

Christoph Gallus

Bell-Korrelationen und Finanzmärkte

THM-Hochschulschriften Band 16



**Christoph Gallus**

Bell-Korrelationen und Finanzmärkte

THM-Hochschulschriften Band 16

THM-Hochschulschriften Band 16

© 2021 Christoph Gallus

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Wirtschaft

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Einzelne Hochschulschriften sind auch online abrufbar:

[www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften](http://www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften)

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

## VORWORT

Diese Abhandlung stellt die Methode von John S. Bell, die aus einer grundsätzlichen Debatte in der Quantenmechanik entstanden ist, vor und wendet sie auf nicht-physikalische Fragestellungen im Bereich der Finanzmarktstatistik an. Das verbindende Ziel besteht darin, die Stärke des Zusammenhangs zwischen Komponenten eines Systems zu analysieren.

Die Anwendung mathematischer Methoden aus dem Bereich der Physik auf wirtschaftliche Fragestellungen ist weder neu noch ungewöhnlich. Der Begriff *Econophysics* wurde 1995 von H. Eugene Stanley geprägt und bezeichnet vor allem die Anwendung von Methoden der statistischen Mechanik auf ökonomische Fragestellungen. Man kannte jedoch bereits lange vor dieser Zeit den erfolgreichen Einsatz von mathematischen Konzepten der theoretischen Physik in der Ökonomie, so zum Beispiel die Anwendung der Brownschen Bewegung und der Wärmeleitungsgleichung auf Finanzmarktfragestellungen in den Arbeiten von Bachelier [1] sowie von Black und Scholes [2]. Auch mathematische Methoden aus der Quantenmechanik wurden im Derivatebereich bereits verwendet [3,4]. Der mathematische Formalismus der Quantenmechanik wird zudem verschiedentlich im Bereich von Psychologie und Entscheidungstheorie eingesetzt [5–11].

Das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit soll das generelle Verständnis für das Thema *Verschränkung* fördern, das auch wegen seiner Rolle als Ressource für Entwicklungen im Bereich von Quantencomputing und Quantenkryptographie fundamental wichtig ist. Verschränkung kann als Stärke des Zusammenhangs zwischen räumlich getrennten Komponenten eines quantenmechanischen Systems über den Ansatz von Bell und die statistische Kenngröße  $S_1$  quantifiziert werden. Die Größe  $S_1$  wird in dieser Abhandlung zunächst unabhängig vom operatorbasierten Formalismus der Quantenmechanik ausführlich in Form eines Spiels über viele Runden mit Alice, Bob und einem Quiz-Master präsentiert. Die Tatsache, dass unter “vernünftigen“ Annahmen die als *Bell-* oder *CHSH-Ungleichung* bezeichnete theoretische Grenze  $|S_1| \leq 2$  hergeleitet werden kann, welche in physikalischen Experimenten jedoch nachweisbar signifikant verletzt wird, zeigt einen der faszinierendsten Aspekte der Quantenmechanik. Die vorliegende Abhandlung geht auf die Herleitung dieser theoretischen Grenze und auf den unter dem Formalismus der Quantenmechanik möglichen Maximalwert von  $S_1 = 2\sqrt{2}$  ein. Anschließend werden kurz aktuelle experimentelle Resultate sowie zwei äquivalente realistische Deutungen für den Betrag, um den der gemessene  $S_1$ -Wert die Grenze von 2 übersteigt, vorgestellt.

Außerhalb der Physik ist die mit dem Thema verbundene Frage nach verborgenen Variablen und Informationsausbreitung auch für das komplexe System der Finanzmärkte interessant. Im zweiten Kapitel wird der Ansatz von Bell auf Finanzmarktdaten übertragen. Dabei wird  $S_1$  als Alternative zur klassischen Korrelation zwischen Preisänderungen betrachtet. Als Datensatz werden Aktien aus dem US-amerikanischen S&P 500-Aktienmarktindex verwendet. Es zeigt sich, dass in dem betrachteten Setup ebenfalls  $S_1$ -Werte oberhalb von 2 auftreten, was in diesem Kontext jedoch weniger überraschend ist. Ferner lässt sich die sektorale Struktur in den Aktienmärkten nicht nur aus den klassischen Korrelationen, sondern auch aus den Bell-Korrelationen über die Größe  $S_1$  ablesen, was die Nützlichkeit des Konzeptes auch außerhalb physikalischer Anwendungen demonstriert. Die Arbeit schließt mit einer kurzen Darstellung des Zusammenhangs mit dem bekannten Lognormalverteilungsmodell.

## INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	3
1. Bell-Korrelationen in der Quantenmechanik	5
1.1. Zur Einführung ein Spiel	5
1.2. Fehlende klassische Gewinnmöglichkeiten	8
1.3. Lokalität und No-Signalling	12
1.4. Beweis der CHSH-Ungleichung	15
1.5. CHSH in der Quantentheorie	17
1.6. Befunde der experimentellen Quantenphysik	18
1.7. Zur Deutung von Verletzungen der Bell-Ungleichungen	19
2. Bell-Korrelationen für Finanzmarktdaten	22
2.1. Zielsetzung und Überblick	23
2.2. Datenkategorien	23
2.3. Klassische Korrelationen am Finanzmarkt	24
2.4. Zusammenhangsstärke im Ansatz von Bell	25
2.5. Zur No-Signalling Bedingung am Finanzmarkt	29
2.6. Zusammenhang mit dem Lognormalverteilungsmodell	30
Literatur	32

## 1. BELL-KORRELATIONEN IN DER QUANTENMECHANIK

Die Quantentheorie geht von einem fundamentalen Indeterminismus in der Natur aus und hat auch aus diesem Grunde erhebliche Kontroversen ausgelöst. Während der mathematische Formalismus klar ist, ist die Interpretation der Quantentheorie eine nach wie vor ungelöste Frage, da die übliche Kopenhagener Interpretation bei näherem Hinsehen von vielen als unbefriedigend empfunden wird. Ein “vernünftiges“ deterministisches Modell, das die experimentell gesicherten Aussagen der Quantentheorie replizieren kann, wird oft als wünschenswert empfunden. Die berühmte Debatte zwischen Einstein und Bohr von 1935 zum sogenannten *EPR-Paradoxon*, das den Widerspruch zwischen der Quantentheorie und der Existenz objektiver, vorherbestimmter Messwerte als “Elemente der Wirklichkeit“ betrifft, ist auch heute noch Ausgangspunkt aktueller Forschungen.<sup>1</sup>

Durch die Arbeiten von John Bell wurde seit 1964 klar, dass die Frage, inwieweit realistische Modelle für die Quantentheorie möglich sind, einer experimentellen Überprüfung unterzogen werden kann. Genauer gesagt leitete Bell relativ einfache Ungleichungen her, die ein “vernünftiges“ deterministisches Modell erfüllen sollte. Diese Ungleichungen sind nicht nur von theoretischem Interesse in Bezug auf mögliche Modelle, sondern sie lassen sich auch anwenden, um die für Verfahren der Quantenkryptographie und Quantencomputer notwendige hinreichend starke Verschränkung zwischen verschiedenen Teilchen in konkreten Situationen experimentell zu verifizieren.<sup>2</sup>

Man kann den Ansatz von Bell auf spezielle quantenmechanische Versuchsanordnungen und physikalische Messstatistiken anwenden, man kann ihn jedoch auch verwenden, um den allgemeinen Zusammenhang zwischen Systemkomponenten außerhalb der Physik zu untersuchen. In dieser Abhandlung soll auf beide Möglichkeiten eingegangen werden. Die Abschnitte 1.1 und 1.2 bieten eine elementare Einführung in den Ansatz. Die Abschnitte 1.3 bis 1.7 betreffen die quantenmechanische Verschränkung und die Bedeutung der Bell- bzw. CHSH-Ungleichungen in diesem Zusammenhang. Abschnitt 2 betrifft die Anwendung auf Finanzmarktdaten.

**1.1. Zur Einführung ein Spiel.** In der Physik werden die Bell- und CHSH-Ungleichungen meist in einem Setup präsentiert, bei dem eine Quelle ein Paar verschränkter Teilchen (z.B. Photonen oder Elektronen) erzeugt, die dann räumlich getrennt werden. An einem Teilchen des Paares nimmt Experimentator *A*, meist *Alice* genannt, eine Messung vor, zum Beispiel die Messung des Spins in einer mit  $x$  bezeichneten Richtung. Am anderen Teilchen des Paares nimmt Experimentator *B*, meist *Bob* genannt, ebenfalls eine Messung vor, zum Beispiel die Messung des Spins in einer ggf. abweichenden Richtung  $y$ . Man bezeichnet das von Alice registrierte Ergebnis mit  $a$  und das von Bob registrierte Ergebnis mit  $b$ . Eine Spin-Messung kann nur zwei mögliche Antworten, meist als “+1“ oder “-1“ bezeichnet, als Ergebnis liefern, so dass  $a \in \{-1; +1\}$  und  $b \in \{-1; +1\}$  ist. Wiederholt man dieses Vorgehen an einer Reihe von Teilchenpaaren und trägt man alle Ergebnisse zusammen, so erhält man insgesamt eine Liste analog zu Abbildung 1.1. Diese Liste ist Alice und Bob nicht vollständig bekannt -

<sup>1</sup>Siehe [12] für die Originalarbeit. Präzise und gut lesbare Einführungen auf Deutsch findet man u.a. in den Büchern von Anton Zeilinger [13, 14], Dieter Zeh [15] und Franco Selleri [16].

<sup>2</sup>Siehe [17] für die Originalarbeit und [18] für eine Sammlung von Arbeiten von John Bell. Eine aktuelle Darstellung bietet das Buch von Valerio Scarani [19].

solange sie nicht miteinander kommunizieren können, kennt jeder von ihnen nur seine eigene Seite. Man kann die Liste jedoch nachträglich aufstellen, wenn das Experiment vorbei ist und Alice und Bob alle ihre Daten austauschen oder alle ihre Daten an einen Experimentator senden. Aus dieser Liste kann man mit dem Ansatz von Bell eine Statistik berechnen, indem

Versuch Nr.	Alices Seite		Bobs Seite	
	$x$	$a$	$y$	$b$
1	0	1	1	-1
2	1	1	0	-1
3	1	-1	0	1
4	0	-1	1	1
5	1	1	1	1
6	0	1	1	-1
7	0	-1	0	-1
8	0	1	0	-1
9	0	-1	1	1
10	1	1	0	1
11	1	1	1	1
12	1	-1	0	-1
13	0	1	1	-1
14	1	1	0	1
15	1	-1	0	1
16	0	1	1	1
17	0	1	1	-1
18	0	-1	1	1
19	1	-1	1	-1
20	0	-1	1	-1

ABBILDUNG 1.1. Ein Beispiel mit möglichen Messergebnissen aus 20 Versuchsrunden.

man vier relative Häufigkeiten ermittelt. Hieraus lassen sich Ungleichungen herleiten, die experimentell überprüft werden können.

Bevor die Ungleichungen dargestellt werden, soll zunächst der Setup ohne Bezugnahme auf physikalische Begriffe, wie Teilchen, Spin oder Messung umformuliert werden, damit der Ansatz später auf den Finanzmarktkontext übertragen werden kann.<sup>3</sup> Bei einem Spiel, das über viele Runden geht, bilden Alice und Bob ein Team, müssen aber ohne Kommunikationsmöglichkeiten in verschiedenen Zimmern räumlich getrennt voneinander sitzen. Ein Quiz-Master stellt Alice und Bob eine Reihe von Fragen. Er entscheidet dabei in jeder Spielrunde frei, welche Fragen er Alice und Bob stellen möchte und schiebt jeweils einen Zettel unter der Tür des jeweiligen Zimmers durch. Alice erhält in jeder Runde eine Frage  $x$  und muss mit Nein ( $-1$ ) oder mit Ja ( $+1$ ) antworten, z.B. indem sie einen Knopf drückt, so dass vor der Tür genau eine von zwei Lampen leuchtet. Bob erhält in jeder Runde eine Frage  $y$  und muss ebenso mit  $-1$  oder  $+1$  antworten.<sup>4</sup>

Der Quiz-Master darf im einfachsten Fall nur zwei Fragen (0 oder 1) stellen, d.h. es gilt  $x, y \in \{0; 1\}$  in jeder Runde. Für die Antworten von Alice und Bob gilt  $a, b \in \{-1; +1\}$ .

<sup>3</sup>Für eine Darstellung entsprechender physikalischer Versuchsanordnungen mit polarisierten Photonen und Anwendungen im Bereich Quantumcomputing siehe das Buch meiner Kollegin Bettina Just [20].

<sup>4</sup>Ein etwas anderes Spiel ohne Quiz-Master, bei dem Alice und Bob die Fragen stellen und die Antworten von zwei isolierten Boxen mit unbekanntem internen Mechanismen gegeben werden, wird im Buch von Nicolas Gisin [21] beschrieben.

Nach Abschluss aller Spielrunden hat der Quiz-Master eine Tabelle analog zu Abbildung 1.1 erstellt, die in jeder Zeile aus einem 4-Tupel  $(x, a, y, b)$  besteht. Alice und Bob dürfen in jeder Runde anders antworten, auch wenn sie eine Frage erhalten, die sie bereits in früheren Runden vorliegen hatten, denn sonst wäre das Spiel sehr langweilig. Alice und Bob dürfen ferner vor Spielbeginn ihre Strategie abstimmen, aber während des Spiels dürfen sie nicht kommunizieren.<sup>5</sup> Sie können ferner die Fragen des Quiz-Masters nicht beeinflussen.<sup>6</sup>

**Beispiel.** Man betrachte drei illustrative Aufgaben für Alice und Bob:<sup>7</sup>

- (1) Zunächst bekommen Alice und Bob die Aufgabe, in jeder Runde auf dieselbe Frage gleich zu antworten. Mit anderen Worten, wenn sie nur einmal das 4-Tupel  $(1, a, 1, b)$  mit  $a \neq b$  oder einmal das 4-Tupel  $(0, a, 0, b)$  mit  $a \neq b$  erzeugen, haben sie verloren.
- (2) Dann bekommen Alice und Bob die Aufgabe, in jeder Runde dann und nur dann gleich zu antworten, wenn sie dieselbe Frage erhalten. Mit anderen Worten, wenn sie nur einmal das 4-Tupel  $(1, a, 1, b)$  mit  $a \neq b$  oder einmal das 4-Tupel  $(0, a, 0, b)$  mit  $a \neq b$  erzeugen, haben sie verloren. Sie haben ferner verloren, wenn sie nur einmal das 4-Tupel  $(0, a, 1, b)$  mit  $a = b$  oder  $(1, a, 0, b)$  mit  $a = b$  erzeugen.
- (3) Schließlich bekommen Alice und Bob die Aufgabe, in jeder Runde verschieden zu antworten, wenn beide Frage "1" erhalten und ansonsten gleich zu antworten. Mit anderen Worten, wenn sie nur einmal das 4-Tupel  $(1, a, 1, b)$  mit  $a = b$  erzeugen, haben sie verloren. Sie haben ferner verloren, wenn sie nur einmal das 4-Tupel  $(0, a, 1, b)$  mit  $a \neq b$  oder  $(1, a, 0, b)$  mit  $a \neq b$  oder  $(0, a, 0, b)$  mit  $a \neq b$  erzeugen.

