Beachte auch Führer und Grimmer 2010,S. 34, S. 64 f.

[2] Vgl. Heubeck 2018, S. 20 ff. Beachte Neuburger 1997, Kapitel 2, Abschnitt 2.

Beispielsweise ist

$$a_y^{rw}$$

der Barwert der Anwartschaft einer y-jährigen Rentnerin auf eine lebenslänglich vorschüssig zahlbare Witwerrente.

3.2 Kommutationswerte

Zur Darstellung der Barwerte werden folgende Kommutationswerte benötigt – beachte Definition 1.3.13:[3]

$$\begin{aligned}
D_x^a &:= v^x \cdot l_x^a & \qquad N_x^a &:= \sum_{k=0}^{z-x-1} D_{x+k}^a \\
D_x^i &:= v^x \cdot l_x^i & \qquad N_x^i &:= \sum_{k=0}^{z-x-1} D_{x+k}^i \\
D_x^r &:= v^x \cdot l_x^r & \qquad N_x^r &:= \sum_{k=0}^{w-x} D_{x+k}^r \\
D_x^w &:= v^x \cdot l_x^w & \qquad N_x^w &:= \sum_{k=0}^{w-x} D_{x+k}^w
\end{aligned}$$

3.3 Barwerte

Die Reihenfolge der Darstellung der Barwerte für Ansprüche und Anwartschaften ergibt sich aus ihrer Abhängigkeit. Beispielsweise benötigt der Barwert der Anwartschaft eines Invaliden auf Hinterbliebenenrente a_x^{iw} den Barwert der Anwartschaft eines Rentners auf Hinterbliebenenrente a_x^{rw}. Dementsprechend wird erst a_x^{rw} berechnet, danach a_x^{iw}. – Zu den Begriffen Anspruch und Anwartschaft siehe Explikation 1.2.6.

Grundlage zur Berechnung der Barwerte ist der Barwert der jährlichen Leibrente in Höhe von 1 Euro in Abhängigkeit von der Bezugsdauer — von Rentenbeginn bis zum Tod — der x-jährigen Person gemäß Satz 1.3.14

$$a_x = \mathbb{E}(\Lambda \circ T_x) = \frac{N_x}{D_x} \ .$$

Alle hier aufgeführten Barwerte beziehen sich auf die jährliche Leistung in Höhe von 1 Euro im Jahr. – Die Berechnungsformeln finden sich Heubeck 2018, S. 23 ff.

Diverse Annahmen fließen in die Berechnung der Barwerte ein, die von Barwert zu Barwert auch unterschiedlich sein können. Einige Annahmen wie

[3] Vgl. Heubeck 2018, S. 23 ff.

die Gleichverteilungsannahme bezüglich der Verteilung einer Ausscheideursache, also dass die Lebensereignisse über das Jahr gleichverteilt sind, haben wir angeführt, andere wie die Verzinsungsart oder die Methodenart bei der Hinterbliebenenrente[4] nicht. Die mathematisch exakte Darstellung würde hier den Rahmen sprengen. Deshalb geben wir die Berechnungsformeln nicht als mathematische Aussagen, etwa als Satz an.

3.3.1 Anspruch

In diesem Abschnitt werden die Barwerte von Ansprüchen dargestellt. Ein Anspruch liegt vor, wenn es sich um eine laufende Rente handelt, vergleiche Explikation 1.2.6.

Barwert einer längstens $z - x$ Jahre lang an einen x-jährigen Invaliden vorschüssig zahlbaren Invalidenrente:

$$a^i_{x\ \overline{z-x|}} = \frac{N^i_x}{D^i_x}$$

Barwert einer lebenslang an einen x-jährigen Altersrentner vorschüssig zahlbaren Altersrente:

$$a^r_x = \frac{N^r_x}{D^r_x}$$

Barwert einer lebenslang an einen x-jährigen Witwer vorschüssig zahlbaren Witwerrente:

$$a^w_x = \frac{N^w_x}{D^w_x}$$

3.3.2 Anwartschaft

Im Gegensatz zum Anspruch, der auf einer laufenden Rente basiert, beschäftigen wir uns hier mit Renten, auf die eine Anwartschaft besteht. Damit aus der Anwartschaft eine Anspruch wird, muss erst ein Wechsel in die entsprechende Gesamtheit erfolgen. Dies hat zur Folge, dass es einen strukturellen Unterschied zwischen dem Barwert eines Anspruches und dem Barwert einer Anwartschaft gibt: Die Leistung L_x für einen x-Jährigen ist beim Anspruch 1 Euro. Bei der Anwartschaft ist die Leistung der Barwert der Rente und diese ändert sich von Jahr zu Jahr. Wohl gemerkt: Die Leistung der jeweiligen Rente ist immer noch 1 Euro.

Beispiel 3.3.1: Die Rentnerin Charlotte bezieht eine Betriebsrente in Höhe von 1 Euro. Wenn sie stirbt, erhält ihr Mann Theodor eine Witwerrente in Höhe von 1 Euro. Stirbt Charlotte mit 70 Jahren, dann ist der Barwert der Witwerrente für Theodor deutlich größer, als wenn Charlotte mit 90 Jahren stürbe: Die Wahrscheinlichkeit, dass Theodor beim Tod von Charlotte mit

[4] Vgl. Milbrodt und Helbig 1999, S. 304 ff.

70 Jahren länger lebt und damit länger Witwerrente bezieht als beim Tod von Charlotte mit 90 Jahren, ist deutlich größer.

Was bedeutet dies für die Berechnung des Barwertes einer Anwartschaft? Nach Satz 1.3.8 gilt für den Barwert einer lebenslangen Leibrente in Höhe von 1 Euro — Barwert eines Anspruchs —

$$a_x = \mathbb{E}(\Lambda \circ T_x) = \sum_{k=0}^{w-1} v^k \cdot {}_kp_x \ .$$

Genau genommen muss die Berechnungsformel

$$a_x = \sum_{k=0}^{w-1} v^k \cdot {}_kp_x \cdot L_k$$

lauten, wobei L_k die Höhe der Leistung — hier Leibrente — im k-ten Jahr ist mit $L_k = 1$. Beim Barwert einer Anwartschaft ist L_k der Barwert der potentiellen Rente im k-ten Jahr und damit im Allgemeinen nicht 1.

Diese Änderung wird bei der Summe der diskontierten Lebenden berücksichtigt. Mit Satz 1.3.14 gilt für den Barwert einer lebenslangen Leibrente in Höhe von 1 Euro

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_x}{D_x} \cdot 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot 1 + \cdots + \frac{D_w}{D_x} \cdot 1 = \frac{D_x}{D_x} \cdot L_x + \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot L_{x+1} + \cdots + \frac{D_w}{D_x} \cdot L_w \ .$$

Analog gilt für den Barwert eines Anspruches

$$a_x = \frac{D_x \cdot \tilde{w}_x \cdot L_x}{D_x} + \frac{D_{x+1} \cdot \tilde{w}_{x+1} \cdot L_{x+1}}{D_x} + \cdots + \frac{D_w \cdot \tilde{w}_w \cdot L_w}{D_x} \ ,$$

wobei $\tilde{w}_k$ die Wahrscheinlichkeit für den Wechsel im Alter $x + k$ in die entsprechende Gesamtheit ist. Dementsprechend wird dann die Summe der diskontierten Lebenden definiert (qualitative Darstellung):

$$N_x^{(\ldots)} := \sum_{j=0}^{w-x} D_{x+j} \cdot \tilde{w}_{x+j} \cdot L_{x+j}$$

3.3.2.1 Altersrentner

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Altersrentners auf eine lebenslang vorschüssig zahlbare Witwenrente:

$$a_x^{rw} = \frac{N_x^{rw}}{D_x^r} \quad \text{mit} \qquad N_x^{rw} := \sum_{k=0}^{w-x} D_{x+k}^{rw}$$

$$D_x^{rw} := D_x^r \cdot q_x^r \cdot h_x \cdot a_{y(x)+\frac{1}{2}}^w \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$$a_{y(x)+\frac{1}{2}}^w := \frac{1 - q_{y(x)}^w}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{y(x)}^w} \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot a_{y(x)+1}^w$$

Ausgangspunkt der Erläuterung dieses Barwertes ist die Übergangswahrscheinlichkeit von der Gesamtheit Rentner in die Gesamtheit Hinterbliebene[5]

$$q_x^r \cdot h_x \cdot \frac{1 - q_y^w}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_y^w} .$$

Der Rentner stirbt als Verheirateter und die Witwe lebt in dem Jahr.

$y(x)$ ist das Alter der Witwe in Abhängigkeit des (Todes-)Alters des Altersrentners. Für das Alter $y(x)$ geben die Richttafeln Schätzwerte an.

$a_{y(x)}^w$ ist der Barwert einer lebenslang an eine $y(x)$-jährige Witwe vorschüssig zahlbaren Witwenrente, vergleiche Abschnitt 3.3.1.

Die diskontierten Lebenden D_x^{rw} der Anwartschaft berechnen sich aus den diskontierten Lebenden des Anspruch D_x^r, der Sterbewahrscheinlichkeit q_x^r, der Heiratswahrscheinlichkeit h_x und der potentiellen Leistung $a_{y+\frac{1}{2}}^w$.

3.3.2.2 Invalider

Der Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Invaliden auf eine lebenslang vorschüssig zahlbare Alterrsrente entspricht dem Barwert einer auf das Alter z aufgeschobenen lebenslang vorschüssig zahlbare Altersrente – beachte Lemma 1.3.12:

$$_{z-x}a_x^{iA} = \frac{D_z^i}{D_x^i} \cdot a_z^r$$

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Invaliden auf eine lebenslang vorschüssig zahlbare Witwenrente:

$$a_x^{iw} = \frac{N_x^{iw}}{D_x^i} \quad \text{mit} \qquad N_x^{iw} := \sum_{k=0}^{z-x-1} D_{x+k}^{iw} + D_z^i \cdot a_z^{rw}$$

$$D_x^{iw} := D_x^i \cdot q_x^i \cdot h_x \cdot a_{y(x)+\frac{1}{2}}^w \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$a_{y(x)+\frac{1}{2}}^w$ ist wieder der Barwert einer lebenslang an eine $y(x) + \frac{1}{2}$-jährige Witwe vorschüssig zahlbaren Witwenrente, siehe Abschnitt 3.3.2.1.

Der Barwert a_x^{iw} unterscheidet sich vom Barwert a_x^{rw} aus Abschnitt 3.3.2.1 nur in zwei Punkten: Gemäß dem hier betrachteten Pensionspersonenmodell „Populationsmodell AKTIVE“ der Richttafeln endet der Status Invalider mit dem Erreichen des Renteneintrittsalters z und nicht wie bei den Altersrentner mit dem Schlussalter w. Und die Sterbewahrscheinlichkeiten für Invalide unterscheiden sich von denen der Altersrentner. Deshalb besteht N_x^{iw} aus zwei Termen: Der erste Term ist so aufgebaut wie a_x^{rw} mit dem Unterschied, dass er nur bis zum Alter $z-x-1$ geht und die Sterbewahrscheinlichkeiten für Invalide verwendet. Der zweite Term betrifft nur das Renteneintrittsalter z und verwendet deshalb für die potentielle Altersrente die Sterbewahrscheinlichkeiten der Altersrentner.

[5] Lemma 2.2.2

3.3.2.3 Aktiver

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine längstens bis zum Renteneintrittsalter z vorschüssig zahlbare Invalidenrente:

$$a_x^{ai(z)} = \frac{N_x^{ai(z)}}{D_x^a} \quad \text{mit} \quad N_x^{ai(z)} := \sum_{k=0}^{z-x-1} D_{x+k}^{ai(z)}$$

$$D_x^{ai(z)} := D_x^a \cdot i_x \cdot a^i_{x+\frac{1}{2}\ \overline{z-x}|} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$$a^i_{x+\frac{1}{2}\ \overline{z-x}|} := \frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}\cdot q_x^i} \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot a^i_{x+1\ \overline{z-x}|}$$

Der Barwert $a_x^{ai(z)}$ ist analog dem Barwert a_x^{rw} aus Abschnitt 3.3.2.1 aufgebaut. Zum Barwert $a^i_{x+1\ \overline{z-x}|}$ vergleiche Abschnitt 3.3.1.