Lässt sich dies durch eine geeignete vor Spielbeginn abgestimmte Strategie erreichen, wenn Alice und Bob während des Spiels nicht kommunizieren dürfen? Mit etwas Nachdenken findet man

- (1) eine einfache Strategie als Lösung, in der Alice stets  $a = 1$  antwortet und Bob stets  $b = 1$ .
- (2) eine geringfügig komplexere Strategie als Lösung, in der Alice und Bob eine komplette Liste ihrer möglichen Antworten vorab festlegen. Hierzu muss Alice nicht wissen, welche Frage Bob erhält und umgekehrt. Beispielsweise sagt Alice vorab Bob, dass sie bei  $x = 0$  stets mit  $a = +1$  antworten wird und bei  $x = 1$  stets mit  $a = -1$ . Mit diesem Wissen wird Bob bei  $y = 0$  mit  $b = +1$  antworten und bei  $y = 1$  mit  $b = -1$ . Auf diese Weise vermeiden sie sicher die 4-Tupels, bei denen sie verlieren würden, ohne dafür während des Spiels miteinander kommunizieren zu müssen.
- (3) keine Lösung. Hier reicht eine vorab zwischen Alice und Bob abgestimmte Strategie nicht aus, um sicher zu gewinnen. Alice und Bob brauchen hier während des Spiels zusätzliche Ressourcen, denn sonst werden sie in einem Spiel über sehr viele Runden gegenüber dem Quiz-Master verlieren.<sup>8</sup>

Im nächsten Abschnitt soll beleuchtet werden, warum Alice und Bob für Aufgabe (3) keine klassische Gewinnstrategie finden können. Dazu wird eine statistische Größe  $S_1$  definiert,

<sup>5</sup>Man spricht in der Physik dabei von *Lokalität*.

<sup>6</sup>Man spricht in der Physik dabei von *Freedom of Choice* oder auch von *Measurement Independence*.

<sup>7</sup>Siehe [19], S. 6.

<sup>8</sup>Bei nur wenigen Runden könnten sie natürlich Glück haben, aber dies ist nicht das Thema dieser Abhandlung, so dass generell von einer hinreichend großen Anzahl von Runden ausgegangen wird.

von der sich zeigen lässt, dass für eine vorab vereinbarte klassische Strategie  $|S_1| \leq 2$  gelten muss. Da sich in Aufgabe (3) der Wert  $S_1 = 4$  ergibt, folgt daraus die Unmöglichkeit einer klassischen Gewinnstrategie.

Wenn dies die ganze Antwort wäre, wäre das Thema unspannend, jedoch liefert die quantenmechanische Verschränkung einen derart starken Zusammenhang zwischen zwei Systemkomponenten, dass hieraus zusätzliche Ressourcen resultieren, mit denen Alice und Bob mehr als  $S_1 = 2$ , jedoch weniger als  $S_1 = 4$ , erreichen können. Hierauf wird in späteren Abschnitten eingegangen.

**1.2. Fehlende klassische Gewinnmöglichkeiten.** Die fehlende klassische Gewinnmöglichkeit in Beispielaufgabe (3) soll nun begründet werden, indem die statistische Größe  $S_1$  formal definiert wird. Die Betrachtungsweise ist etwas ungewohnt, da die dem Quiz-Master bekannte Versuchsstatistik in verschiedene Teile aufgesplittet werden muss. Es folgt daher zunächst eine ausführliche Darstellung der Zählweise im Sinne von Bell.

Wenn das Spiel über  $N$  Runden durchgeführt wurde, so hat der Quiz-Master, der alle von ihm gestellten Fragen und alle Antworten aufgezeichnet hat, eine Liste analog zu Abbildung 1.1 vorliegen. Aus dieser Liste kann er eine Statistik berechnen. Man bezeichnet mit  $a_0$  die Antworten von Alice bei Frage  $x = 0$  und mit  $a_1$  die Antworten von Alice bei Frage  $x = 1$ . Analog bezeichnet man die Antworten von Bob mit  $b_0$  und  $b_1$ , d.h.  $b_0$  bei Frage  $y = 0$  und  $b_1$  bei Frage  $y = 1$ . Es ist also  $a_x, b_y \in \{-1; +1\}$ . Die Statistik für  $a_x$  kann Alice ohne weitere Kommunikation alleine berechnen, ebenso kann Bob die Statistik für  $b_y$  alleine berechnen.

**Beispiel.** Auf Basis von Abbildung 1.1 ergibt sich, dass unter den  $N = 20$  Runden bei Alice 11-mal  $x = 0$  und 9-mal  $x = 1$  gefragt wurde. Man hat also 11 Realisationen von  $a_0$  und 9 Realisationen von  $a_1$ . Bei Bob wurde 8-mal  $y = 0$  und 12-mal  $y = 1$  gefragt, was 8 Realisationen von  $b_0$  und 12 Realisationen von  $b_1$  liefert.

Die realisierten Werte  $a_0, a_1, b_0, b_1$  kann man aus Abbildung 1.1 extrahieren, das Ergebnis zeigt Abbildung 1.2. Beispielsweise ergeben sich die 11 Realisationen von  $a_0$ , die in der ersten Spalte von Abbildung 1.2 gezeigt werden, indem man auf Abbildung 1.1 die Bedingung  $x = 0$  anwendet und nur die Spalte  $a$  ausliest. Die 8 Realisationen von  $b_0$ , die in der dritten Spalte von Abbildung 1.2 gezeigt werden, erhält man, indem man auf Abbildung 1.1 die Bedingung  $y = 0$  anwendet und nur die Spalte  $b$  ausliest. Man erhält die Mittelwerte  $\langle a_0 \rangle = 1/11$ ,  $\langle a_1 \rangle = 1/9$ ,  $\langle b_0 \rangle = 0/8 = 0$  und  $\langle b_1 \rangle = 0/12 = 0$ .

Ferner kann der Quiz-Master, der alle von ihm gestellten Fragen und alle Antworten aufgezeichnet hat, Durchschnittswerte für vier Produkte  $a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0$  und  $a_1b_1$  berechnen. Alice und Bob können diese Produkte ohne Datenaustausch nicht berechnen. Jedes der vier Produkte kann nur den Wert  $-1$  oder  $+1$  annehmen, aber in jedem Versuch wurde nur eine Fragekonstellation  $(x, y)$  gestellt und nur für das tatsächlich verwendete Fragepaar  $(x, y)$  liegt das Antwortpaar  $(a_x, b_y)$  vor, d.h. in jedem Versuch hat nur eines der vier Produkte einen aufgezeichneten bzw. tatsächlich gemessenen Wert. Gemäß Beispiel in Abbildung 1.1 wurden im Versuch Nummer 1 die Fragen  $(x, y) = (0, 1)$  gestellt und die Antworten  $(a_x, b_y) = (a_0, b_1) = (1, -1)$  wurden vom Quiz-Master aufgezeichnet. In Versuch Nummer 1 ist somit der Wert von  $a_1$  und der Wert von  $b_0$  nicht definiert, weshalb man manchmal bei diesen Werten auch von Kontrafaktualen (*“Counterfactuals“*) spricht.

$a_0$	$a_1$	$b_0$	$b_1$
1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
1	1	1	1
-1	-1	-1	1
1	1	1	-1
1	-1	1	1
1	-1		-1
-1			1
-1			-1
			-1

ABBILDUNG 1.2. Aus den 20 Runden extrahierte Werte für  $a_0, a_1, b_0, b_1$  auf Einzelbasis.

Für die vier Produkte kann der Quiz-Master aus der Versuchsreihe Mittelwerte berechnen. Der Mittelwert wird mit spitzen Klammern als  $\langle \cdot \rangle$  geschrieben. Aus den Mittelwerten der vier Produkte wird die Zahl  $S_1$  durch

$$(1.1) \quad S_1 := \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle$$

definiert. Die Durchschnitte werden dabei jeweils über unterschiedliche Teile der Versuchsreihe berechnet, da jedes Produkt nur auf einem Teil der Versuchsreihe definiert ist.<sup>9</sup>

**Beispiel.** Man betrachte erneut Abbildung 1.1. Hierin findet der Quiz-Master die vier möglichen Fragekonstellation  $(x, y) \in \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$ . Teilt der Quiz-Master die Daten in Abbildung 1.1 gemäß der Fragekonstellationen farbig auf und berechnet jeweils aus den Antworten das Produkt  $ab$ , so erhält er Abbildung 1.3. Man sieht Folgendes:

- **Die Fragekonstellation  $(x, y) = (0, 0)$**  lag 2-mal vor, nämlich bei den Versuchsnummern 7 und 8. Bei Versuchsnummer 7 ergab sich  $a_0 b_0 = 1$ , bei Versuchsnummer 8 hingegen  $a_0 b_0 = -1$ . Somit folgt  $\langle a_0 b_0 \rangle = 1/2 - 1/2 = 0$ .
- **Die Fragekonstellation  $(x, y) = (0, 1)$**  lag 9-mal vor, nämlich bei den Versuchsnummern 1, 4, 6, 9, 13, 16, 17, 18, 20. Bei zwei dieser Versuchsnummern, nämlich bei 16 und 20, ergab sich  $a_0 b_1 = +1$ , ansonsten ergab sich  $a_0 b_1 = -1$ . Es ist somit  $\langle a_0 b_1 \rangle = 2/9 - 7/9 = -5/9 \approx -0,56$ .
- **Die Fragekonstellation  $(x, y) = (1, 0)$**  lag 6-mal vor, nämlich bei den Versuchsnummern 2, 3, 10, 12, 14, 15. Bei drei dieser Versuchsnummern, nämlich bei 10, 12 und 14, ergab sich  $a_1 b_0 = +1$ , ansonsten ergab sich  $a_1 b_0 = -1$ . Es ist somit  $\langle a_1 b_0 \rangle = 3/6 - 3/6 = 0$ .
- **Die Fragekonstellation  $(x, y) = (1, 1)$**  lag 3-mal vor, nämlich bei den Versuchsnummern 5, 11, 19. Bei allen diesen Versuchsnummern ergab sich  $a_1 b_1 = +1$ . Es ist somit  $\langle a_1 b_1 \rangle = 3/3 = 1$ .

<sup>9</sup>Dabei wird davon ausgegangen, dass der Quiz-Master tatsächlich alle vier Fragekonstellationen verwendet, so dass alle vier Durchschnitte aus dem Datensatz berechnet werden können. Die Notation  $S_1 := \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle$  in Gleichung (1.1) folgt [19] und wird deswegen in diesem Kapitel verwendet, deutlicher ist allerdings die Schreibweise  $S_1 := \langle ab \rangle_{00} + \langle ab \rangle_{01} + \langle ab \rangle_{10} - \langle ab \rangle_{11}$ , die wir in [34] verwendet haben, um auszudrücken, dass die vier Mittelwerte aus vier unterschiedlichen Grundgesamtheiten gebildet werden.

Im Beispiel ergibt sich somit eine Zahl von

$$S_1 = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle = 0 - 5/9 + 0 - 1 \approx -1,56. \quad \square$$

Versuch Nr.	Auswertung Quiz-Master				Produkte in den Konstellationen			
	x	y	a	b				
1	0	1	1	-1		-1		
2	1	0	1	-1			-1	
3	1	0	-1	1			-1	
4	0	1	-1	1		-1		
5	1	1	1	1				1
6	0	1	1	-1		-1		
7	0	0	-1	-1	1			
8	0	0	1	-1	-1			
9	0	1	-1	1		-1		
10	1	0	1	1			1	
11	1	1	1	1				1
12	1	0	-1	-1			1	
13	0	1	1	-1		-1		
14	1	0	1	1			1	
15	1	0	-1	1			-1	
16	0	1	1	1		1		
17	0	1	1	-1		-1		
18	0	1	-1	1		-1		
19	1	1	-1	-1				1
20	0	1	-1	-1		1		
					0	-0,56	0	1,00

ABBILDUNG 1.3. Aus den 20 Runden vom Quiz-Master berechnete Werte für die vier Produkte  $a_0 b_0$ ,  $a_0 b_1$ ,  $a_1 b_0$  und  $a_1 b_1$ .

Die zentrale Behauptung ist nun, dass für jede klassische lokale Strategie, bei der die Spieler isoliert in ihren Zimmern ihre jeweiligen Antworten in Unkenntnis der Frage, die dem Spielpartner gestellt wurde, ermitteln, der Wert von  $S_1$  stets im Intervall von  $-2$  bis  $+2$  liegen muss. Dies kann man durch Betrachtung von

$$s_1 := a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1$$

plausibilisieren. Man geht in der Plausibilitätsüberlegung davon aus, dass die vier Zahlen stets alle definiert sind, auch wenn der Quiz-Master in einer Runde nicht alle gleichzeitig abfragen kann.<sup>10</sup> Die Zahlen  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  liegen definitionsgemäß jeweils in der Menge  $\{-1; +1\}$ . Durch Fallunterscheidung sieht man aus der Darstellung  $s_1 = a_0(b_0 + b_1) + a_1(b_0 - b_1)$ , dass  $s_1$  nur den Wert  $-2$  oder  $+2$  annehmen kann.<sup>11</sup> Wegen  $\langle s_1 \rangle = S_1$  liegt  $S_1$  als Durchschnitt von Zahlen, die nur die Werte  $-2$  oder  $+2$  annehmen können, stets im Intervall von  $-2$  bis  $+2$ .

<sup>10</sup>Alice und Bob könnten beispielsweise vor Spielbeginn eine Liste vereinbaren, die festlegt, wie sie bei einer spezifischen Versuchsnummer auf eine Frage antworten werden. Alice könnte zum Beispiel Bob vorab sagen, "wenn in Versuchsnummer 17 die Frage 0 kommt, so antworte ich  $+1$  und falls es Frage 1 ist, mit  $-1$ ". Die Strategie könnte auch komplexer sein, beispielsweise könnte Alice vorab sagen, dass sie stets mit  $-1$  antwortet, wenn der Quiz-Master die Frage mit blauer Tinte auf den Zettel geschrieben hat. Wenn die Frage jedoch mit schwarzer Tinte geschrieben ist, dann wird sie auf die Frage  $x = 0$  mit  $-1$  antworten und auf  $x = 1$  mit  $+1$ . Die Plausibilitätsbetrachtung geht davon aus, dass die Antwortstrategie von Alice und Bob in jeder Runde vorab festgelegt wurde.

<sup>11</sup>In  $s_1 = a_0(b_0 + b_1) + a_1(b_0 - b_1)$  verschwindet der zweite Term, falls  $b_0 = b_1$  gilt. Der erste Term kann nur die Werte  $-2$  oder  $+2$  liefern. Falls  $b_0 = -b_1$ , so verschwindet der erste Term  $a_0(b_0 + b_1)$ . Der zweite Term

Somit muss für jede Versuchsreihe, bei der Alice und Bob ohne weitere Ressourcen isoliert in ihren Zimmern sitzen, die Ungleichung

$$|S_1| \leq 2$$

gelten.

Bei diesem einfachen Argument muss man jedoch vorsichtig sein, denn die vier Mittelwerte  $\langle \cdot \rangle$  werden ja über verschieden große Teilbereiche der Versuchsreihe berechnet und in einem einzelnen Versuch ist  $s_1$  für den Quiz-Master nicht messbar, da von den vier Produkten, die  $s_1$  definieren, für ihn nur eines aus den tatsächlich aufgezeichneten Antworten berechenbar ist. Die hier vorgenommene Plausibilitätsbetrachtung ist also nur sinnvoll, wenn man unterstellt, dass die nichtgemessenen Antworten, d.h. die kontrafaktischen Variablen, definierte Werte aufweisen, zum Beispiel weil Alice und Bob im Vorfeld eine feste Liste vereinbart haben, gemäß derer sie während des Spiels auf verschiedene Fragen antworten wollen. In der Debatte um realistische Theorien, die die Vorhersagen der Quantenmechanik reproduzieren können, ist dies aber genau das Problem.<sup>12</sup> Siehe hierzu auch die Arbeit von Peres mit dem griffigen Titel *Unperformed experiments have no results* [22].

In den nächsten Abschnitten wird die Annahme präzisiert und abgeschwächt und es wird nur gefordert, dass Alice und Bob eine lokale Strategie  $\lambda$  vereinbaren, die aber durchaus zufällige Elemente enthalten darf. Auch unter dieser Annahme lässt sich  $|S_1| \leq 2$  zeigen, falls man für  $\lambda$  die sogenannte *Bell-Lokalität* voraussetzt.