Der Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslang vorschüssig zahlbare Altersrente entspricht dem Barwert einer auf das Alter z aufgeschobenen lebenslang vorschüssig zahlbare Altersrente – beachte Lemma 1.3.12:

$$_{z-x}a_x^{aA} = \frac{D_z^a}{D_x^a} \cdot a_z^r$$

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslang vorschüssig zahlbare Witwenrente bei Tod als Aktiver oder Altersrentner:

$$a_x^{aaw} = \frac{N_x^{aaw}}{D_x^a} \quad \text{mit} \quad N_x^{aaw} := \sum_{k=0}^{z-x-1} D_{x+k}^{aaw} + D_z^a \cdot a_z^{rw}$$

$$D_x^{aaw} := D_x^a \cdot q_x^{aa} \cdot h_x \cdot a^w_{y(x)+\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

Dieser Barwert entspricht vom Aufbau her dem Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Invaliden auf eine lebenslang vorschüssig zahlbare Witwenrente a_x^{iw}.

Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslang vorschüssig zahlbare Witwenrente bei Tod als Invalider:

$$a_x^{aiw} = \frac{N_x^{aiw}}{D_x^a} \quad \text{mit} \quad N_x^{aiw} := \sum_{k=0}^{z-x-1} D_{x+k}^{aiw}$$

$$D_x^{aiw} := D_x^a \cdot i_x \cdot a^{iw}_{x+\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$$a^{iw}_{x+\frac{1}{2}} := \frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}\cdot q_x^i} \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot a^{iw}_{x+1} + \frac{\frac{1}{2}\cdot q_x^i}{1-\frac{1}{2}\cdot q_x^i} \cdot h_x \cdot a^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$$

3.4 Beispiel

Isa Döbler hat von ihrem Arbeitgeber eine Pensionszusage mit den Versorgungsleistungen Alters-, Invaliden- und Witwerrente (Versorgungsstatus R, I, W). Die Höhe der Witwerrente beträgt 65% der Altersrente, die Höhe der Invalidenrente beträgt 80% der Altersrente. — Zur Erinnerung: Alle Renten werden jährlich vorschüssig gezahlt. Die Altersrente hat die Höhe 1 Euro. — Entsprechend dem Beginn des Arbeitsverhältnisses hat Frau Döbler das Diensteintrittsalter $y = 37$ Jahre. Da für sie das Renteneintrittsalter $z = 67$ Jahre ist, hat Frau Döbler $n = z - x = 30$ Dienstjahre. Somit ist der Barwert der Gesamtverpflichtung des Arbeitgebers gegenüber Frau Döbler (zu Beginn des Arbeitsverhältnisses)[6]

$$\begin{aligned} B_y = B_{37} = \quad & \sum_{t=0}^{30} w_{37+t}^{(R)} \cdot v^t \cdot L_{37+t}^{(R)} \\ & +0,8 \cdot \left(\sum_{t=0}^{30} w_{37+t}^{(I)} \cdot v^t \cdot L_{37+t}^{(I)} \right) \\ & +0,65 \cdot \left(\sum_{t=0}^{30} w_{37+t}^{(W)} \cdot v^t \cdot L_{37+t}^{(W)} \right) \quad . \end{aligned}$$

Da Frau Döbler nur Anwartschaften und keinen Anspruch hat, vereinfacht sich die Summe. Die Anwartschaft auf Altersrente besteht nur für $t = 30$, die Anwartschaft auf Invalidenrente sowie die auf Witwenrente nur bis $t = 29$. [7] Dementsprechend gilt:

$$B_{37} = w_{67}^{(R)} \cdot v^{30} \cdot L_{67}^{(R)} + \sum_{t=0}^{29} 0,8 \cdot \left(w_{37+t}^{(I)} \cdot v^t \cdot L_{37+t}^{(I)} \right) + 0,65 \cdot \left(w_{37+t}^{(W)} \cdot v^t \cdot L_{37+t}^{(W)} \right)$$

Frau Döbler kann als Aktive das Renteneintrittsalter erreichen (erster Summand), invalide werden (zweiter Summand) oder sterben (dritter Summand). Für die Darstellung mit Barwerten ist zu beachten, dass Frau Döbler als Invalide zwei Ausscheideursachen hat: Das Renteneintrittsalter erreichen oder sterben. Somit erhalten wir[8]

$$B_{37} = {}_{30}a_{37}^{aA} + 0,8 \cdot a_{37}^{ai(67)} + 0,65 \cdot a_{37}^{aaw} + 0,65 \cdot a_{37}^{aiw}$$

mit den vier Summanden „Anwartschaft einer Aktiven auf Altersrente“, „Anwartschaft einer Aktiven auf Invalidenrente“, „Anwartschaft einer Aktiven auf Witwerrente“ und „Anwartschaft einer Invaliden auf Witwerrente“.

[6] Vgl. Neuburger 1997, S. 52, Beispiel.
[7] Vgl. Neuburger 1997, S. 51. Beachte Heubeck 2018, S. 47, Abschnitt 3.3.2.1.
[8] Vgl. Heubeck 2018, S. 47, Abschnitt 3.3.2.1; Neuburger 1997, S. 52 Beispiel in Verbindung mit S. 60 und S. 62.

Der Barwert der Gesamtverpflichtung mit höheren Kommutationswerten ausgedrückt:

$$B_{37} = \frac{D_{67}^{a}}{D_{37}^{a}} \cdot \frac{N_{67}^{r}}{D_{37}^{r}} + 0,8 \cdot \frac{N_{37}^{ai(67)}}{D_{37}^{a}} + 0,65 \cdot \frac{N_{37}^{aaw}}{D_{37}^{a}} + 0,65 \cdot \frac{N_{37}^{aiw}}{D_{37}^{a}}$$

Der Barwert der Gesamtverpflichtung mit niederen Kommutationswerten ausgedrückt (Schlussalter $w = 115$):

$$\begin{aligned} B_{37} &= \frac{D_{67}^{a}}{D_{37}^{a}} \cdot \frac{1}{D_{37}^{r}} \cdot \sum_{k=0}^{48} D_{67+k}^{r} + 0,8 \cdot \frac{1}{D_{37}^{a}} \cdot \sum_{k=0}^{29} D_{37+k}^{ai(67)} \\ &+0,65 \cdot \frac{1}{D_{37}^{a}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{29} D_{37+k}^{aaw} + \frac{D_{67}^{a}}{D_{67}^{r}} \cdot \sum_{k=0}^{48} D_{67+k}^{rw} \right) \\ &+0,65 \cdot \frac{1}{D_{37}^{a}} \cdot \sum_{k=0}^{29} D_{37+k}^{aiw} \end{aligned}$$

Welche Berechnungsformel verwendet wird, hängt davon ab, welche Werte eine vorliegende Sterbetafel bereitstellt.