**Beispiel.** Der Leser ist an dieser Stelle eingeladen zu versuchen, ein klassisches Computer-Programm zu schreiben, das zu gegebenen Fragen eine Antworttabelle im Sinne von Abbildung 1.1 generiert. Dabei darf das Programm in jeder Versuchsnummer die Antwort  $a$  in der Spalte bei Alice nur auf Basis der Frage  $x$  ohne Verwendung von  $y$  generieren und die Antwort  $b$  in der Spalte bei Bob nur auf Basis der Frage  $y$  ohne Verwendung von  $x$  erzeugen. Das Programm sollte dann, wie oben beschrieben, aus den generierten Daten den Wert für  $S_1$  berechnen. Die Behauptung wäre, dass sich stets  $|S_1| \leq 2$  ergibt. Man stellt fest, dass es auf diese Weise nicht möglich ist, eine lange Versuchsreihe mit  $|S_1| > 2$  zu erzeugen.

*Bemerkung.* In Aufgabe (3) des Beispiels in Abschnitt 1.1 wurde gefordert, dass Alice und Bob in jeder Runde verschieden antworten, wenn beide Frage “1“ erhalten und dass sie in allen anderen Fällen gleich antworten müssen. Dies bedeutet, es müsste gelten

$$S_1 = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle = +1 + 1 + 1 - (-1) = 4.$$

Aus der zentralen Behauptung  $|S_1| \leq 2$  folgt die Unmöglichkeit, mit einer klassischen lokalen Strategie Beispielaufgabe (3) zu lösen.

---

kann wiederum nur die Werte  $-2$  oder  $+2$  liefern. Somit sind in allen Fällen für  $s_1$  nur die Werte  $-2$  oder  $+2$  möglich.

<sup>12</sup>Bei einer physikalischen Interpretation entspricht die Annahme, dass die Antworten bereits vor Messung existieren, einem einfachen Realismus: Der Spin eines Teilchen sollte in einer gegebenen Richtung  $x$  bereits vor der Messung einen definierten Wert besitzen, der durch den Messvorgang lediglich ausgelesen wird. Diese Denkweise ist naheliegend, denn wenn der Gesamtspin der beiden Teilchen eine Erhaltungsgröße ist und wenn Alice bereits in einer Richtung den Messwert  $+$  erhalten hat, so muss Bob bei Messung in dieser Richtung an seinem Teilchen mit Sicherheit den Messwert  $-$  erhalten, damit der Gesamtspin bei Null liegt. Der Wert des Spins eines einzelnen Teilchens sollte also ein Element der physikalischen Realität sein. Ein Verdienst von Bell war es, hieraus mittels gewisser Zusatzannahmen eine experimentell überprüfbare Ungleichung herzuleiten. Die messbare Verletzung dieser Ungleichung zeigt die Probleme des einfachen Realismus.

Später wird dargelegt, dass quantenmechanisch verschränkte Teilchen mehr können. Sogenannte *Bell-Zustände* können in physikalischen Experimenten nachweisbar Werte von bis zu  $S_1 = 2\sqrt{2} \approx 2,83$  erzeugen. Wie dies letztendlich möglich ist, ist eine offene Frage. Erwartet man im Rahmen eines einfachen Realismus, dass die verschränkten Teilchen die später festgestellten Messwerte bereits in Form *verborgener Variablen*  $\lambda$  vorher in sich getragen haben, so ist man durch die theoretische Aussage  $|S_1| \leq 2$  in Verbindung mit den experimentell erzielten Messergebnissen im Bereich von bis zu  $S_1 \approx 2,83$  verwirrt oder sogar entsetzt.<sup>13</sup> Für die Praxis bietet die quantenmechanische Verschränkung jedenfalls natürliche Ressourcen, deren Mächtigkeit prinzipiell über klassische Werkzeuge hinausgeht und deren wirtschaftliche Nutzung im Rahmen von Quantentechnologien erst am Anfang steht.<sup>14</sup>

**1.3. Lokalität und No-Signalling.** Im nächsten Abschnitt soll  $|S_1| \leq 2$  mathematisch streng bewiesen werden. Hierzu werden nun die Begriffe *Bell-Lokalität* und *No-Signalling* als Vorarbeit formal definiert.

Das Vorgehen von Alice und Bob lässt sich formal durch einen Prozess  $\lambda$  beschreiben, der die relative Häufigkeit liefert, dass unter der Bedingung, dass die Fragen  $(x, y)$  gestellt wurden, die Antworten  $(a, b)$  vom Quiz-Master registriert werden.

Um die Schreibweise etwas zu vereinfachen, werden ab jetzt die Klammern um das Fragepaar und das Antwortenpaar weggelassen. Statt  $(x, y) = (0, 1)$  schreibt man also kompakter  $xy = 01$ , um die Situation zu beschreiben, in der der Quiz-Master in derselben Runde an Alice Frage 0 und an Bob Frage 1 gestellt hat. Analog schreibt man statt  $(a, b) = (-1, +1)$  einfach  $ab = -+$ . Ferner soll zur Vereinfachung keine Unterscheidung zwischen dem Begriff der relativen Häufigkeiten und dem der Wahrscheinlichkeit vorgenommen werden.

Der Prozess  $\lambda$  ist für den Quiz-Master eine Black-Box. Alice und Bob können verschiedenste Strategien absprechen und Listen mit möglichen Antworten vorab austauschen, Berechnungen durchführen und auch Zufallselemente einführen. Der Quiz-Master kennt ihre Strategie nicht und interessiert sich nur für das Verhalten von Alice und Bob, das er aus der resultierenden gemeinsamen Statistik erkennen kann.

Haben Alice und Bob einen Entscheidungsprozess  $\lambda$  abgesprochen, so haben sie eine nicht notwendigerweise deterministische Methode festgelegt, um für die Inputs  $x, y$  Outputs  $a, b$  festzulegen. Der Entscheidungsprozess  $\lambda$  liefert also Wahrscheinlichkeiten

$$(1.2) \quad p_\lambda(ab|xy) \text{ mit } xy \in \{00, 01, 10, 11\} \text{ und } ab \in \{--, -+, +-, ++\}.$$

Generell gilt  $p_\lambda(ab|xy) \geq 0$  und die übliche Normierungsbedingung für Wahrscheinlichkeiten

$$\sum_{\substack{ab \in \\ \{++,+-,-+,-\}}} p_\lambda(ab|xy) = p_\lambda(++|xy) + p_\lambda(+ -|xy) + p_\lambda(- +|xy) + p_\lambda(--|xy) = 1$$

für alle  $xy \in \{00, 01, 10, 11\}$ .

Die von Alice und Bob gewählte Strategie muss zudem nicht unveränderlich sein, die beiden können vielmehr vor Spielbeginn mehrere Prozesse  $\lambda$  festlegen, die mit einer gewissen

<sup>13</sup>Dass der einfache Realismus in Verbindung mit der Quantentheorie zu Problemen führt, war natürlich bereits vor den Arbeiten von John Bell bekannt. Niels Bohr wird in diesem Zusammenhang die Aussage "*Anyone who is not shocked by quantum theory has not understood it*" zugeschrieben.

<sup>14</sup>Zur Rolle der Bell-Ungleichungen als geräteunabhängiges Zertifizierungswerkzeug für das Vorliegen von Quantenverschränkungen siehe [19], S. 77ff.

Wahrscheinlichkeit eingesetzt werden. In einem derartigen Fall wären nicht alle Antworten deterministisch vorab festgelegt. Es gibt dann außerdem eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $q(\lambda)$ , die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein spezifischer Prozess  $\lambda$  während des Spiels verwendet wird.

Der Quiz-Master kennt weder  $\lambda$  noch  $q$ , dies sind für ihn verborgene Variablen. Der Quiz-Master sieht nur das *statistisch beobachtbare Verhalten*  $P$  von Alice und Bob über die Spielrunden

$$(1.3) \quad P(ab|xy) = \int p_\lambda(ab|xy)q(\lambda)d\lambda.$$

Die statistische Auswertung durch den Quiz-Master liefert also  $P$ , das heißt 16 Zahlen, die man in Matrixschreibweise ausführlicher als

$$(1.4) \quad P(ab|xy) = \begin{pmatrix} P(++|00) & P(+ -|00) & P(- +|00) & P(--|00) \\ P(++|10) & P(+ -|10) & P(- +|10) & P(--|10) \\ P(++|01) & P(+ -|01) & P(- +|01) & P(--|01) \\ P(++|11) & P(+ -|11) & P(- +|11) & P(--|11) \end{pmatrix}$$

darstellen kann. Betrachtet man als Beispiel die farbig markierten Fragekonstellationen in Abbildung 1.3, so errechnet der Quiz-Master hieraus die Zahlen

$$P(ab|xy) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/9 & 4/9 & 3/9 & 1/9 \\ 2/6 & 1/6 & 2/6 & 1/6 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Generell ist (1.4) eine einfach stochastische  $4 \times 4$  Matrix. Da sich die Wahrscheinlichkeiten zeilenweise zu Eins aufaddieren, hat man ohne zusätzliche Einschränkungen grundsätzlich 12 Freiheitsgrade.

Stellt man sich die Sache als physikalisches Experiment und nicht als Spiel vor, so handelt es sich bei  $\lambda$  um gemeinsame Ursachen in der Vergangenheit.<sup>15</sup>

**Definition.** Aus der gemeinsamen Verteilung  $p_\lambda(ab|xy)$  bzw. aus  $P(ab|xy)$  kann man wie üblich *Randverteilungen*  $p_\lambda(a|xy)$  und  $p_\lambda(b|xy)$  sowie  $P(a|xy)$  und  $P(b|xy)$  berechnen, d.h.

$$\begin{aligned} p_\lambda(a|xy) &:= \sum_{b=+,-} p_\lambda(ab|xy), \\ p_\lambda(b|xy) &:= \sum_{a=+,-} p_\lambda(ab|xy), \\ P(a|xy) &:= \sum_{b=+,-} P(ab|xy), \\ P(b|xy) &:= \sum_{a=+,-} P(ab|xy). \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Liegt eine Messreihe und damit das statistisch beobachtete Verhalten für zwei verschränkte Teilchen vor, so sucht man in der Physik oft nach kausalen Erklärungen. Mathematisch gesehen lässt sich zu einem gegebenen Verhalten  $P(ab|xy)$  stets ein Raum  $\Lambda$  finden, so dass Gleichung (1.3) gilt, wenn man das Integral als Integral über alle  $\lambda \in \Lambda$  versteht und  $p_\lambda(ab|xy)$  sowie  $q(\lambda)$  geeignet festlegt. Siehe hierzu [19, 23].

Ein statistisch beobachtetes Verhalten  $P$  kann man formal stets in der Form von Gleichung (1.3) darstellen. Dies ist allerdings unbefriedigend, solange man nicht gewisse Eigenschaften für  $\lambda$  vorliegen hat. Hierbei unterscheidet man die Begriffe *Lokalität* und *No-Signalling*. Zunächst soll der Begriff No-Signalling auf Ebene der Strategie und auf Ebene der beobachtbaren Verhaltensstatistik formal definiert werden.

**Definition.** (1) Die Strategie  $\lambda$  erfüllt *No-Signalling*, falls die Antwortwahrscheinlichkeit von Alice nicht von der an Bob gerichteten Frage abhängt

$$p_\lambda(a|x0) = p_\lambda(a|x1) \text{ für alle } a \in \{-1; +1\}, x \in \{0; 1\}$$

und falls zudem die Antwortwahrscheinlichkeit von Bob nicht von der an Alice gerichteten Frage abhängt

$$p_\lambda(b|0y) = p_\lambda(b|1y) \text{ für alle } b \in \{-1; +1\}, y \in \{0; 1\}.$$

(2) Das statistisch beobachtete Verhalten  $P$  erfüllt *No-Signalling*, falls gilt

$$P(a|x0) = P(a|x1) \text{ für alle } a \in \{-1; +1\}, x \in \{0; 1\},$$

$$P(b|0y) = P(b|1y) \text{ für alle } b \in \{-1; +1\}, y \in \{0; 1\}.$$

Ist No-signalling erfüllt, so kann man  $p_\lambda(a|x) := p_\lambda(a|x0) = p_\lambda(a|x1)$  und  $p_\lambda(b|y) := p_\lambda(b|0y) = p_\lambda(b|1y)$  definieren.

Erfüllt die Strategie  $\lambda$  die No-Signalling-Bedingung, so tut dies auch das beobachtete Verhalten, wie man leicht mittels Gleichung (1.3) zeigen kann:

$$\begin{aligned} P(a|x0) &= \sum_{b=+,-} P(ab|x0) = \sum_{b=+,-} \int p_\lambda(ab|x0)q(\lambda)d\lambda = \int p_\lambda(a|x0)q(\lambda)d\lambda \\ &= \int p_\lambda(a|x1)q(\lambda)d\lambda = \sum_{b=+,-} \int p_\lambda(ab|x1)q(\lambda)d\lambda = \sum_{b=+,-} P(ab|x1) = P(a|x1). \end{aligned}$$

Für  $P(b|x0)$  argumentiert man analog.

*Bemerkung.* Es gibt Beispiele, bei denen die Strategie  $\lambda$  die No-Signalling-Bedingung verletzt, das beobachtete Verhalten jedoch No-Signalling erfüllt, siehe Exercise 2.1 in [19]. Die No-Signalling Bedingung stellt eine Einschränkung für die Statistik dar. Unter Berücksichtigung dieser Einschränkung hat man in der Darstellung (1.4) statt 12 nur 8 freie Parameter, siehe Section 2.2.2. in [19].

Weshalb erwartet man in einem physikalischen Setup, dass das beobachtete Verhalten die No-Signalling-Bedingung erfüllt? Wäre etwa

$$P(a|x0) \neq P(a|x1),$$

so würde die lokale Statistik für Alice, die in ihrem isolierten Zimmer ja alle Aufzeichnungen zu den ihr gestellten Fragen  $x$  und den von ihr gegebenen Antworten  $a$  vorliegen hat, davon abhängen, ob Bob die Frage  $y = 0$  oder die Frage  $y = 1$  gestellt wurde.

**Definition.** Eine Strategie  $\lambda$  heißt *lokal im Sinne von Bell*, falls für die Antwortwahrscheinlichkeit gilt

$$p_\lambda(ab|xy) = p_\lambda(a|x)p_\lambda(b|y) \text{ für alle } a, b \in \{-1; +1\}, x, y \in \{0; 1\}.$$

In der Physik wird vor dem Hintergrund der EPR-Debatte und den Arbeiten von Bell hierbei auch von der *LV*-Bedingung bzw. *Lokalen-Variablen*-Bedingung gesprochen.<sup>16</sup> Statt *lokal im Sinne von Bell* wird von Physikern oft auch nur der Begriff *lokal* verwendet. Mathematisch gesehen handelt es sich um eine Bedingung für stochastische Unabhängigkeit. Lokalität bedeutet, dass in jeder Spielrunde Alice bei der Festlegung ihrer Antwort  $a$  unabhängig von der an Bob gerichteten Frage  $y$  vorgehen muss und dass umgekehrt auch Bob bei der Festlegung seiner Antwort  $b$  unabhängig von der an Alice gerichteten Frage  $x$  handeln muss.

Eine lokale Strategie  $\lambda$  erfüllt stets No-Signalling, denn

$$\begin{aligned} p_\lambda(a|x0) &= \sum_{b=+,-} p_\lambda(ab|x0) = \sum_{b=+,-} p_\lambda(a|x)p_\lambda(b|0) = p_\lambda(a|x) \sum_{b=+,-} p_\lambda(b|0) \\ &= p_\lambda(a|x) \sum_{b=+,-} p_\lambda(b|1) = \sum_{b=+,-} p_\lambda(a|x)p_\lambda(b|1) = \sum_{b=+,-} p_\lambda(ab|x1) = p_\lambda(a|x1). \end{aligned}$$

Analog zeigt man  $p_\lambda(b|0y) = p_\lambda(b|1y)$ . No-Signalling ist eine schwächere Bedingung als Lokalität, denn No-Signalling betrifft nur die Randverteilungen.