4 Bewertung von Pensionsverpflichtungen

Grundsätzliches Ziel dieses Kapitels ist es, den monetären Wert einer einzelnen Pensionszusage zu einem festgelegten Zeitpunkt zu bestimmen — Bewertung einer Pensionsverpflichtung —, welcher für verschiedene betriebliche Belange — Bewertungsanlässe — benötigt wird.

Der Wert einer Pensionszusage zu einem bestimmten Zeitpunkt hängt zum Einen von dem Finanzierungsverfahren ab. Es gibt sehr unterschiedliche Finanzierungsverfahren und zwar vom individuellen Anwartschaftsdeckungsverfahren über Durchschnittsbeitragsverfahren für Kollektive bis hin zum kollektiven Umlageverfahren.[1] Wir beschäftigen uns hier nur mit dem individuellen Anwartschaftsdeckungsverfahren, d. h. mit der Kapitalbereitstellung für eine einzelne Pensionszusage.

Zum Anderen hängt der Wert einer Pensionszusage vom Bewertungsanlass ab. Wir werden hier nur den Bewertungsanlass „Erstellung der Steuerbilanz“ betrachten. § 6a EStG legt die Berechnung der Rückstellung von Pensionsverpflichtungen fest. Diese hat mit der prospektiven Deckungsrückstellung (Reserve) ${}_mV_x$ zu erfolgen.[2]

Damit ist der Aufbau dieses Kapitels festgelegt: Zunächst beschäftigen wir uns mit der prospektiven Deckungsrückstellung, um als nächstes bestimmte Grundbegriffe des Rechnungswesens einzuführen. Danach wird das Berechnungsverfahren für das Alter x der versorgungsberechtigten Person und die Vertragsdauer m festgelegt, bevor abschließend der Teilwert gemäß § 6a EStG berechnet werden kann.

4.1 Deckungsrückstellung

Wesentliches Kennzeichen des individuellen Anwartschaftsdeckungsverfahrens ist, dass zu jedem Zeitpunkt der Barwert der zu erwartenden Leistungen durch die Summe aus dem Barwert der zu erwartenden Prämien und dem bereits angesammeltem Kapital gedeckt sein muss.[3]

[1] Vgl. Handwörterbuch der Versicherung 1988, Stichwort: Pensionsversicherungsmathematik, S. 490 f.

[2] Vgl. Neuburger 1997, S. 78.

[3] Vgl. Gabler Versicherungslexikon 2017, Stichwort: Anwartschaftsdeckungsverfahren, S. 45 f.

Wieso gilt nicht zu jedem Zeitpunkt, dass der Barwert der zu erwartenden Leistungen gleich der Summe der zukünftigen Prämien ist? Wofür wird „angesammeltes Kapital" benötigt? Schließlich gilt die Gleichheit wegen des Äquivalenzprinzips zu Vertragsbeginn (Zeitpunkt 0), vergleiche Abschnitt 1.3. Dies liegt daran, dass die Prämien meist im Zeitverlauf konstant sind, die Leistungsentwicklung aber oft nicht:

Schließt Frau Sander im Alter von 20 Jahren eine Risikolebensversicherung über 50 Jahre ab, dann müsste Frau Sander wegen der steigenden Sterbewahrsscheinlichkeit als 20-Jährige eine deutlich niedrigere Prämie zahlen als im Alter von 60 Jahren. Die konstante Prämie ist nun so bemessen, dass der in den ersten Versicherungsjahren zu viel gezahlte Teil der Prämie, der sogenannte Sparanteil, die Lücke in den letzten Versicherungsjahren schließt.

Dieses Verfahren ist besonders wichtig in der Pensions- und der Krankenversicherung. Bei beiden Versicherungen sind die erwarteten Leistungen zu Beginn relativ niedrig und zum Ende hin relativ hoch. Ein Vorteil des Anwartschaftsdeckungsverfahrens mit konstanten Prämien ist, dass der Sparanteil sich um Zins und Zinseszins vergrößert. Dieses angesammelte Kapital heißt **Deckungsrückstellung**.

Zur mathematischen Darstellung der Deckungsrückstellung benötigen wir neben dem Barwert der zu erwartenden Leistungen, genauer der Verallgemeinerung des Barwertes der zu erwartenden Gesamtverpflichtung B_x zu[4]

$${}_mB_x := \sum_{t\geq 0;\ S} w_{x+m+t}^{(S)} \cdot v^t \cdot L_{x+m+t}^{(S)},\ 0 \leq m \leq w - x$$

den Barwert der zu erwartenden Prämien ${}_mB_x^P$ jeweils nach $m \geq 0$ Jahren (vor Einzahlung der $m+1$-ten Prämie). Nach dem Äquivalenzprinzip gilt[5]

$${}_0B_x^P = P_x \cdot a_{x\ \overline{n}|}^a = {}_0B_x = B_x\ ,$$

wobei P_x die konstante jährlich vorschüssig zu zahlende **Nettoprämie** ist, n die Anzahl der Prämienzahlungen und[6]

$$a_{x\ \overline{n}|}^a = \frac{N_x^a}{D_x^a}\ .$$

Hieraus ergibt sich

Lemma 4.1.1:[7] *Für $0 \leq m \leq n$ gilt*

$${}_mB_x^P = P_x \cdot a_{x+m\ \overline{n-m}|}^a\ .$$

[4]Vgl. Neuburger 1997, S. 52; Abschnitt 1.3.
[5]Vgl. Heubeck 2018, S. 49; Neuburger 1997, S. 75.
[6]Heubeck 2018, S. 31: Aufgeschobenen und abgekürzte Aktivenrente.
[7]Neuburger 1997, S. 75. Vgl. Heubeck 2018, S. 49.

Es gibt nun zwei Arten von Deckungsrückstellung, die prospektive und die retrospektive. Bei gleichen Rechnungsgrundlagen für Prämien- und Deckungsrückstellungsberechnung sind prospektive und retrospektive Deckungsrückstellung gleich.[8] Mit Blick auf § 6a EStG betrachten wir hier die erstere:

Definition 4.1.2:[9] Die **prospektive Deckungsrückstellung** ist für $0 \leq m \leq w - x$

$${}_mV_x := {}_mB_x - {}_mB_x^P \ ,$$

wobei ${}_mB_x^P := 0$ für $n < m \leq w - x$ ist.

Bemerkung 4.1.3: (i) In Worten ist die prospektive Deckungsrückstellung der Barwert der künftigen Gesamtverpflichtung abzüglich dem Barwert der künftigen Prämieneinnahmen.

(ii) Zum Vertragsbeginn $m = 0$ ist wegen des Äquivalenzprinzips ${}_mV_x = 0$.[10] Dies entspricht ja auch der Vorstellung, dass die erwarteten Versicherungsleistungen erst mit der Zeit steigen und dann der Spargroschen, die Deckungsrückstellung benötigt wird.

(iii) Die Gleichung

$${}_mB_x = {}_mB_x^P + {}_mV_x$$

wird auch als **erweitertes Äquivalenzprinzip** bezeichnet.[11]

(iv) $w - x$ ist die Laufzeit der Pensionszusage.

(v) Mit Lemma 4.1.1 gilt:[12]

$${}_mV_x = {}_mB_x - P_x \cdot a^a_{x+m\ \overline{n-m}|}$$

Beispiel 4.1.4: Herr Rettmer hat von seinem Arbeitgeber eine Pensionszusage mit der Versorgungsleistung Altersrente in Höhe von 6000 Euro jährlich vorschüssig zahlbar. Sein Diensteintrittsalter ist $x = 43$ Jahre, sein Renteneintrittsalter $z = 67$ Jahre. Sein Arbeitgeber finanziert die Altersrente über vorschüssig zahlbare Jahresprämien während seiner aktiven Zeit, also beginnend im Jahr seines Diensteintritts bis zur Erreichung des Renteneintrittsalters mit $n = z - x = 24$ Jahresprämien. Für die Jahresprämie gilt:

$$P_{43} = \frac{B_{43}}{a^a_{43\ \overline{24}|}}$$

Es ist — beachte B_{37} in Abschnitt 3.4 und ${}_{z-x}a_x^{aA}$ in Abschnitt 3.3.2.3 —

$$B_{43} = 6000 \cdot {}_{24}a_{43}^{aA} = 6000 \cdot \frac{D_{67}^a}{D_{43}^a} \cdot a_{67}^r \ .$$

[8] Führer und Grimmer 2010, S. 101.
[9] Neuburger 1997, S. 78. Vgl. Heubeck 2018, S. 49; Führer und Grimmer 2010, S. 100.
[10] Neuburger 1997, S. 79.
[11] Vgl. Führer und Grimmer 2010, S. 99.
[12] Vgl. Neuburger 1997, S. 89; Heubeck 2018, S. 49.

Mit den biometrischen Werten der Richttafeln[13] als Schätzer ergibt sich für einen Zinssatz von 2% folgende Jahresprämie:

$$\begin{aligned} P_{43} &= 6000 \cdot \frac{D^a_{67}}{D^a_{43}} \cdot a^r_{67} \cdot \frac{1}{a^a_{43\ \overline{24}|}} \\ &= 6000 \cdot \frac{19036{,}38}{40792{,}15} \cdot 14{,}3695 \cdot \frac{1}{16{,}6187} \\ &= 2420{,}83 \text{ Euro} \end{aligned}$$

Bei einem Zinssatz von 6% — § 6a EStG — ergibt sich eine Jahresprämie von $P_{43} = 975,96$ Euro.
Wie entwickeln sich nun der Barwert der künftigen Gesamtverpflichtung und der Barwert der künftigen Prämieneinnahmen im Zeitablauf (Zinssatz 2%)? Die folgende Tabelle gibt darüber Auskunft:

Alter $= 43 + m$	${}_mB_{43} =$ $6000 \cdot {}_{67-43-m}a^{aA}_{43+m}$	$P_{43} \cdot a^a_{43+m\ \overline{24-m}|}$	${}_mV_{43}$
43=43+0	40.232,44	40.232,44	0
44=43+1	41.222,30	38.875,84	2.246,46
45=43+2	42.245,98	37.494,26	4.751,72
46=43+3	43.308,39	36.089,47	7.218,92
⋮		⋮	
66=43+23	83.397,76	2.290,12	81.107,65
67=43+24	86.216,71	0,00	86.216,71

Bis zum Alter von 67 Jahre handelt es sich um eine Anwartschaft, ab dem Alter von 67 Jahre um einen Anspruch. Anwartschaft und Anspruch haben in diesem Alter denselben Wert:

$${}_{24}B_{43} = 86.216{,}71 = 6000 \cdot {}_0a^{aA}_{43} = 6000 \cdot \frac{D^a_{67}}{D^a_{67}} \cdot a^r_{67} = 6000 \cdot a^r_{67}$$

Der letzte Term ist der Barwert des Anspruchs auf Altersrente, vergleiche Abschnitt 3.3.1. Der Barwert der Altersrente entwickelt sich folgendermaßen:

Alter $= 67 + m$	$6000 \cdot a^r_{67+m} = N^r_{67+m}/D^r_{67+m}$
67=67+0	86.216,71
68=67+1	83.150,03
69=67+2	80.076,02
70=67+3	76.994,73
⋮	
113=67+46	8.950,85
114=67+47	8.107,56
115=67+48	6.000,00

[13] Heubeck 2018, S. 90.

4.2 Grundbegriffe aus dem Rechnungswesen

Der Begriff „Pensionszusage“ (Explikation 1.1.2) wird eher im versicherungsmathematischen Kontext verwendet, wohingegen der folgende Begriff eher in den betrieb(swirtschaft)lichen Kontext gehört:

Explikation 4.2.1:[14] **Pensionsverpflichtungen** – *Verpflichtungen (i. d. R.) eines Unternehmers oder eines Unternehmens aus der Zusage einer bestimmten Alters-(Invaliden-) und/oder Hinterbliebenenversorgung* (...) .