Gäbe es nicht die experimentellen Befunde der Quantenmechanik, so wären die beiden Konzepte und die eingeführte Unterscheidung eher uninteressant, denn man würde klassisch einfach annehmen, dass Alice während des Spiels mit Bob kommunizieren kann oder eben nicht.<sup>17</sup> Die Bell-Experimente zeigen jedoch, dass es in der Natur noch mindestens einen weiteren Fall gibt, nämlich die Arbeit mit verschränkten Systemkomponenten. Die Überlassung von Teilchen, die zu verschränkten Teilchenpaaren gehören, stellt eine *nichtlokale Ressource* für Alice und Bob dar. Diese erlaubt Alice und Bob zwar nicht die Kommunikation, gestattet jedoch mehr als die unter Bell-Lokalität möglichen Dinge.<sup>18</sup>

**1.4. Beweis der CHSH-Ungleichung.** Die Aussage  $|S_1| \leq 2$  wird als CHSH-Ungleichung nach den vier Autoren Clauser-Horne-Shimony-Holt [24] bezeichnet. Die ursprünglich von Bell im Jahr 1964 aufgestellte Ungleichung hatte eine andere Form, für praktische Anwendungen ist die CHSH-Form jedoch besser geeignet als die ursprüngliche Bell-Ungleichung. Generell wird heute jedes Kriterium, das es ermöglicht, teilweises nichtlokales Verhalten von der LV-Bedingung abzugrenzen, als Bell-Ungleichung bezeichnet.<sup>19</sup> Der nun folgende Beweis der CHSH-Ungleichung ist wiederum einer Arbeit von John Bell entlehnt.<sup>20</sup>

**Satz.** *Die Strategie  $\lambda$  sei lokal im Sinne von Bell. Dann gilt*

$$|S_1| = | \langle a_0b_0 \rangle + \langle a_0b_1 \rangle + \langle a_1b_0 \rangle - \langle a_1b_1 \rangle | \leq 2,$$

wobei die Mittelwerte über das statistisch beobachtbare Verhalten als

$$\langle a_xb_y \rangle := \langle ab \rangle_{xy} := \sum_{a,b} abP(ab|xy) = \sum_{a,b} ab \int p_\lambda(ab|xy)q(\lambda)d\lambda$$

für  $x, y \in \{0; 1\}$  definiert sind.

<sup>16</sup>Das beobachtete Verhalten  $P$  heißt lokal, falls es sich als Konvexkombination von lokalen Strategien schreiben lässt. Dieser Begriff wird jedoch hier nicht weiter benötigt.

<sup>17</sup>Kommunikation bedeutet dabei, dass Alice und Bob Signale austauschen, was physikalisch gesehen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit geschehen kann.

<sup>18</sup>Zum Thema Verschränkung als Grundlage für das Quantencomputing siehe [20].

<sup>19</sup>Siehe [19], S. 35.

<sup>20</sup>Siehe [18], S. 37.

*Beweis.* Aus der Bell-Lokalität folgt für alle fest gewählten  $x, y \in \{0; 1\}$

$$\begin{aligned}
\langle a_x b_y \rangle &= \sum_{a,b} ab P(ab|xy) = \sum_{a,b} ab \int p_\lambda(ab|xy) q(\lambda) d\lambda \\
&= \int \sum_{a,b} ab p_\lambda(a|x) p_\lambda(b|y) q(\lambda) d\lambda \\
&= \int \left( \sum_a a p_\lambda(a|x) \right) \left( \sum_b b p_\lambda(b|y) \right) q(\lambda) d\lambda \\
&= \int \langle a \rangle_{x\lambda} \langle b \rangle_{y\lambda} q(\lambda) d\lambda,
\end{aligned}$$

wobei  $\langle a \rangle_{x\lambda}$  den Erwartungswert für die Antworten von Alice unter der Strategie  $\lambda$  und der Bedingung, dass die Frage  $x$  gestellt wurde, bezeichnet. Analog bezeichnet  $\langle b \rangle_{y\lambda}$  den Erwartungswert für die Antworten von Bob.

Damit ergibt sich mittels Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle| &= \left| \int [\langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{0\lambda} - \langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda}] q(\lambda) d\lambda \right| \\
&= \left| \int [\langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{0\lambda} \pm \langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{0\lambda} \langle a \rangle_{0\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda} \mp \langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{0\lambda} \langle a \rangle_{0\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda} - \langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda}] q(\lambda) d\lambda \right| \\
&= \left| \int \langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{0\lambda} [1 \pm \langle a \rangle_{0\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda}] q(\lambda) d\lambda - \int \langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda} [1 \pm \langle b \rangle_{0\lambda} \langle a \rangle_{0\lambda}] q(\lambda) d\lambda \right| \\
&\leq \left| \int \langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{0\lambda} [1 \pm \langle a \rangle_{0\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda}] q(\lambda) d\lambda \right| + \left| \int \langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda} [1 \pm \langle b \rangle_{0\lambda} \langle a \rangle_{0\lambda}] q(\lambda) d\lambda \right| \\
&\leq \int |\langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{0\lambda}| \cdot |1 \pm \langle a \rangle_{0\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda}| q(\lambda) d\lambda + \int |\langle a \rangle_{1\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda}| \cdot |1 \pm \langle b \rangle_{0\lambda} \langle a \rangle_{0\lambda}| q(\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

Da die Mittelwerte  $\langle a \rangle_{x\lambda} \langle b \rangle_{y\lambda}$  zwischen  $-1$  und  $+1$  liegen müssen, vereinfachen sich die beiden letzten Integrale und man erhält

$$\begin{aligned}
|\langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle| &\leq \int |1 \pm \langle a \rangle_{0\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda}| q(\lambda) d\lambda + \int |1 \pm \langle b \rangle_{0\lambda} \langle a \rangle_{0\lambda}| q(\lambda) d\lambda \\
&= \int (1 \pm \langle a \rangle_{0\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda}) q(\lambda) d\lambda + \int (1 \pm \langle b \rangle_{0\lambda} \langle a \rangle_{0\lambda}) q(\lambda) d\lambda \\
&= \int q(\lambda) d\lambda \pm \int \langle a \rangle_{0\lambda} \langle b \rangle_{1\lambda} q(\lambda) d\lambda + \int q(\lambda) d\lambda \pm \int \langle b \rangle_{0\lambda} \langle a \rangle_{0\lambda} q(\lambda) d\lambda \\
&= 1 \pm \langle a_0 b_1 \rangle + 1 \pm \langle a_0 b_0 \rangle = 2 \pm (\langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_0 b_0 \rangle)
\end{aligned}$$

und damit

$$|\langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle| + |\langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_0 b_0 \rangle| \leq 2.$$

Daraus folgt die Behauptung

$$\begin{aligned}
|S_1| &= |\langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle| \\
&\leq |\langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_0 b_0 \rangle| + |\langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle| \leq 2.
\end{aligned}$$

□

**1.5. CHSH in der Quantentheorie.** Die bisherigen Betrachtungen betrafen die Definition und die praktische Berechnung der Größe  $S_1$  aus einer Folge von Experimenten bzw. Spielrunden sowie die Herleitung einer Obergrenze von 2 unter gewissen Annahmen. Die Regeln der Quantenmechanik, die Hilbert-Raum-Struktur oder Operatoren wurden hierfür nicht benötigt. Für das Verständnis der experimentell gemessenen Werte für  $S_1$  in Höhe von bis zu  $2\sqrt{2}$  benötigt man jedoch die formalen Regeln der Quantenmechanik, die in diesem Abschnitt vorausgesetzt werden.<sup>21</sup>

Nach den Regeln der Quantentheorie gilt:<sup>22</sup> Das verschränkte Zweiteilchensystem muss als ein einziges Objekt auf dem Tensorproduktraum  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  beschrieben werden, auch wenn Alice und Bob weit voneinander entfernt sind. Alice kann an dem ihr zugänglichen Teil des Systems lediglich eine Spin-Messung in Richtung  $x$  durchführen, die entweder das Ergebnis  $-1$  oder  $+1$  liefert. Formal lässt sich dies durch die beiden hermiteschen Operatoren  $\Pi_{+1}^x$  und  $\Pi_{-1}^x$  auf  $\mathcal{H}_A$  beschreiben. Da eines der Messergebnisse auftreten muss, ist  $\Pi_{+1}^x + \Pi_{-1}^x = \text{Id}_A$ . Analog misst Bob an dem ihm zugänglichen Teilchen den Spin in Richtung  $y$ , was formal wiederum durch die hermiteschen Operatoren  $\Pi_{+1}^y$  und  $\Pi_{-1}^y$  dem Hilbertraum  $\mathcal{H}_B$  beschrieben wird. Wiederum gilt  $\Pi_{+1}^y + \Pi_{-1}^y = \text{Id}_B$ .

Die Größe  $S_1$  kann in der Quantenmechanik durch den Operator

$$S_1 = A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1$$

beschrieben werden. Dabei ist  $A_x := \Pi_{+1}^x - \Pi_{-1}^x$  und  $B_y := \Pi_{+1}^y - \Pi_{-1}^y$  für  $x, y \in \{0; 1\}$ . Der Operator  $S_1$  lebt auf dem Tensorproduktraum  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , seine Messung ist somit nicht von Alice oder Bob alleine durchführbar.

Wengleich die in Gleichung (1.1) definierte Zahl  $S_1$  ohne weitere Einschränkungen Werte im Bereich von  $-4$  bis  $+4$  annehmen kann, so kann der obige Operator nur Eigenwerte bis zu einem Maximalwert von  $2\sqrt{2}$  haben. Diese Aussage wird als *Tsirelson-Schranke* bezeichnet. Genauer gesagt gilt der

**Satz.** Für alle Zustände  $|\psi\rangle$  aus dem Tensorproduktraum  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  ist

$$|\langle \psi | S_1 | \psi \rangle| \leq 2\sqrt{2}.$$

Insbesondere kann eine Messung von  $S_1$  nach den Regeln der Quantenmechanik nie mehr als den Wert  $2\sqrt{2} \approx 2,83$  liefern.

*Beweis.* Man verifiziert die Identität

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_0^2 + A_1^2 + B_0^2 + B_1^2) - \frac{\sqrt{2}-1}{8}Q$$

mit dem wie folgt definierten Operator  $Q$

$$\begin{aligned} Q := & \left( (\sqrt{2}+1)(A_0 - B_0) + A_1 - B_1 \right)^2 + \left( (\sqrt{2}+1)(A_0 - B_1) - A_1 - B_0 \right)^2 \\ & + \left( (\sqrt{2}+1)(A_1 - B_0) + A_0 + B_1 \right)^2 + \left( (\sqrt{2}+1)(A_1 + B_1) - A_0 - B_0 \right)^2 \end{aligned}$$

<sup>21</sup>Soweit diese nicht bekannt sind, kann man diesen Abschnitt überspringen oder alternativ beispielsweise [25] für Details zum Formalismus der Quantentheorie konsultieren.

<sup>22</sup>Siehe Kapitel 3.2 in [19].

direkt per Hand oder mit Hilfe eines Computer-Algebra-Programms. Der Operator  $Q$  ist offensichtlich positiv semidefinit. Somit gilt für  $\|S_1\|_\infty := \max_\psi |\langle \psi S_1 \psi \rangle|$  die Abschätzung

$$\|S_1\|_\infty \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(A_0^2 + A_1^2 + B_0^2 + B_1^2) \right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (\|A_0\|_\infty^2 + \|A_1\|_\infty^2 + \|B_0\|_\infty^2 + \|B_1\|_\infty^2) \leq \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Da Messwerte nach den Postulaten der Quantenmechanik stets Eigenwerte von Operatoren sind, folgt hieraus die behauptete obere Schranke für die quantenmechanisch möglichen Messergebnisse für  $S_1$ .  $\square$

**1.6. Befunde der experimentellen Quantenphysik.** Unter Verwendung von Paaren quantenmechanisch verschränkter Teilchen als zusätzliche Ressource können Alice und Bob für das in Abschnitt 1.1 beschriebene Spiel Statistiken mit  $S_1 > 2$  erzeugen, ohne dafür während des Quiz miteinander kommunizieren zu müssen. Dies zeigt, dass die quantenmechanische Verschränkung fundamental mehr ermöglicht als klassische Ressourcen. Nach aktuellem Kenntnisstand scheint die Entfernung beziehungsweise die Art der physikalischen Abschirmung, die Alice und Bob trennt, für den Einsatz dieser Ressource keinerlei Rolle zu spielen.

Während für technologische Anwendungen, beispielsweise im Bereich des Quantumcomputing, die verschränkten Teilchen sinnvollerweise räumlich benachbart sind, möchte man bei fundamentalen Fragestellungen sichergehen, dass eine wie auch immer geartete Kommunikation zwischen Alice und Bob oder den verschränkten Teilchen prinzipiell unmöglich ist. Hierzu ist es wichtig, dass eine sogenannte raumzeitliche Trennung vorliegt, das heißt, der räumliche Abstand zwischen Alice und Bob muss so groß und der zeitliche Abstand zwischen ihren Messungen und Entscheidungen so klein gewählt werden, dass eine Kommunikation Signalübertragungsgeschwindigkeiten oberhalb der Lichtgeschwindigkeit erfordern würde, was nach den Prinzipien der Relativitätstheorie physikalisch unmöglich ist.

In diesem Abschnitt sollen kurz aktuelle physikalische Experimente zu den fundamentalen Fragestellungen erwähnt werden.<sup>23</sup> Solche Experimente sind prinzipiell mit Photonen, aber auch mit Teilchen mit positiver Ruhemasse, wie Elektronen oder Atomen, durchführbar. Paare verschränkter Photonen werden zum Beispiel erzeugt, indem man Laserlicht in Kristalle mit nichtlinearen optischen Eigenschaften einschießt, so dass aus einem Photon gelegentlich zwei Photonen niedriger Energie entstehen. Die beiden Photonen können bezüglich ihrer Polarisation verschränkt und dann getrennt zu Alice und Bob gesendet werden. Bei Elektronen oder Ionen verschränkt man meist interne Freiheitsgrade, wie zum Beispiel *Energieniveaus*, die Versendung dieser Teilchen über weitere Entfernung ist jedoch in der Praxis problematisch.

Nach den anfänglichen Ideen von John Bell aus dem Jahre 1964 dauerte es zunächst bis 1982 bis Alain Aspect die ersten tatsächlichen Experimente durchführen konnte, bei denen die Messrichtungen von Alice und Bob erst nach dem Absenden der verschränkten Photonen festgelegt werden [26]. Methodische Einwände bestehen bei derartigen Experimenten unter anderem darin, dass reale Detektoren nicht alle Teilchen sicher messen können (*“detection loophole“*), dass es schwierig ist, die beiden verschränkten Teilchen und die Entscheidung über die Messrichtungen bzw. die Messungen selbst raumzeitlich zu trennen (*“locality loophole“*) und dass die Messrichtungen der Detektoren stets völlig frei und unbeeinflusst gewählt werden müssen (*“freedom of choice loophole“*). Es dauerte bis zum Jahr 2015, bis Experimente

<sup>23</sup>Siehe Anhang B in [19] für eine Einführung.

durchgeführt werden konnten, die als sogenannte “*loophole-free experiments*“ den ersten beiden Einwänden standhielten.

Je nachdem ob Photonen oder Elektronen verwendet werden, hat man im Experiment mit unterschiedlichen Problemen zu kämpfen: Bei Photonen ist es leicht, diese raumzeitlich zu trennen, jedoch sind konventionelle Photonendetektoren nicht besonders effizient, das heißt, sie messen einen hohen Prozentsatz der einfallenden Photonen gar nicht. Verwendet man solche Detektoren und misst man dabei eine Verletzung der Bell-Ungleichung, so wäre es theoretisch möglich, dass die gemessene Verletzung nur daher rührt, dass viele Photonen gar nicht gemessen werden konnten. Erst im Jahre 2015 haben Giustina et al. [27] und Shalm et al. [28] Photonen mit hocheffizienten Detektoren im Tiefsttemperaturbereich messen und entsprechende *loophole-free experiments* durchführen können. Bei Elektronen und Atomen ist es hingegen vergleichsweise einfach, die Zustände mit hoher Effizienz zu detektieren, jedoch ist die raumzeitliche Trennung schwierig. Diese lässt sich prinzipiell erreichen, indem man mit weit voneinander entfernten Teilchen beginnt und diese über *Entanglement Swapping* miteinander verschränkt. Hierzu wurden entsprechende Experimente von Hensen et al. in 2015 an Elektronen durchgeführt [29, 30]. In 2017 wurden von der Gruppe Weinfurter Experimente an elektrisch neutralen Atomen durchgeführt, die räumlich voneinander getrennt zuvor ebenfalls über Entanglement Swapping verschränkt wurden [31].

Mit Blick auf das “*freedom of choice loophole*“ wurden bereits interessante Experimente durchgeführt, bei denen die Messrichtung über das Licht weit entfernter astronomischer Objekte [32] beziehungsweise durch menschliche Willensentscheidungen statt durch Zufallsgeneratoren festgelegt wurde [33].

**1.7. Zur Deutung von Verletzungen der Bell-Ungleichungen.** Die Herleitung der Bell-Ungleichung in den vorherigen Abschnitten erforderte zusätzlich zum unterstellten Realismus<sup>24</sup> zwei grundlegende Annahmen, nämlich

- (i) die Bell-Lokalität und
- (ii) die Entscheidungsfreiheit des Quiz-Masters.

Sind sowohl (i) wie auch (ii) in jeder der Spielrunden gegeben, so folgt in einem realistischen Modell  $|S_1| \leq 2$ . Die experimentell nachgewiesene Verletzung der Bell-Ungleichung, d.h. der empirische Befund  $|S_1| > 2$  in gewissen physikalischen Versuchsanordnungen, zwingt Realisten also zu dem Schluss, dass in der jeweils verwendeten Versuchsanordnung zumindest eine der beiden Annahmen manchmal verletzt sein muss. Steht eine der beiden Annahmen (i) oder (ii) gar nicht zur Disposition, d.h. verlangt man, dass diese stets erfüllt sein muss, so kann man sich fragen, wie häufig die andere Annahme in einem realistischen Modell verletzt sein muss, um das experimentell beobachtete Resultat erzielen zu können.<sup>25</sup>

<sup>24</sup>Unter Realismus wird hierbei, unabhängig von der exakten philosophischen Ausprägung, eine Sichtweise verstanden, die davon ausgeht, dass physikalische Eigenschaften auch unabhängig von einer konkreten Beobachtung existieren. Natürlich sind grundsätzlich auch spontane, ursachenfreie Ergebnisse denkbar, die sich erst bei Beobachtung manifestieren, jedoch stellt sich dann die Frage, woher die bei Beobachtung festgestellten Korrelationen und Strukturen kommen. Im folgenden wird daher Realismus vorausgesetzt.

<sup>25</sup>Die Bell-Ungleichungen zeigen, dass bei einem Spiel mit  $|S_1| > 2$  Alice und Bob eine Niederlage nur vermeiden können, wenn sie schummeln. Anschaulich kann man sich im Rahmen des Spiels vorstellen, dass unter Bedingung (i) Informationsaustausch etwa als Schummelei mittels heimlicher Telefonate zwischen Alice und Bob unmöglich ist. Unter Bedingung (ii) wäre dann eine Schummelei durch Beeinflussung der Fragen des Quiz-Masters z.B. mittels Bestechung ausgeschlossen.

Dieser Frage sind wir in [34] nachgegangen. Der Grundgedanke und ein Ergebnis soll nun kurz dargestellt werden. Dafür betrachten wir statt der einen Messgröße  $S_1$  nunmehr vier Messgrößen  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , die wie folgt definiert sind

$$\begin{aligned} S_1 &:= \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle, \\ S_2 &:= \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle - \langle a_1 b_0 \rangle + \langle a_1 b_1 \rangle, \\ S_3 &:= \langle a_0 b_0 \rangle - \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle + \langle a_1 b_1 \rangle, \\ S_4 &:= -\langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle + \langle a_1 b_1 \rangle. \end{aligned}$$

Man kann analog zu Abschnitt 1.4 beweisen, dass unter Annahme von Realität, Bell-Lokalität und Entscheidungsfreiheit alle vier Größen dem Betrage nach einen Wert von 2 nicht überschreiten können, das heißt

$$(1.5) \quad |S_i| \leq 2 \text{ für alle } i = 1, 2, 3, 4.$$

Interessanterweise ist für den Fall, dass das beobachtete Verhalten die No-Signalling-Bedingung erfüllt, die Bedingung (1.5) nicht nur notwendig sondern auch hinreichend für die Existenz einer lokalen Strategie  $\lambda$ , die das beobachtete Verhalten erzeugt. Dieses Resultat wird als *Satz von Fine* bezeichnet.<sup>26</sup>

Unter dem realistischen Ansatz lassen sich zwei Maße definieren, die berechnen, wie oft (i) oder (ii) verletzt werden muss, um eine Statistik mit  $S$ -Werten über 2 zu erreichen.  $\mu_L$  bezeichnet dabei den maximalen Prozentsatz an Runden, in denen Alice und Bob Bedingung (i) aufrecht erhalten können, wenn für alle Runden Bedingung (ii) gelten muss.  $\mu_F$  bezeichnet den maximalen Prozentsatz an Runden, in denen Alice und Bob Bedingung (ii) aufrecht erhalten können, wenn für alle Runden Bedingung (i) gelten muss. Das Maximum ist dabei jeweils über alle denkbaren Strategien  $\lambda$  zu bilden.<sup>27</sup> Man kann zeigen, dass beide Maße auf dasselbe Ergebnis führen und dass der maximale Prozentsatz im Falle der No-Signalling-Bedingung bereits durch die vier Messgrößen  $S_1, S_2, S_3, S_4$  eindeutig festgelegt wird.

Formal stellt sich dies folgendermaßen dar: Man definiert  $\mu_L$  und  $\mu_F$ , indem man die Menge der möglichen Strategien  $\Lambda$ , die das beobachtete Verhalten  $P(ab|xy)$  im Sinne von Gleichung (1.3) erklären, zerlegt.<sup>28</sup> Zum einen kann man diese Zerlegung im Sinne der Bell-Lokalität vornehmen

$$\Lambda_L := \{ \lambda \in \Lambda \mid p_\lambda(ab|xy) = p_\lambda(a|x)p_\lambda(b|y), \forall a, b \in \{-1; +1\}, x, y \in \{0; 1\} \},$$

zum anderen kann man die Zerlegung im Sinne der Entscheidungsfreiheit vornehmen

$$\Lambda_F := \{ \lambda \in \Lambda \mid p_\lambda(ab|xy) = p_\lambda(ab), \forall a, b \in \{-1; +1\}, x, y \in \{0; 1\} \}.$$

Definiert man die Komplemente als

$$\Lambda_{NL} := \Lambda \setminus \Lambda_L \text{ und } \Lambda_{NF} := \Lambda \setminus \Lambda_F,$$

<sup>26</sup>Siehe [35] für die Originalarbeit und [36] für einen vereinfachten Beweis.

<sup>27</sup>Man kann die Verletzung von (i) beziehungsweise (ii) als Schummeln interpretieren. Die beiden Maße basieren also auf den optimalen Verhaltensweisen für Alice und Bob, wenn eine gegebene Statistik  $P$  erzeugt werden muss und wenn dabei in einer möglichst großen Anzahl von Runden nicht geschummelt werden soll.

<sup>28</sup>Zur Vereinfachung wird für die Menge der erklärenden Strategien im Fall der Gültigkeit von (i) dasselbe Symbol  $\Lambda$  verwendet wie für die Menge der Strategien im Fall der Gültigkeit von (ii).

so erhält man die Zerlegungen der Menge der möglichen Strategien in  $\Lambda = \Lambda_L \cup \Lambda_{NL}$  beziehungsweise in  $\Lambda = \Lambda_F \cup \Lambda_{NF}$ . Die beiden Maße  $\mu_L$  und  $\mu_F$  lassen sich nun formal als

$$\mu_L := \max_{(ii)} \text{Prob}(\Lambda_L) \quad \text{und} \quad \mu_F := \max_{(i)} \text{Prob}(\Lambda_F)$$

definieren, wobei das Maximum über die Strategien (Verhaltensweisen) zu bilden ist. Bei  $\mu_L$  hinsichtlich aller Verhaltensweisen, bei denen in allen Runden (ii) Entscheidungsfreiheit gewahrt bleibt bzw. bei  $\mu_F$  hinsichtlich aller Verhaltensweisen, bei denen in allen Runden (i) Bell-Lokalität gegeben ist. *Prob* bezeichnet die relative Häufigkeit, mit der bestimmte Verhaltensweisen eingesetzt werden.

Man kann auf dieser Basis ohne Einsatz des Formalismus der Quantenmechanik mathematisch beweisen, dass für jede Verhaltensstatistik generell  $\mu_L = \mu_F$  gelten muss. Hat man ein statistisch beobachtetes Verhalten, das der No-Signalling Bedingung genügt, so kann man den Zahlenwert für die beiden Maße direkt aus den vier betrachteten statistischen Kennzahlen  $S_i$  ermitteln

$$\mu_L = \mu_F = \begin{cases} \frac{1}{2}(4 - S_{max}), & \text{falls } S_{max} > 2, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zahl  $S_{max}$  ist dabei als

$$S_{max} := \max\{|S_1|, |S_2|, |S_3|, |S_4|\}$$

berechenbar.<sup>29</sup>

---

<sup>29</sup>Siehe Theorem 2 in [34]. Gilt für alle vier Kenngrößen  $|S_i| \leq 2$ , so ist insbesondere  $\mu_L = \mu_F = 1$  und Alice und Bob können die vorgegebene Statistik  $P$  erzeugen, ohne jemals schummeln zu müssen.

## 2. BELL-KORRELATIONEN FÜR FINANZMARKTDATEN

Beim Thema der globalen Finanzmärkte hat man es grundsätzlich mit einem sehr komplexen System zu tun, aus dem nur einzelne Komponenten beobachtet werden können. Zudem sind für die beobachtbaren Komponenten Umfang und Qualität der verfügbaren Daten sehr unterschiedlich. Auch wenn für Finanzmärkte oft Statistik betrieben wird, so besitzt man durch die empirischen Daten generell nur *einen einzigen* Entwicklungsverlauf, der sich historisch tatsächlich ereignet hat. Alternative, grundsätzlich vorstellbare Verläufe sind kontrafaktisch und objektiv undefiniert. Damit man Statistik betreiben kann, unterstellt man, dass der einzige vorliegende Entwicklungsverlauf aus unabhängigen Realisationen aufgebaut ist, obwohl es sich eigentlich um eine einzige Historie handelt, die aus verschiedenen Regimen besteht.<sup>30</sup>

*Bemerkung.* Ein zentrales Problem bei Anwendungsproblemen im Finanzbereich ist die Schätzung künftiger Renditen, Volatilitäten und Korrelationen zwischen verschiedenen Finanzinstrumenten. Das bekannte Markowitz-Modell [37] erfordert beispielsweise für alle betrachteten Wertpapiere eine Annahme für die erwartete künftige Rendite jeder Anlagemöglichkeit und eine Annahme für die Kovarianzmatrix zwischen den jeweiligen Renditen. Hat man derartige Annahmen für die Statistik künftiger Wertentwicklungen getroffen, so kann man unter dem Modell beispielsweise ein Portfolio berechnen, dessen Renditeerwartung bei einer vorgegebenen darstellbaren Standardabweichung maximal ist. Das Markowitz-Modell liefert auf dieser Basis ein effizientes, d.h. in Bezug auf Renditeerwartung vs. Risiko optimales, Gesamtportfolio mit einer theoretisch exakt berechenbaren Gewichtung für die eingesetzten Finanzinstrumente. Auch bei Anwendungen des bekannten Capital Asset Pricing Modells [38] hat man es oft mit praktischen Schätzproblemen zu tun, etwa wenn das künftige Beta für ein Finanzinstrument in Relation zum Gesamtmarkt zu schätzen ist.

Bei der Schätzung der Parameter Rendite, Standardabweichung und Korrelationen findet sich meist das folgende Vorgehen in der Praxis: Man betrachtet die Zeitreihe historisch aufgezeichneter Preise und schätzt aus den täglichen Wertänderungen mit den bekannten statistischen Methoden die entsprechenden Parameter, die dann mit oder ohne Anpassung für die Zukunft als gültig unterstellt werden. Dabei unterstellt man implizit, dass die täglichen Wertänderungen aus derselben Grundgesamtheit unabhängig gezogen wurden. Auf diese Weise erhält man zum Beispiel aus drei Jahren mit börsentäglich aufgezeichneten Schlusskursen 750 Datenpunkte, aus denen man Standardabweichung und Korrelation schätzen kann.<sup>31</sup> Die Voraussetzung, dass es sich um 750 unabhängige Stichproben aus derselben Grundgesamtheit handelt, ist dabei aber meist nicht erfüllt. Würde man eine derartige Betrachtung am Ende des Jahres 2020 durchführen, so hätte man zum Beispiel zu Beginn der drei Jahresperiode eine eher wachstumsorientierte Marktphase und am Ende der drei Jahre eine durch die Covid-19 Pandemie bedingte Sondersituation vorliegen. In einer beliebigen Zeitperiode müssen die verschiedenen Regime nicht immer derart angeordnet sein, dass man zwei zeitlich hintereinanderliegende Marktphasen abgrenzen kann. Die unterschiedlichen Regime können

<sup>30</sup>Auch wenn es offensichtlich ist, möchte ich an dieser Stelle explizit darauf hinweisen, dass im globalen Finanzmarkt natürlich keine physikalischen Quanteneffekte auftreten können, denn der Finanzmarkt ist ein makroskopisches System.

<sup>31</sup>Man rechnet meist mit 250 Börsenhandelstagen pro Kalenderjahr.

im Datensatz durchmischt sein, so gibt es beispielsweise generell ereignisreiche und ereignisarme bzw. volumenreiche und volumenarme Börsenhandelstage. Diese unterschiedlichen Regime werden beim üblichen statistischen Ansatz für die Berechnung von Korrelationen und Renditen in einen Topf geworfen, so dass man mittels der tatsächlich gegebenen einzigen aufgezeichneten Historie klassische Statistik betreiben kann.

**2.1. Zielsetzung und Überblick.** Diese Abhandlung soll eine beispielhafte Anwendung des Ansatzes von Bell auf das Finanzmarktsystem vorstellen. Das Ziel ist eine quantitative Untersuchung der Zusammenhangsstärke zwischen zwei Systemkomponenten.

Für den im ersten Kapitel dargestellten Ansatz werden zwei Komponenten,  $A$  und  $B$ , des Systems gleichzeitig betrachtet. Es werden zwei verschiedene Regime  $x, y$  definiert, die die Rolle der Fragen an das System übernehmen. Sobald die Variablen definiert sind, ist die statistische Kenngröße  $S_1$ , wie in Abschnitt 1.2 dargestellt, aus den beobachtbaren Marktdaten berechenbar. Der Einfachheit halber sollen aus den Finanzmarktdaten nur Ja-Nein-Antworten extrahiert werden, die aufgezeichneten Antworten  $a$  für Systemkomponente  $A$  beziehungsweise  $b$  für Systemkomponente  $B$  dürfen also jeweils nur die Werte  $-1$  oder  $+1$  annehmen.<sup>32</sup>

Das vorliegende Kapitel 2 ist wie folgt aufgebaut: Es folgt eine kurze Beschreibung grundsätzlich existierender Datenkategorien und danach ein beispielhaft gewählter konkreter Setup für den amerikanischen Aktienmarktindex S&P 500. Für das Beispiel werden nur Kursdaten herangezogen, wenngleich die Einbeziehung weiterer Daten problemlos möglich ist. Für die einzelnen S&P-500 Aktien werden paarweise klassische Korrelationen mit den  $S_1$ -Werten verglichen. Im Sinne eines Proof-of-Concept lässt sich dabei feststellen, dass die Kenngröße  $S_1$  ebenso wie die klassischen Korrelationen die sektorale Struktur des US-Aktienmarktes zeigt. Ferner lässt sich feststellen, dass im gewählten Setup  $|S_1| > 2$  empirisch auftritt. Auf theoretischer Ebene wird die Frage nach dem Vorliegen der No-Signalling-Bedingung diskutiert und ein kurzer Vergleich mit dem Lognormalverteilungsmodell als bekanntestem parametrischen Modell vorgenommen.