Im Rechnungswesen ist folgender Zeitraum maßgeblich:

Explikation 4.2.2:[15] **Wirtschaftsjahr (Geschäftsjahr)** – *bestimmter Zeitraum, für den die Ergebnisse eines Betriebes regelmäßig abschließend (Inventur und Bilanz) buchmäßig festgestellt werden. Das Wirtschaftsjahr entspricht dem im § 240 HGB erwähnten Geschäftsjahr und umfasst i. d. R. zwölf Monate.*

Wir benötigen den folgenden Begriff aus dem Bilanzrecht (§ 253 (1) HGB):

Explikation 4.2.3:[16] *Unter dem* **Erfüllungsbetrag** *versteht man den Geldbetrag, den ein Schuldnerunternehmen aufwenden muss, um sich seiner Verpflichtung gegenüber dem Gläubiger zu entledigen.*

Der **Erfüllungsbetrag einer Pensionsverpflichtung** ist also der Geldbetrag, den in der Regel ein Unternehmer oder ein Unternehmen bereitstellen muss, um die Pensionszahlungen leisten zu können. Zur Bestimmung des Geldbetrages ist der folgende Begriff zentral:

Explikation 4.2.4:[17] **Bewertung** – *Verfahren zur Bestimmung des Werts von Gütern oder Handlungsalternativen. Die Höhe des Wertansatzes richtet sich nach dem Zweck oder Anlass der Bewertung.*

Bemerkung 4.2.5: Eine Bewertung des Erfüllungsbetrages einer Pensionsverpflichtung ist der Barwert der Gesamtverpflichtung B_x oder allgemeiner der Barwert der zu erwartenden Leistungen ${}_mB_x$.

Es gibt nun verschiedene **Bewertungsanlässe** für Pensionsverpflichtungen, beispielsweise:

- Jahresabschluss
  - (Handels)Bilanz (HGB)
  - Steuerbilanz (EStG)
  - Internationaler Abschluss (IFRS, US-GAAP)

[14] Gabler Wirtschaftslexikon 2004, Stichwort: Pensionsverpflichtungen, S. 2294.
[15] Gabler Wirtschaftslexikon 2004, Stichwort: Wirtschaftsjahr, S. 3365 f.
[16] Wöhe und Döring 2010, S. 758.
[17] Gabler Wirtschaftslexikon 2004, Stichwort: Bewertung, S. 455.

- Unternehmensbewertung
- Kostenrechnung
- Neugestaltung oder Änderung von Pensionszusagen

Die Bewertung erfolgt zu einem **Bewertungsstichtag**. Dieser kann durch den Anlass vorgegeben sein. Beispielsweise wird die Bilanz gewöhnlich zum Ende des Geschäftsjahres erstellt, bei vielen Unternehmen zum 31.12. Der Bewertungsstichtag ist dann der Bilanzstichtag.

Zu jedem Bewertungsanlass sind verschiedene Bewertungsverfahren denkbar, vergleiche Wöhe und Döring 2010 Seite 751 ff. Das Bewertungsverfahren für einen Bewertungsanlass kann gesetzlich vorgeschrieben sein wie beim § 6a EStG, der die Rückstellung von Pensionsverpflichtungen regelt. § 6a EStG schreibt das Teilwertverfahren vor. Ziel der nächsten Abschnitte ist es, den Erfüllungsbetrag einer Pensionsverpflichtung mit dem Teilwertverfahren zu bestimmen.

4.3 Altersbestimmung

In der Regel wird der Bewertungsstichtag nicht gleich dem Geburtstag der Person sein, für die der Erfüllungsbetrag einer Pensionsverpflichtung berechnet werden soll. Dies bedeutet, dass die Person am Bewertungsstichtag nicht genau x Jahre alt ist. Der Barwert der Gesamtverpflichtung setzt aber voraus, dass die Person genau x Jahre alt ist. Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, die Differenz zwischen Bewertungsstichtag und Geburtstag zu berücksichtigen.

> *Z. B. könnte man die Ausscheidewahrscheinlichkeiten in geeigneter Weise interpolieren. Unter dem Gesichtspunkt jedoch, daß es als ausreichend erscheinen muß, für einen großen Bestand im Mittel korrekte Werte zu erhalten, bietet sich ein einfacherer Weg an: unter der Annahme, daß die Geburtstage innerhalb eines Jahres gleichverteilt sind, genügt es, zu einem bestimmten Stichtag das Alter zu nehmen, das zu dem Geburtstag erreicht wird, der zum Stichtag den kleinsten Zeitabstand aufweist:* (...)[18] Dieses Verfahren heißt **Halbjahresmethode**.[19]

Bemerkung 4.3.1: (i) Neben der Halbjahresmethode gibt es noch die Kalenderjahresmethode und die Methode des bürgerlichen Alters, vergleiche Führer und Grimmer 2010, Seite 59. Die Kalenderjahresmethode wird in der privaten Krankenversicherung angewendet.

[18] Neuburger 1997, S. 47.
[19] Vgl. Führer und Grimmer 2010, S. 59.

(ii) Bei der Halbjahresmethode kann es passieren, dass der Stichtag genau in der Mitte zweier Geburtstage liegt. Per Konvention wird dann der frühere Geburtstag genommen.[20]

(iii) Die Namen der Verfahren zur Festlegung des Alters werden nicht einheitlich verwendet. Heubeck 2018 bezeichnet auf Seite 44 die Halbjahresmethode als die Methode des bürgerlichen Alters.

Die Halbjahresmethode wird jetzt nicht nur für den Bewertungsstichtag angewendet, sondern für alle weiteren Stichtage, die im Rahmen der Bewertung berücksichtigt werden müssen, wie zum Beispiel der Eintrittstag in das Unternehmen oder das Datum des Altersrentenbeginns.

Definition 4.3.2: (i) Das **versicherungstechnisches Alter (der Pensionsversicherungsmathematik)** ist das mit der Halbjahresmethode berechnete Alter einer Person (zu einem Stichtag).[21]

(ii) Das **(Dienst)Eintrittsalter** ist das mit der Halbjahresmethode berechnete Alter einer Person zum letzten Tag des Wirtschaftsjahres $t-1$ (Bilanzstichtag), wenn die Person im Wirtschaftjahr t in das Unternehmen eingetreten ist (Beginn des Arbeitsverhältnisses).

(iii) Die **Dienstjahre** sind die Differenz zwischen versicherungstechnischem Alter und Diensteintrittsalter.[22]

Bemerkung 4.3.3: (i) Das versicherungstechnisches Alter wird manchmal auch als versicherungsmathematisches Alter bezeichnet. Vergleiche Neuburger 1997, Seite 47.