**2.2. Datenkategorien.** Es gibt unterschiedliche Quellen und Kategorien von Daten, die für Finanzmarktfragen relevant sind. Während man meist an Finanzmarktdaten im engeren Sinne, d.h. an gehandelte Preise, denkt, so existieren zudem auch Fundamentaldaten, Finanzmarktanalysen und alternative Daten.<sup>33</sup>

**2.2.1. Finanzmarktdaten.** Finanzmarktdaten entstehen durch die Aufzeichnung von Transaktionspreisen für Wertpapiere und andere Finanzmarktinstrumente, wie zum Beispiel derivative Kontrakte. Diese werden von klassischen Börsen oder auch von multilateralen Handelssystemen (sogenannten *MTFs*) gesammelt. Die Datensätze bestehen i.a. aus einem Transaktionszeitpunkt  $t$ , einer gehandelten Größenordnung  $V_t^j$  (*Volumen*) und einem vereinbarten Preis  $S_t^j$  für ein Finanzmarktinstrument  $j$ . Diese Daten werden teilweise live aufgezeichnet, wie es bei den regulierten Börsen mit einem transparenten Orderbuchverfahren der Fall ist, oder nachträglich gemeldet, wie es teilweise bei OTC-Transaktionen der Fall ist. Neben den tatsächlich gehandelten Transaktionspreisen gibt es Geld- oder Briefseiten, die temporär in

<sup>32</sup>Die Erweiterung des Bellschen Setups auf den allgemeinen diskreten Fall  $x \in \{1, \dots, M_A\}$ ,  $a \in \{1, \dots, m_A\}$  und  $y \in \{1, \dots, M_B\}$ ,  $b \in \{1, \dots, m_B\}$  ist möglich und in [19], S. 25ff beschrieben.

<sup>33</sup>Siehe [39], S. 23f.

ein Orderbuch gestellt wurden, jedoch nicht zur Ausführung kamen. Die Datenmengen können sehr groß werden und viele Daten sind nur in aggregierter Form verfügbar. Zudem werden teilweise nachträgliche Adjustierungen der Preise, zum Beispiel für Kapitalmaßnahmen oder Ausschüttungen, vorgenommen.

**2.2.2. *Fundamentaldaten.*** Fundamentaldaten beinhalten Statistiken, die auf volkswirtschaftlicher Ebene erstellt werden, aber auch Jahres- oder Quartalsberichte von Einzelunternehmen mit Daten zu Verschuldung, Profitabilität, Umsatzentwicklungen, etc. sowie Umfrageergebnisse beispielsweise zu Verbrauchervertrauen oder Geschäftsklima. Diese Daten werden typischerweise zeitverzögert veröffentlicht. Beispielsweise werden Daten für das 2. Geschäftsquartal zwar unter dem 30. Juni gezeigt, stehen jedoch meist erst deutlich später dem Markt zur Verfügung und werden manchmal auch nachträglich korrigiert, weshalb man bei synchronen Betrachtungen vorsichtig vorgehen muss.

**2.2.3. *Finanzmarktanalysen.*** Finanzmarktanalysen beinhalten Berichte und Empfehlungen von professionellen Analysten und Ratingagenturen. Kauf- und Verkaufsempfehlungen, Rating-Änderungen und Schätzungen für künftige Unternehmensgewinne fallen in diese Kategorie. Auch diese Daten werden oftmals zeitverzögert beziehungsweise sogar nur für ausgewählte Kunden zur Verfügung gestellt.

**2.2.4. *Alternative Daten.*** Zu dieser relativ neuen Kategorie gehören Daten aus dem Bereich der sozialen Medien, Suchanfragen bei Google aber auch Daten von Sensoren und Satelliten. Verschiedene Anbieter und Marktteilnehmer vermuten hier ungenutzte Informationen mit Vorhersagekraft. Dies betrifft nicht nur das Meinungsbild, das sich aus Twitter-Nachrichten, Chat-Rooms und journalistischen Textmeldungen ergibt, sondern auch zusätzliche zeitnah erhobene Fakten, so zum Beispiel Informationen über das Weihnachtsgeschäft aus Daten über die Parkplatzbelegung oder das Verkehrsaufkommen auf den Straßen. Gegenüber offiziellen, zeitverzögert veröffentlichten Fundamentaldaten haben derartige alternative Daten den Vorteil der zeitnahen Verfügbarkeit.

**2.3. *Klassische Korrelationen am Finanzmarkt.*** Arbeitet man mit täglichen Schlusskursen, so hat man eine Liste von Zeitpunkten  $t_1, t_2, \dots$  vorliegen, die den Spielrunden in Kapitel 1 entsprechen. Für jeden Tag  $t$  gibt es einen Vektor  $S(t)$  mit den Schlusskursen für Wertpapiere und Indices. Dieser Vektor kann im Prinzip um die zu diesem Zeitpunkt vorliegenden Fundamentaldaten, Finanzmarktanalysen und alternativen Daten ergänzt werden. Neben den Preisen  $S$  können also Zahlen wie Handelsvolumen  $V$ , Profitabilitätsschätzungen oder auch Textnachrichten, Audio- oder sogar Video-Daten in den Setup integriert werden.

	$S^1(t)$	$S^2(t)$	$V^1(t)$	$V^2(t)$	...
$t_1$	100,9	78,7	1,10 Mio.	200 Mio.	...
$t_2$	100,3	77,9	1,28 Mio.	231 Mio.	...
$t_3$	...	...	...	...	...

Man berechnet aus diesen Daten die stetigen Renditen  $R$ , d.h. die Preisänderungen von einem Zeitpunkt zum nächsten, für ein Finanzmarktinstrument  $k$  als

$$R^k(t_n) := \ln \left( \frac{S^k(t_n)}{S^k(t_{n-1})} \right) = \ln S^k(t_n) - \ln S^k(t_{n-1}).$$

In der traditionellen Zeitreihenanalyse werden die täglichen Returns zweier Finanzmarktinstrumente  $j, k$  über dieselbe Zeitperiode paarweise verglichen, indem man die Stichprobenkorrelation

$$\rho_{jk} := \text{Corr}(R^j, R^k)$$

aus der Zeitreihe ermittelt. Dieser Ansatz behandelt alle Tagesrenditen statistisch gleich, obwohl die Tage unterschiedlichen Regimen angehören können. Weitere Informationen, wie Handelsvolumen, Profitabilitätsschätzungen oder Textnachrichten, werden dabei meist ignoriert oder separat analysiert.

Betrachtet man beispielsweise den bekannten US-Aktienmarktindex S&P 500, so kann man über einen gegebenen Zeitraum für die einzelnen Aktien aus dem S&P-500-Index paarweise Korrelationen  $(\rho_{jk})_{j,k}$  berechnen. Parallel zu dem rein statistischen Vorgehen kann man eine ökonomische Betrachtung vornehmen, indem man fragt, in welcher Branche die jeweiligen Aktiengesellschaften wirtschaftlich tätig sind. Einzelne Aktien werden hierbei je nach Geschäftsmodell der Firma einem Sektor zugeordnet. Das international bekannte GICS-System verwendet hierfür 11 Sektoren.<sup>34</sup>

Man sollte erwarten, dass die Returns von Aktien innerhalb desselben Sektors statistisch stärker korrelieren als außerhalb, die klassischen Stichprobenkorrelationen sollten also die sektorale Struktur sichtbar machen. Dies ist nicht nur eine Folge der fundamental ähnlich gelagerten Geschäftsaktivitäten von Unternehmen desselben Sektors, sondern auch eine Konsequenz der Art und Weise, wie große Kapitalanleger investieren.

Diese Erwartung wird in der Tat empirisch bestätigt. Abbildung 2.1 zeigt die Heat Map der paarweisen Stichprobenkorrelationen  $(\rho_{jk})_{j,k}$  für die täglichen Schlusskursänderungen der S&P-500 Aktien über drei Jahre. Jede Aktie wurde gemäß der veröffentlichten GICS-Klassifikation genau einem der 11 GICS-Sektoren von *Information Technology* bis *Communication Services* zugeordnet. Zur besseren Darstellung wurden in der Graphik manuell schwarze Trennlinien zwischen den GICS-Sektoren eingefügt. Innerhalb eines Sektors wurden die Aktien gemäß der Stärke der Korrelation geordnet. Auf der Hauptdiagonalen finden sich definitionsgemäß Korrelationen von 1. Die Heat Map ist natürlich symmetrisch, die schwarzen Linien zur Trennung der Sektoren wurden jedoch nur unterhalb der Hauptdiagonalen eingezeichnet. Man erkennt mit bloßem Auge die starken, rot gefärbten Korrelationen zwischen Aktien innerhalb desselben Sektors.

**2.4. Zusammenhangsstärke im Ansatz von Bell.** Zur Anwendung des Ansatzes von Bell auf ein Gesamtsystem außerhalb der Physik kann man auf unterschiedliche Weise vorgehen und verschiedene Teile der Daten nutzen. Der Bell-Setup benötigt grundsätzlich Daten über zwei Systemkomponenten  $A$  und  $B$ , um die Antworten  $a$  und  $b$  zu ermitteln. Ferner benötigt man ein Verfahren, um die Fragen  $x$  und  $y$  festzulegen.

Für den Finanzmarkt wählt man  $A$  und  $B$  als Finanzinstrumente, aus dem Bereich der Aktien, Anleihen, Wechselkurse oder Derivate, die man gedanklich Alice und Bob zuordnen kann. Aus den Datenkategorien ist der Marktpreis und seine Veränderung einer der interessantesten Aspekte und eine elementare Frage besteht darin, ob ein Preisanstieg oder ein

<sup>34</sup>GICS ist eine Abkürzung für *Global Industry Classification Standard*<sup>®</sup>, eine von MSCI (Morgan Stanley Capital International) und S&P (Standard & Poors) für die internationale Finanzwelt entwickelte Kategorisierung von Unternehmen in 11 Sektoren, 24 Industriegruppen und zahlreiche Industrien und Teilindustrien.

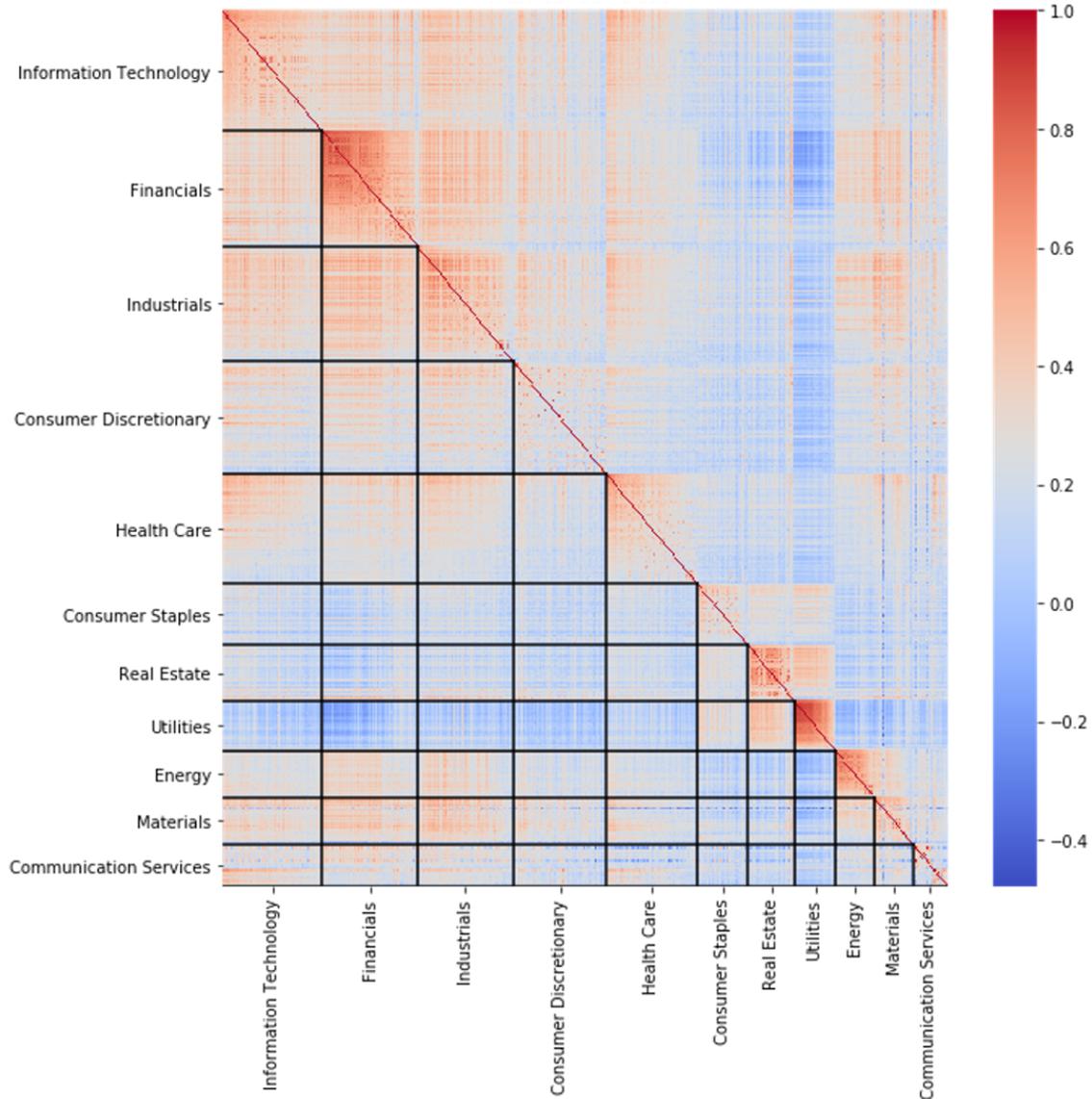


ABBILDUNG 2.1. Die Abbildung zeigt die paarweisen Stichprobenkorrelationen  $\rho_{jk}$  auf Basis der täglichen Schlusskurse der S&P-500 Aktien im Zeitraum 4.5.2016 bis 2.5.2019 auf einer Farbskala. (Eigene Darstellung, Datenquelle für Schlusskurse und Sektorzuordnung: Refinitiv.)

Preisverfall stattfindet. Die Antworten  $a, b$  des Finanzmarktsystems werden somit beispielhaft dadurch festgelegt, ob der Preis des jeweiligen Instrumentes über eine Zeitperiode gestiegen oder gefallen ist. Die exakte Höhe der Kursänderung ist dabei unerheblich, da nur Ja-Nein-Antworten betrachtet werden. Formal definiert man die Antworten  $a, b \in \{-1; +1\}$  in Runde  $t$  also über die Vorzeichenfunktion gemäß

$$a := \text{sign}(R^A(t)) \text{ und } b := \text{sign}(R^B(t)).$$

Bezüglich der Fragen besteht die Idee darin, dass das System für unterschiedliche Regime untersucht werden soll, die an manchen Tagen vorherrschen, an anderen jedoch nicht. Die Werte für  $x, y$  werden daher ebenfalls über Elemente aus den Datenkategorien definiert, wobei man grundsätzlich alle Datenkategorien nutzen kann. Dabei erhalten  $x$  bzw.  $y$  den Zahlenwert

Eins, falls an einem Tag in der jeweiligen Systemkomponente ein bestimmtes Regime vorliegt und ansonsten den Wert Null. Anders als in dem in Kapitel 1 beschriebenen Spiel gibt es keine Willensentscheidungen des Quiz-Masters und auch keine Festlegung der Antworten durch die Spielteilnehmer Alice und Bob, das verwendete Narrativ aus Abschnitt 1.1 ist nicht erforderlich, es wird vielmehr eine Untersuchung zweier wie auch immer verbundener Komponenten eines Gesamtsystems vorgenommen. Den Parameter  $\lambda$  kann man sich im Sinne verborgener Variablen und unbekannter Einflüsse innerhalb des Systems vorstellen anstatt als Strategie der Spielteilnehmer.

Für die Berechnung konkreter Zahlen soll mit einem sehr einfachen Beispiel begonnen werden, das aus den Datenkategorien ausschließlich die Aktienkurse am Ende eines Handelstages verwendet. Ein gestiegener Kurs in Instrument  $A$ , gemessen auf Schlusskursbasis, liefert also die Antwort  $a = +1$ , ein gefallener die Antwort  $a = -1$ . Der Wert für  $b$  wird analog aus den Kursen für Instrument  $B$  ermittelt.

Das Regime wird beispielhaft darüber definiert, ob der Handelstag in der betreffenden Aktie interessant war oder nicht. Ein Handelstag wird dabei *interessant* genannt, wenn die absolute Preisänderung, gemessen auf Schlusskursbasis ohne Berücksichtigung untertägiger Kursschwankungen, oberhalb eines vorgegebenen Schwellenwertes liegt. Die Richtung der Preisänderung spielt keine Rolle. Formal sind  $x, y \in \{0; 1\}$  in Runde  $t$  also über die Indikatorfunktion definiert

$$x := 1_{|R^A(t)| > r_A} \quad \text{und} \quad y := 1_{|R^B(t)| > r_B}.$$

Die Schwellenwerte  $r_A$  und  $r_B$  bezeichnen fest gewählte positive reelle Zahlen.<sup>35</sup>

Jeder Handelstag  $t$  fällt also bezüglich der beiden Aktien in eines der vier möglichen Regime  $xy = 00, 01, 10, 11$ . Das Ergebnis fällt am Tag  $t$  in genau eine der vier möglichen Kategorien  $ab = --, +-, ++, +-.$  Über eine Zeitreihe mit mehreren Tagen lassen sich somit relative Häufigkeiten und Mittelwerte nach dem Ansatz von Bell bilden. Dies liefert für zwei fest gewählte Aktien  $A, B$  das statistisch beobachtbare Verhalten des Systems  $P(ab|xy)$  und die in Kapitel 1 definierte Kenngröße

$$S_1^{AB} := S_1 = \langle ab \rangle_{00} + \langle ab \rangle_{01} + \langle ab \rangle_{10} - \langle ab \rangle_{11}.$$

Abstrakt betrachtet zeigt die Größe  $S_1^{AB}$  die Zusammenhangsstärke zwischen den Systemkomponenten  $A$  und  $B$ , wenn Handelstage, an denen unterschiedliche Regime herrschten, betrachtet werden. Hätte man für das System die in Kapitel 1 dargestellten Annahmen vorliegen, so müsste  $|S_1| \leq 2$  gelten. Allgemein ergibt sich aus der Definition von  $S_1$  aber nur die Aussage  $|S_1| \leq 4$ , da man den Werten von  $a, b$  als Vorzeichenfunktion generell nur die möglichen Werte  $-1$  oder  $+1$  beimessen kann und somit  $S_1 = +1 + 1 + 1 - (-1) = 4$  a priori nicht unmöglich ist.

Eine spannende Frage ist, ob auch die Kenngröße  $S_1$  Information über die Sektoren am Aktienmarkt in sich trägt. Dazu geht man analog wie bei der Ermittlung der Heat-Map für die klassischen Stichprobenkorrelationen vor. Abbildung 2.2 zeigt das Ergebnis. Dabei wurde für jedes Paar von Aktien  $j, k$  aus dem US-Aktienmarktindex S&P 500 die Zahl  $S_1^{jk}$  aus den

<sup>35</sup>Dieses sehr einfache Beispiel benötigt für die Festlegung des Tupels  $(x, a, y, b)$  lediglich zwei Kurszeitreihen. Natürlich kann man  $x, y$  auch über andere Referenzaktien oder -indices definieren oder dafür Handelsvolumina etc. verwenden.

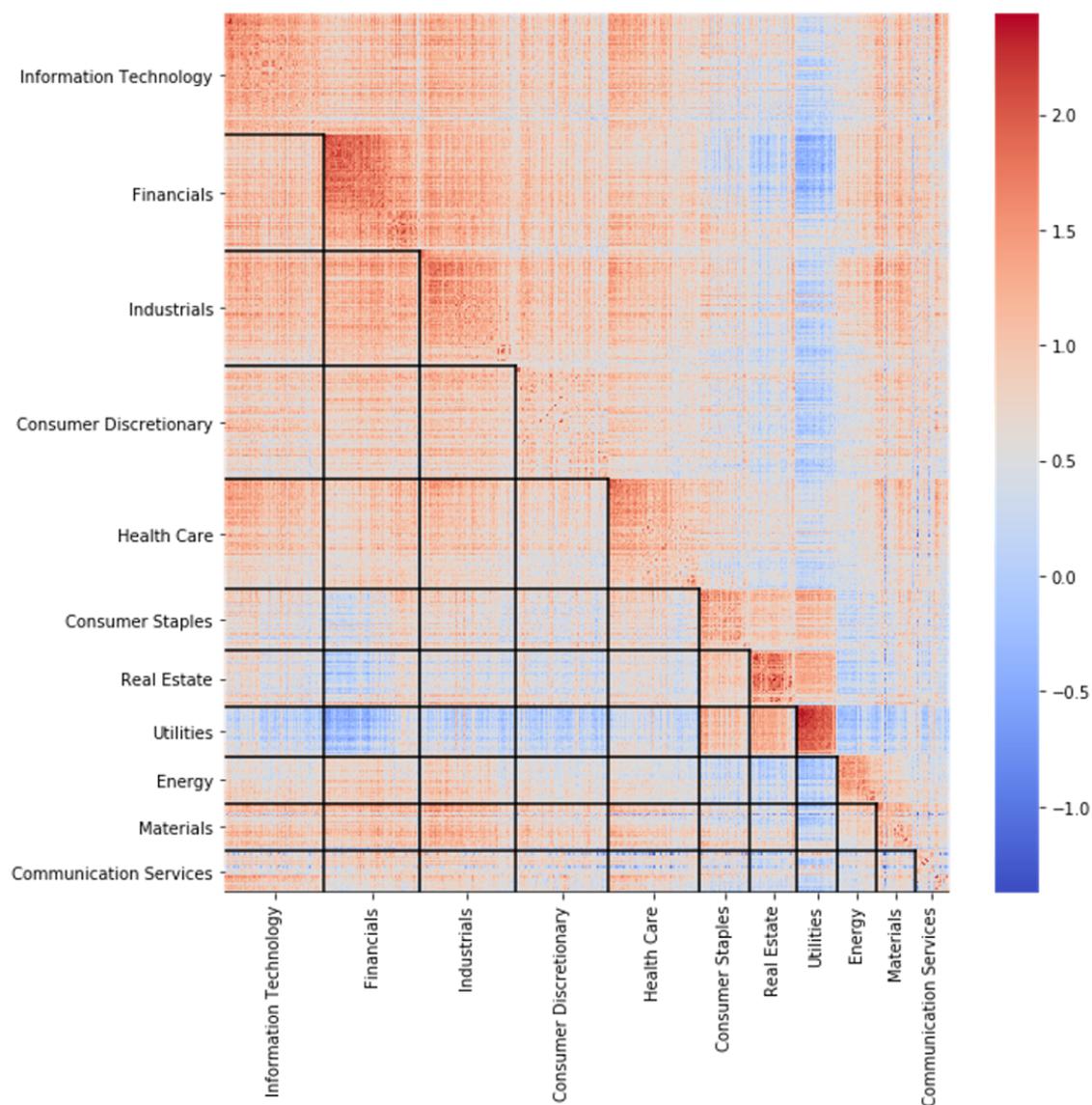


ABBILDUNG 2.2. Die Abbildung zeigt die paarweisen  $S_1^{jk}$ -Werte auf Basis der täglichen Schlusskurse der S&P-500 Aktien im Zeitraum 4.5.2016 bis 2.5.2019 für den einheitlichen Schwellenwert  $r_A := r_B := 1\%$  auf einer Farbskala. (Eigene Darstellung, Datenquelle für Schlusskurse und Sektorzuordnung: Refinitiv.)

täglichen Aktienkursänderungen über drei Jahre ermittelt. Für die Darstellung der Heat-Map wurde dieselbe Reihenfolge der Aktien wie in Abbildung 2.1 verwendet, d.h. jede Aktie wurde gemäß der GICS-Klassifikation genau einem der 11 Sektoren zugeordnet und innerhalb eines Sektors wurden die Aktien gemäß der Stärke der klassischen Korrelation sortiert. Wenn die Kenngröße  $S_1$  für den Aktienmarkt ein Zufallsmuster produzieren würde, so sollte die resultierende  $S_1$ -Heatmap durcheinandergewürfelt aussehen. Abbildung 2.2 zeigt jedoch ein klar geordnetes Verhalten, insbesondere erkennt man auch über  $S_1$  die Sektoraufteilung.

Ferner sieht man, dass die Zusammenhangsstärke den Wert von 2 überschreitet, dass sie jedoch deutlich unterhalb des theoretischen Maximalwertes von 4 bleibt.

*Bemerkung.* Für Abbildung 2.2 wurden die Schwellenwerte willkürlich als  $r_A := r_B := 1\%$  gewählt. Höhere Schwellenwerte, wie zum Beispiel  $r_A := r_B := 2\%$ , gehen stärker in die extremen Bereiche der Verteilung, liefern für den Datensatz aber wiederum eine klare sektorale Unterscheidung. Da verschiedene Aktien  $A, B$  unterschiedliche Volatilitäten aufweisen, kann man die Schwellenwerte auch als Funktion der Volatilität der Aktien festlegen, zum Beispiel als  $r_A := 2\sigma_A$  und  $r_B := 2\sigma_B$ . Die historischen Volatilitäten  $\sigma_A$  und  $\sigma_B$  muss man in diesem Fall aus der Kurszeitreihe ermitteln, was natürlich erst ex post möglich ist. Dieses Verfahren führt auf unterschiedliche Schwellenwerte für die beiden Systemkomponenten, erlaubt es aber, vom  $2\sigma$ -Bereich zu sprechen.<sup>36</sup>

**2.5. Zur No-Signalling Bedingung am Finanzmarkt.** Am weltweiten Finanzmarkt hat man es heute a priori mit *einem* Gesamtsystem zu tun. Informationen über globale wirtschaftliche Zusammenhänge, Firmen und Investoren sind nach Offenlegung über das Internet prinzipiell sofort verfügbar. Unterschiedlich starke Zusammenhänge zwischen den Systemkomponenten sind also zu erwarten. Die dunkelroten Farben in Abbildung 2.2 zeigen, dass  $S_1$ -Werte über 2 in den Daten auftreten.

Wie sieht es mit der No-Signalling-Bedingung für das Finanzmarktsystem aus? Das statistisch beobachtete Verhalten  $P$  erfüllt definitionsgemäß die No-Signalling-Bedingung, falls gilt

$$P(a|x0) = P(a|x1) \text{ für alle } a \in \{-1; +1\}, x \in \{0; 1\},$$

$$P(b|0y) = P(b|1y) \text{ für alle } b \in \{-1; +1\}, y \in \{0; 1\}.$$

In dem hier betrachteten Bell-Setup müsste also zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit für einen Kursgewinn in Aktie  $A$  unter der Bedingung  $xy = 10$  genauso hoch sein wie unter der Bedingung  $xy = 11$ . Die Wahrscheinlichkeit für einen Kursgewinn in Aktie  $A$  an einem Tag dürfte dann nicht davon beeinflusst sein, ob Aktie  $B$  am Handelstag gleichzeitig eine große Kursveränderung  $|R^B| > r_B$  aufweist oder nicht. Anders als in einem physikalischen Setup ist dies im hier diskutierten Setup nicht zu erwarten, da die Werte für die Antworten  $a, b$  über simultane Wertpapierpreisänderungen auf dem globalen Finanzmarkt definiert sind. Diese werden durch eine Vielzahl von Marktteilnehmern hervorgerufen, von denen einige in beiden Wertpapieren  $A$  und  $B$  aktiv sein können. Eine strikte Trennung in räumlich separierte Systemkomponenten ist, anders als bei physikalischen Anwendungen, hier nicht möglich.

An den Märkten findet man häufig Tage mit einem gewissen Gleichklang zwischen den Aktien. Der hier betrachtete Setup führt allerdings nicht auf die einfache Frage, ob steigende Kurse in Aktie  $B$  auf steigende Kurse in Aktie  $A$  hindeuten, was man bei positiven Korrelationen generell bejahen würde, sondern auf die Frage, ob eine große bzw. kleine Kursbewegung in Aktie  $B$  unabhängig von ihrer Richtung etwas über die Richtung von Aktie  $A$  aussagt. Theoretisch ist dies vorstellbar: Wenn Finanzinstrument  $A$  so beschaffen ist, dass sein Kurs an Handelstagen mit allgemein großen Kursausschlägen meistens steigt und an allen anderen Tagen meistens fällt, so ist  $P(+|11)$  hoch und in den anderen Fällen  $P(+|xy)$  niedrig, was die

<sup>36</sup>Je höher die Schwellenwerte in diesem Setup gewählt werden, umso relevanter werden die "fat tails" der Verteilung. Variiert man die Schwellenwerte, so hat man einen Ansatz, für ein "sampling" der Enden der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

No-Signalling-Bedingung verletzt. Innerhalb der Anlageklasse Aktien mag ein solches Verhalten etwas ungewöhnlich erscheinen, lässt man für  $A$  auch Derivate zu, so ist dies jedoch konstruierbar.

Bei praktischen Betrachtungen für den S&P 500 hängt es davon ab, wie eng zwei Aktien  $A, B$  im Markt miteinander verknüpft sind und welche Marktteilnehmer jeweils in den Werten aktiv sind.

**2.6. Zusammenhang mit dem Lognormalverteilungsmodell.** Da die Anwendung der  $S_1$ -Statistik auf Finanzmärkte neu und ungewöhnlich ist, soll ein kurzer Vergleich mit dem Lognormalverteilungsmodell als weithin bekanntem Ansatz für Risiko-Return-Betrachtungen und für die Optionsbepreisung durchgeführt werden.

**2.6.1. Einfaches Lognormalverteilungsmodell.** Im Bereich der Bewertung und Absicherung von Optionen wird standardmäßig das Lognormalverteilungsmodell verwendet. Dabei unterstellt man, dass die stetige Rendite über eine kurze Zeitperiode  $dt$  normalverteilt ist, d.h.

$$dS(t) = S(t)(\sigma dW(t) + \mu dt)$$

mit einer Brownschen Bewegung  $W(t)$ , einem Volatilitätsparameter  $\sigma > 0$  und einer reellen Zahl  $\mu$  als Driftparameter. Es ergibt sich

$$(2.1) \quad S(t) = S(0) \exp\left(\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$$

als Lösung für die Dynamik des Preisprozesses und die stetige Rendite  $R$  über eine feste Zeitperiode ist normalverteilt. Letzteres entspricht der im Capital Asset Pricing Modell betrachteten einfachen Situation, weshalb dort zur Festlegung der Verteilung lediglich die beiden Parameter  $\mu, \sigma$  erforderlich sind.