(ii) Da wir die Rückstellung nach dem Teilwertverfahren berechnen wollen, richten sich die Berechnungsmethoden und die Stichtage hier nach § 6a EStG. Die Stichtage sind immer die Bilanzstichtage, um in der Regel — außer beim Rumpfwirtchaftsjahr — die gleiche Zeitraumlänge für die Rückstellungsberechnung zu haben.

(iii) Die maximale Anzahl an Dienstjahren ergibt sich aus Renteneintrittsalter abzüglich dem Eintrittsalter.

Beispiel 4.3.4: Till Kammholz ist am 24.6.1973 geboren und arbeitet seit dem 1.4.1997 bei der Bremer Kammgarnspinnerei GmbH. Das Wirtschaftsjahr der Kammgarnspinnerei beginnt am 1. Oktober. Deshalb ist der Stichtag für die Berechnung seines Eintrittsalters der 30.9.1996. Der nächstgelegene Geburtstag ist der 24.6.1996. Also ist das Eintrittsalter von Herrn Kammholz 23 Jahre. Dies entspricht der kaufmännischen Rundung: Herr Kammholz ist am 30.9.1996 23 Jahre 3 Monate und 6 Tage alt, also gerundet 23 Jahre. – Das versicherungstechnische Alter von Herrn Kammholz zum Bewertungsstichtag 1.4.2017 ist 44 Jahre, da der 24.6.2017 der zum 1.4.2017 nächstgelegene Geburtstag ist. Auch dies entspricht der kaufmännischen Rundung:

[20] Vgl. Führer und Grimmer 2010, S. 59.
[21] Vgl. Neuburger 1997, S. 47; Heubeck 2018, S. 44.
[22] Vgl. Heubeck 2018, S. 44.

Herr Kammholz ist am 1.4.2017 43 Jahre 9 Monate und 8 Tage alt, also gerundet 44 Jahre. Herr Kammholz hat $21 = 44 - 23$ Dienstjahre am Bewertungsstichtag.

4.4 Teilwert einer Pensionsverpflichtung

Die Bewertung des Erfüllungsbetrages einer Pensionsverpflichtung im Sinne des § 6a EStG ist die Deckungsrückstellung ${}_mV_x$ unter folgenden Vorgaben:

- x ist das Eintrittsalter nach Definition 4.3.2 (mit gewissen Besonderheiten für jüngere Menschen, siehe § 6a (2) EStG).
- m sind die Dienstjahre nach Definition 4.3.2.
- Die maximale Anzahl an Dienstjahre ist $n = z - x$, wobei z das Renteneintrittsalter ist. Es gilt $m \leq n$.
- n vorschüssig zahlbare Jahresprämien
- Zinssatz von 6%
- Bewertungsstichtag ist der Bilanzstichtag.

Beispiel 4.4.1: In Beispiel 4.1.4 hatten wir das Diensteintrittsalter von Herrn Rettmer mit $x = 43$ Jahre angegeben. Gehen wir davon aus, dass das Geschäftsjahr des Unternehmens, bei dem Herr Rettmer beschäftigt ist, am 31.12. endet und am Bilanzstichtag 31.12.2017 Herr Rettmer $m = 10$ Dienstjahre hat, dann ist Herr Rettmer zwischen dem 1.7.1963 und dem 30.6.1964 geboren. Das versicherungstechnische Alter von Herrn Rettmer am Bilanzstichtag ist $53 = x + m$. Der Teilwert zum Bilanzstichtag beträgt ${}_{10}V_{43} = 13.832{,}29$ Euro. Das ist der Betrag für die Pensionsrückstellung bezüglich der Pension von Herrn Rettmer, den der Arbeitgeber von Herrn Rettmer steuerlich geltend machen darf. – Bei 2% Zinsatz ergibt sich eine Deckungsrückstellung von ${}_{10}V_{43} = 26.726{,}21$ Euro.

Mit der Gleichung zum Äquivalenzprinzip

$$B_x = P_x \cdot a^a_{x\,\overline{n}|}$$

und der Aussage von Lemma 4.1.1

$${}_mB^P_x = P_x \cdot a^a_{x+m\,\overline{n-m}|} \;.$$

ergibt sich die folgende Darstellung für die Deckungsrückstellung

$${}_mV_x = {}_mB_x - B_x \cdot \frac{a^a_{x+m\,\overline{n-m}|}}{a^a_{x\,\overline{n}|}} \;,$$

welche auch als **Teilwertformel** bezeichnet wird. Im obigen Beispiel ist

$$ {}_{10}V_{43} = {}_{10}B_{43} - B_{43} \cdot \frac{a^a_{43+10\ \overline{24-10}|}}{a^a_{43\ \overline{24}|}} = {}_{10}B_{43} - B_{43} \cdot \frac{a^a_{53\ \overline{14}|}}{a^a_{43\ \overline{24}|}} \ . $$

Literaturverzeichnis

Alisch, Katrin, Ute Arentzen und Eggert Winter, Hg. *Gabler Wirtschaftslexikon.* 16. voll. überarb. u. aktu. Aufl. Wiesbaden: Springer Gabler, 2004.

Behnen, Konrad und Georg Neuhaus. *Grundkurs Stochastik.* 4., neu bearb. und erw. Aufl. Heidenau: PD, 2003.

Brockhaus, F.A.. *Brockhaus Enzyklopädie.* 21. völlig neu bearb. Aufl. Leipzig [u.a.]: 2006

Farny, Dieter [u.a.], Hg. *Handwörterbuch der Versicherung.* 1. Aufl. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1988.

Führer, Christian und Arnd Grimmer. *Einführung in die Lebensversicherungsmathematik.* 2. Aufl. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 2010.

Gabler Wirtschaftslexikon: Siehe Alisch.

Gabler Versicherungslexikon: Siehe Wagner.

Georgii, Hans-Otto. *Stochastik.* 5. Aufl. Berlin, Boston: Walter de Gruyter, 2015.

Gerber, Hans U. *Lebensversicherungsmathematik.* 1. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer, 1986.

Gesetz zur Verbesserung der betrieblichen Altersversorgung (Betriebsrentengesetz - BetrAVG) in der Fassung der Bekanntmachung vom 19. Dezember 1974 (BGBl. I S. 3610), das zuletzt durch Artikel 1 des Gesetzes vom 17. August 2017 (BGBl. I S. 3214) geändert worden ist.

Handwörterbuch der Versicherung: Siehe Farny.

Heubeck, Klaus. *Heubeck-Richttafeln 2018 G* 1. Aufl. Köln: Heubeck-Richttafeln-GmbH, 2018.

Kakies, Peter, Heinz-Günther Behrens, Horst Loebus, Birgit Oehlers-Vogel und Bernd Zschoyan. *Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen.* Hg. Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik e.V. 1. Aufl. Schriftreihe angewandte Versicherungsmathematik 11. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1985.

Milbrodt, Hartmut und Manfred Helbig. *Mathematische Methoden der Personenversicherung.* 1. Aufl. Berlin, New York: de Gruyter, 1999.

Milbrodt, Hartmut und Volker Röhrs. *Aktuarielle Methoden der deutschen Privaten Krankenversicherung.* aktual. Neufassung. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 2016.

Neuburger, Edgar. „Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise.“ *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik.* XIX (1990): 257 - 267.

Neuburger, Edgar, Hg. *Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen.* Hg. Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik e.V. 2., überarb. Aufl. Schriftreihe angewandte Versicherungsmathematik 25. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1997.

Neuburger, Edgar. „Bemerkungen zum Formelwerk der Richttafeln 1998.“ *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik.* XXIV (1999): 111 - 134.

Schmidt, Klaus D. *Versicherungsmathematik.* 3. überarb. u. erw. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

Schwarze, Jochen. *Grundlagen der Statistik. Band 1: Beschreibende Verfahren.* 12., vollst. überarb. Aufl. Herne: NWB, 2014.

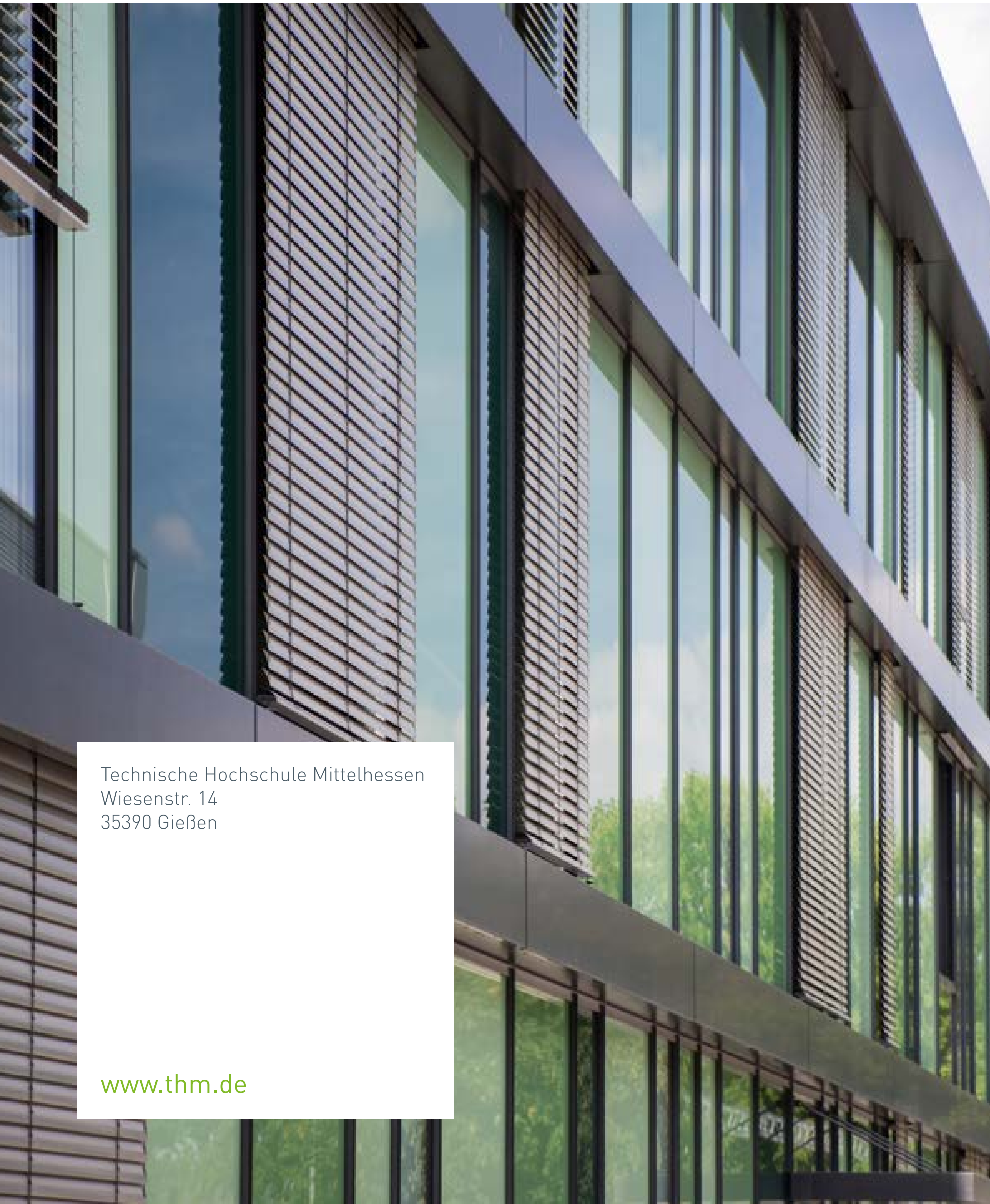
Statistisches Bundesamt Hg. *Allgemeine Sterbetafel. Methodische Erläuterungen und Ergebnisse.* Wiesbaden: Selbstverlag, 2015.

Statistisches Bundesamt Hg. *Periodensterbetafeln für Deutschland.* Wiesbaden: Selbstverlag, 2012.

Wagner, Fred, Hg. *Gabler Versicherungslexikon.* 2. Aufl. Wiesbaden: Springer Gabler, 2017.

Wöhe, Günter und Ulrich Döring.*Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre.* 24., überarb. und aktua. Aufl. München: Franz Vahlen, 2010.

Wolfsdorf, Kurt. *Versicherungsmathematik. Teil 1 Personenversicherung.* 2., überarb. und erw. Aufl. Stuttgart: Teubner, 1997.



Technische Hochschule Mittelhessen
Wiesenstr. 14
35390 Gießen

www.thm.de