Das Modell (2.1) liefert ferner mit der Festlegung  $\mu = r =$  risikofreier Zinssatz die klassische Optionspreistheorie, denn zum stochastischen Prozess  $(S(t))_{t \in [0; T]}$  gehört die partielle Differentialgleichung

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV$$

für  $t \in [0; T[$ ,  $S > 0$ . Möchte man eine im Zeitpunkt  $T$  fällige derivative Auszahlung  $f(S(T))$  durch dynamisches Handeln im Wertpapier  $S$  erzeugen, so muss man die partielle Differentialgleichung mit der Randbedingung  $V(T, S) = f(S)$  lösen. Die resultierende Funktion  $V(t, S)$  gibt den erforderlichen Wert des Replikationsportfolios zur Zeit  $t$  bei einem Wertpapiermarktpreis von  $S$  an und ihre Ableitung nach  $S$  das Optionsdelta.<sup>37</sup>

**2.6.2. Bivariates Lognormalverteilungsmodell.** Für einen Vergleich der  $S_1$ -Statistik mit dem Lognormalverteilungsmodell muss das Modell aus Gleichung (2.1) auf zwei Finanzinstrumente verallgemeinert werden, was auf

$$\begin{aligned} dS^A(t) &= S^A(t)(\sigma_A dW^A(t) + \mu_A dt), \\ dS^B(t) &= S^B(t)(\sigma_B dW^B(t) + \mu_B dt), \end{aligned}$$

mit zwei korrelierten Brownschen Bewegungen  $W^A, W^B$  führt. Setzt man zur Vereinfachung  $\mu = r = 0$ , so bleiben drei freie Parameter, nämlich  $\sigma_A, \sigma_B$  und die Korrelation  $\rho$ . Die

<sup>37</sup>Vergleiche [2] und S. 378ff in [40].

gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte für die stetige Rendite der beiden Aktien  $(R^A, R^B)$  lautet

$$\frac{1}{2\pi\sigma_A\sigma_B\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{v^2}{\sigma_A^2} + \frac{w^2}{\sigma_B^2} - 2\frac{\rho vw}{\sigma_A\sigma_B}\right)\right) dv dw.$$

Mittels der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte sind die Erwartungswerte, die  $S_1$  ausmachen, berechenbar. Beispielsweise gilt unter Annahme des bivariaten Lognormalverteilungsmodells

$$\begin{aligned} \langle ab \rangle_{00} &= \mathbb{E} \left[ \text{sign}(R^A) \text{sign}(R^B) 1_{|R^A(t)| \leq r_A} 1_{|R^B| \leq r_B} \right] = \frac{1}{2\pi\sigma_A\sigma_B\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \int_{-r_A}^{r_A} \int_{-r_B}^{r_B} \text{sign}(v) \text{sign}(w) \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{v^2}{\sigma_A^2} + \frac{w^2}{\sigma_B^2} - 2\frac{\rho vw}{\sigma_A\sigma_B}\right)\right) dv dw. \end{aligned}$$

Legt man die Schwellenwerte  $r_A$  bzw.  $r_B$  als Vielfache der Volatilitäten  $\sigma_A$  bzw.  $\sigma_B$  fest, so verbleibt nach Substitution  $v' := v/\sigma_A$  und  $w' := w/\sigma_B$  ein Integral mit  $\rho$  als einzigem Parameter. Analog zu  $\langle ab \rangle_{00}$  lassen sich die anderen Erwartungswerte  $\langle ab \rangle_{01}$ ,  $\langle ab \rangle_{10}$  und  $\langle ab \rangle_{11}$  behandeln.

Im Ergebnis erhält man einen Ausdruck für  $S_1$ , der nur vom Korrelationsparameter  $\rho$  abhängt und der numerisch berechnet werden kann. Trifft man beispielsweise die Festlegung  $r_A := 2\sigma_A$  und  $r_B := 2\sigma_B$ , so ist der  $S_1$ -Wert im bivariaten Lognormalverteilungsmodell eine Funktion von  $\rho$ . Man kann also unter den genannten Einschränkungen zu einem vorgegebenen  $\rho$  den  $S_1$ -Wert berechnen und umgekehrt zu einem  $S_1$ -Wert einen  $\rho$ -Wert im bivariaten Lognormalverteilungsmodell ermitteln. Da das Lognormalverteilungsmodell jedoch bekanntermaßen die Wahrscheinlichkeitsverteilung realer Marktrenditen nur unzureichend beschreibt, kann die Betrachtung von  $S_1$  selbst bei Festlegung von  $x, y$  über Preisdaten zusätzliche Einsichten ermöglichen.<sup>38</sup>

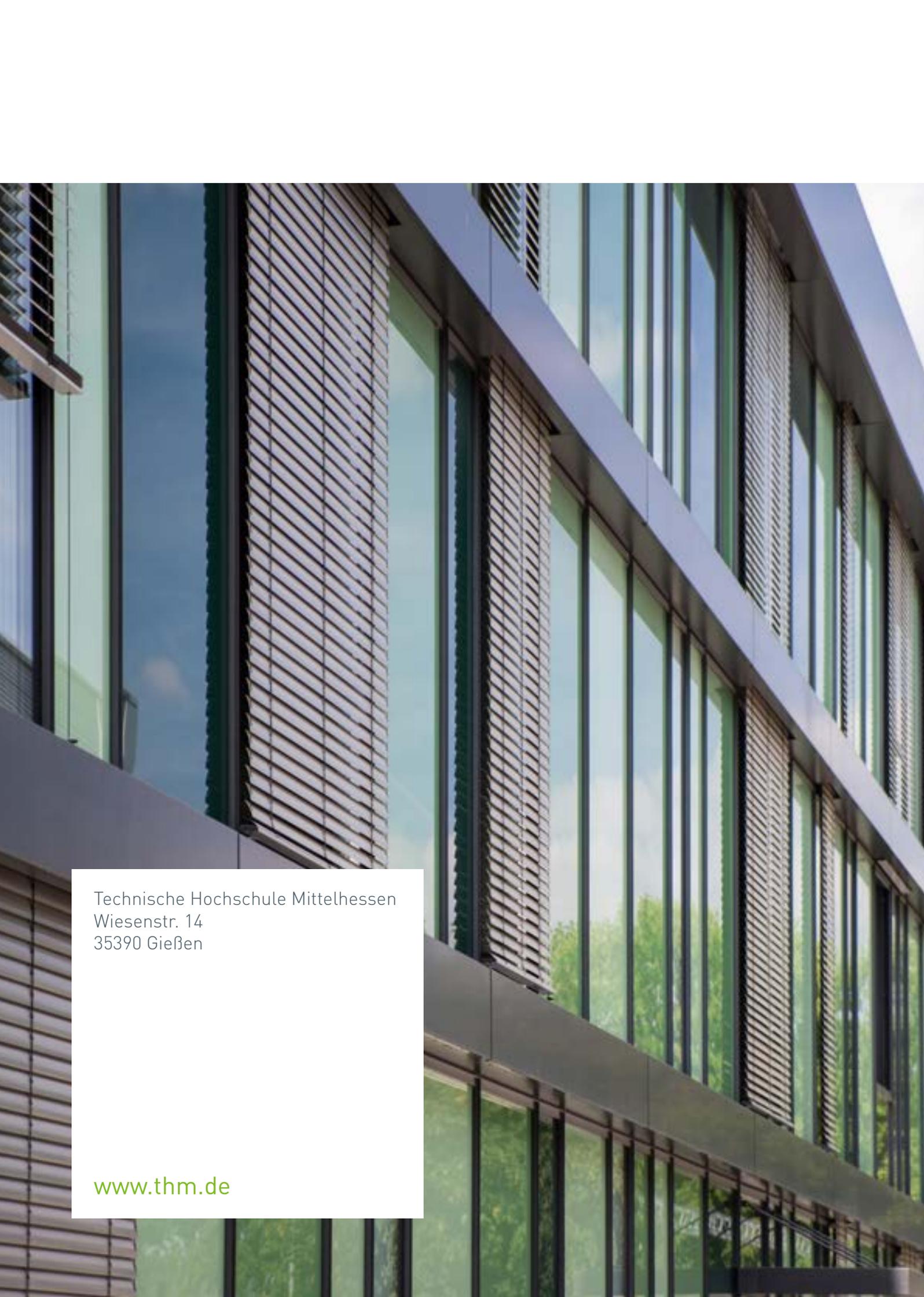
<sup>38</sup>Diese Überlegungen sind analog auf die anderen Größen  $S_2, S_3$  und  $S_4$  anwendbar.

## LITERATUR

- [1] Bachelier, L., *Théorie de la spéculation*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3 (17), pp. 21–86, 1900.
- [2] Fischer, B., Scholes, M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, Vol. **81**, No. 3, pp. 637-654, 1973.
- [3] Haven, E., *A Discussion on Embedding the Black-Scholes Option Price Model in a Quantum Physics Setting*. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications , 304, 507- 524, 2002.
- [4] Contreras, M., Pellicer, R., Santiagos, D., Villena, M., *Calibration and Simulation of Arbitrage Effects in a Non-Equilibrium Quantum Black-Scholes Model by Using Semi-Classical Methods*. Journal of Mathematical Finance, 6, 541-561, 2016.
- [5] Pothos, E.M., Busemeyer, J.R., *A quantum probability explanation for violations of ‘rational’ decision theory*. Proceedings of the Royal Society B, **276**, pp. 2171 - 2178, 2009.
- [6] Busemeyer, J.R., Bruza, P.D., *Quantum Models of Cognition and Decision*. Cambridge University Press, 2012.
- [7] Yearsley, J. M., Busemeyer, J. R., *Quantum cognition and decision theories: A tutorial*. Journal of Mathematical Psychology **74**, pp. 99-116, 2016.
- [8] Wang, Z., Busemeyer, J. R., *Interference effects of categorization on decision making*. Cognition **150**, pp 133-149, 2016.
- [9] Haven, E., Khrennikov, A., *Quantum Social Science*. Cambridge University Press, 2013.
- [10] Khrennikov, A., *Ubiquitous Quantum Structure: From Psychology to Finance*. Springer, 2011.
- [11] Eichberger J., Pirner H. J., *Decision theory with a state of mind represented by an element of a Hilbert space: The Ellsberg paradox*. Journal of Mathematical Economics **78**, 131-141, 2018.
- [12] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N., *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. **47**, 777-780, 1935.
- [13] Zeilinger, A., *Einsteins Schleier*. Goldmann Verlag, 2005.
- [14] Zeilinger, A., *Einsteins Spuk: Teleportation und weitere Mysterien der Quantenphysik*. Goldmann Verlag, 2007.
- [15] Zeh, D., *Physik ohne Realität: Tiefsinn oder Wahnsinn?* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [16] Selleri, F., *Die Debatte um die Quantentheorie*. Vieweg, 3. Auflage, 1990.
- [17] Bell, J.S., *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*. Physics **1**, 195, 1964.
- [18] Bell, J.S., *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2004.
- [19] Scarani, V., *Bell Nonlocality*. Oxford University Press, 2019.
- [20] Just, B., *Quantencomputing kompakt*. Springer Vieweg, 2020.
- [21] Gisin, N., *Quantum Chance*. Springer, 2014.
- [22] Peres, A., *Unperformed experiments have no results*. American Journal of Physics **46**, 745, 1978.
- [23] Pearl, J., *Causality: Models, Reasoning, and Inference*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2009.
- [24] Clauser, J., Horne, M., Shimony, A., Holt, R., *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*. Phys. Rev. Lett., **23**, 880-884, 1969.
- [25] Hall, B. C., *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics, **267**, Springer, New York, 2013.
- [26] Aspect, A., Dalibard, J., Roger, G., *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*. Phys. Rev. Lett. **49** (25): 1804–7, 1982.
- [27] Giustina, M., Versteegh, M., Wengerowsky, S., Handsteiner, J., Hochrainer, A., Phelan, K., Steinlechner, F., Kofler, J., Larsson, J.-Å., Abellán, C., Amaya, W., Pruneri, V., Mitchell, M., Beyer, J., Gerrits, T., Lita, A., Shalm, L., Nam, S., Scheidl, T., Ursin, R., Wittmann, R., Zeilinger, A., *Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons*. Phys. Rev. Lett. **115**, 250401, 2015.
- [28] Shalm, L., Meyer-Scott, E., Christensen, B.G., Bierhorst, P., Wayne, M.A., Stevens, M.J., Gerrits, T., Glancy, S., Hamel, D.R., Allman, M.S., Coakley, K.J., Dyer, S.D., Hodge, C. Lita, A.E., Verma, V.B., Lambrocco, C., Tortorici, E., Migdall, A.L., Zhang, Y., Kumor, D.R., Farr, W.H., Marsili, F., Shaw, M.D., Stern, J.A., Abellán, C., Amaya, W., Pruneri, V., Jennewein, T., Mitchell, M.W., Kwiat, P.G., Bienfang,

- J.C., Mirin, R.P., Knill, E., Nam, S., *Strong Loophole-Free Test of Local Realism*. Phys. Rev. Lett. **115**, 250402, 2015.
- [29] Hensen, B, Bernien, H., Dréau, A. E., Reiserer, A., Kalb, N. , Blok, M. S. , Ruitenbergh, J. , Vermeulen, R. F. L., Schouten, R. N., Abellán, C. , Amaya, W. , Pruneri, V. , Mitchell, M. W. , Markham, M., Twitchen, D. J., Elkouss, D., Wehner, , S. Taminiau, T. H., Hanson, R., *Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres*. Nature **526**, 682–686, 2015.
- [30] Hensen, B., Kalb, N., Blok, M.S., Dréau, A. E., Reiserer, A., Vermeulen, R. F. L., Schouten, R. N., Markham, M., Twitchen, D. J., Goodenough, K., Elkouss, D., Wehner, S., Taminiau, T. H., Hanson, R., *Loophole-free Bell test using electron spins in diamond: second experiment and additional analysis*. Sci. Rep. **6**, 30289, 2016.
- [31] Rosenfeld, W., Burchardt, D., Garthoff, R., Redeker, K., Ortengel, N., Rau, M., Weinfurter, H., *Event-Ready Bell Test Using Entangled Atoms Simultaneously Closing Detection and Locality Loopholes*. Phys. Rev. Lett. **119**, 010402, 2017.
- [32] Rauch, D., et al., *Cosmic Bell Test Using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars*. Phys. Rev. Lett. **121**, 080403, 2018.
- [33] Abellán, C., Acín, A. et al., *The BIG Bell Test Collaboration, Challenging local realism with human choices*. Nature **557**, 212–216, 2018.
- [34] Blasiak, P., Pothos, E. M., Yearsley, J. M., Gallus, C., Borsuk, E., *Locality vs free choice: Two sides of the same coin*. Submitted to PNAS, 2020.
- [35] Fine, A., *Hidden Variables, Joint Probability, and the Bell Inequalities*. Phys. Rev. Lett. **48**, 5, 291-295, 1982.
- [36] Halliwell, J.J., *Two proofs of Fine's theorem*. Phys. Lett. A **378**, 2945-2950, 2014.
- [37] Markowitz, H.M., *Portfolio Selection: Effiziente Diversifikation von Anlagen*, FinanzBuch Verlag, 2008.
- [38] Steiner, M., Bruns, C., Stöckl, S., *Wertpapiermanagement*, Schäffer-Poeschl, 11. Auflage, 2017.
- [39] de Prado, M.L., *Advances in Financial Machine Learning*. Wiley, 2018.
- [40] Karatzas, I. und Shreve, S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics **113**, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - London - Paris - Tokyo, 1988.



A photograph of a modern building facade featuring large glass windows and brickwork. The windows reflect the sky and surrounding greenery. The brickwork is a light color with a grid pattern. The building has a clean, architectural design.

Technische Hochschule Mittelhessen  
Wiesenstr. 14  
35390 Gießen

[www.thm.de](http://www.thm.de)